

$\mathbb{R}^n$ における Navier-Stokes 方程式の弱解の L^2 -decay

広島大理 梶木屋 龍治 (Ryuji Kajikawa)

広島大理 宮川 鉄朗 (Tetsuro Miyakawa)

次の Navier-Stokes 方程式の初期値問題を考える。

$$(NS) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u - \Delta u + (u, \nabla) u + \nabla p = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = a(x) & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

本稿では (NS) の弱解の $t \rightarrow \infty$ のときの漸近挙動について述べる。
Schonbek [8] は、 $n=3$ のとき Caffarelli, Kohn, Nirenberg [1] によ
って構成された弱解に対してその L^2 -decay を考察した。彼女
は初期値が $L^2 \cap L^r$ に属するとき [1] の弱解が $t \rightarrow \infty$ のとき
 $t^{-\frac{1}{4}}$ の order で減衰することを示した。(Kato [3] も参照せよ)
我々はこれを改良し、かつ一般化した結果を得た。実際 $n \geq 2$
 $a \in L^2 \cap L^r$ ($1 \leq r < 2$) のとき [1] によって構成された弱解の L^2 ノル
ムは $t \rightarrow \infty$ のとき $t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})}$ の order で減衰することを示す。
これは $n=3, r=1$ のとき先にあげた order よりも良い評価であ
る。これは線形熱方程式の解と同じ減衰の order である。

さらに [1] による弱解と、同じ初期値に対する線形熱方程式の解との差を評価する。これによって弱解がただ単に decay するのではなく、熱方程式の解に近づいていきながら減衰するということがわかる。

§1 記号と定義 超関数の意味で $\operatorname{div} u = 0$ なる $u \in (\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))^n$ の全体を L_σ^r で表す。同様に $u \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$ であって $\operatorname{div} u = 0$ なる関数の全体を H_σ^1 で表す。次の性質をもつ関数 u を (NS) の弱解と呼ぶ。

$$(i) \quad u \in L^\infty(0, T; L_\sigma^2) \cap L^2(0, T; H_\sigma^1) \quad (\forall T > 0) \quad \text{及び}$$

$$(ii) \quad \int_0^T \{ -(u, \Phi_t) + (\nabla u, \nabla \Phi) + ((u, \nabla)u, \Phi) \} dt = (a, \Phi(0))$$

$$\forall T > 0, \quad \forall \Phi \in C^1([0, \infty); H_\sigma^1 \cap L_\sigma^n), \quad \Phi(t) \equiv 0 \quad (t \geq T)$$

ここに (u, v) は、 L^r と $L^{r'}$ ($\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$) の duality pairing である。

弱解に関してはいくつかの構成の方法が知られている。

[1] において次のような弱解が作られた。非線形項を時間遅れの入った mollification によって近似して、遅れ $\delta \rightarrow 0$ として弱解を求めようとするものである。

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_k - \Delta u_k + (w_k, \nabla) u_k + \nabla p_k = 0 \\ \operatorname{div} u_k = 0, \quad u_k(x, 0) = a(x) \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots)$$

ここで $w_k(x, t) \equiv \delta^{-n-1} \iint \psi\left(\frac{y}{\delta}, \frac{s}{\delta}\right) \tilde{u}_k(x-y, t-s) dy ds$, $\delta = \frac{1}{k}$

$$\tilde{u}_k(x, t) \equiv \begin{cases} u_k(x, t) & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

$0 \leq \psi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, $\iint \psi dx dt = 1$, $\text{Supp } \psi \subset \{(x, t) : |x|^2 < t, 1 < t < 2\}$

ψ の Support に注意すれば、 $w_k(x, t)$ は $u_k(\cdot, s)$ の $s \in [t-2\delta, t-\delta]$ の値によってきまることがわかる。こうして (1.1) は時間遅れの入った方程式として解くことができる。このとき $\{u_k\}$ から適当な部分列 $\{u_{k_j}\}$ をとれば、それはある関数 u に $L_{loc}^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ の意味で収束する。 u は (NS) の弱解になる。この弱解に対して我々は次のような decay の評価を得た。

§2 主結果

定理 1 $n \geq 2$ (i) $a \in L_\sigma^2$ のとき $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_2 = 0$

(ii) $a \in L_\sigma^r \cap L_\sigma^2$ ($1 \leq r < 2$) のとき

$$\exists C = C(n, r, \|a\|_r, \|a\|_2) : \|u(t)\|_2 \leq C(t+1)^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})}$$

[3]において、Leray の解 ([4] 参照) に対して、 $n \leq 4$ のとき (i) が、 $n \leq 4$ かつ $1 < r < 2$ のとき (ii) が示されている。我々の結果は $n \geq 5$ の場合や $r=1$ の場合なども含んでいる。次に $a \in L_\sigma^2$ を初期値とする線形熱方程式 ($\mathbb{R}^n$ の場合には Stokes 方程式と一致する。) の解を $u_0(x, t)$ と表すと、

定理 2 (iii) $a \in L^2_\sigma$ のとき $\|u(t) - u_0(t)\|_2 = o(t^{\frac{1}{2} - \frac{n}{4}})$ ($t \rightarrow \infty$)
 (iv) $a \in L^r_\sigma \cap L^2_\sigma$ ($1 \leq r < 2$) のとき $\|u(t) - u_0(t)\|_2 = o(t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{2})})$ ($t \rightarrow \infty$)

[3]において次のような結果が示されている。

$$\|u(t) - u_0(t)\|_2 = O(t^{-\varepsilon}) \text{ for } 0 < \varepsilon < \frac{n}{4} - \frac{1}{2}, n \leq 4$$

(iii) はこれより精密な評価である。

§ 3 定理の略証 (1.1) の各 u_k に対して k に無関係な評価式を導く。この不等式において $k \rightarrow \infty$ とすることにより u に対しての求めるべき評価式を得る。このようにして証明する。 k を任意に固定し、 $u = u_k, w = w_k$ とかくと、(1.1) は次式になる。

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au + P(w, \nabla)u = 0, & t > 0 \\ u(0) = a \in L^2_\sigma \end{cases}$$

ここに P は $(L^r(\mathbb{R}^n))^n$ から L^r_σ ($1 < r < \infty$) への射影であり、 A は $A = -\Delta, D(A) = (H^2(\mathbb{R}^n))^n$ なる作用素である。 A と P は可換になる。 A のスペクトル分解を $A = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda)$ とする。定理を証明する前に補題を一つ準備する。

補題 ([2] 参照) (1) $\int_0^t \|w(s)\|_2^2 ds \leq \int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds$

$$(2) \|u(t)\|_2^2 + 2 \int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2 ds = \|a\|_2^2$$

$$(3) \exists C = C(n) > 0 : \|E(\lambda)P(w, \nabla)u\|_2 \leq C \|w\|_2 \|u\|_2 \lambda^{\frac{n+2}{4}} \quad (\lambda > 0)$$

定理1の証明 簡単のために以下において、 n, r , 初期値 a にのみ依存する定数は、すべて C とかく。(3.1) に u をかけて R^n 上で積分すれば、

$$\frac{d}{dt} \|u\|_2^2 + 2 \|A^{\frac{1}{2}} u\|_2^2 = 0$$

$$p > 0 \text{ に対して } \|A^{\frac{1}{2}} u\|_2^2 \geq \int_p^\infty \lambda d \|E(\lambda)u\|_2^2 \geq \frac{p}{2} (\|u\|_2^2 - \|E(p)u\|_2^2)$$

この不等式を使えば、

$$(3.2) \quad \frac{d}{dt} \|u\|_2^2 + p \|u\|_2^2 \leq p \|E(p)u\|_2^2$$

上式右辺を評価するため (3.1) を次式に書きなおす。

$$u(t) = e^{-tA} a + \int_0^t e^{-(t-s)A} F(w, u)(s) ds,$$

$$F(w, u) = -P(w, \nabla)u.$$

ここに $\{e^{-tA}; t \geq 0\}$ は A によって生成される半群である。

両辺に $E(p)$ を作用させ補題を使えば

$$(3.3) \quad \|E(p)u(t)\|_2 \leq \|e^{-tA}a\|_2 + C p^{\frac{n+2}{4}} \int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds$$

補題 (2) より $\|u(s)\|_2 \leq \|a\|_2 \quad (\forall s \geq 0)$ が成り立つから、(3.2), (3.3)

を使って $p = \alpha t^{-1} \quad (\alpha > 0)$ とおくと、

$$(3.4) \quad \|u(t)\|_2^2 \leq C \left[\alpha t^{-\alpha} \int_0^t s^{\alpha-1} \|e^{-sA}a\|_2^2 ds + (\alpha + 1 - \frac{n}{2})^{-1} \alpha^{\frac{n+4}{2}} t^{1-\frac{n}{2}} \right] \quad (\forall \alpha > \frac{n}{2} - 1)$$

この式から定理1 (i) が出る。(ii) を示すには、次のよく知られた不等式を使う。

$$\|e^{-sA}a\|_q \leq t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \|a\|_r, \quad 1 \leq r \leq q \leq \infty$$

これを (3.4) に適用すれば次の評価式が得られる。

$$(3.5) \quad \|u(t)\|_2^2 \leq C(t^{-n(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})} \|a\|_r^2 + t^{-\frac{n}{2}})$$

$n \geq 3$ と仮定する。もし $n(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}) \leq \frac{n}{2}-1$ ならば (3.5) 式は (ii) が成り立つことを意味している。そうでないときは、 $n(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}) > \frac{n}{2}-1 \geq \frac{1}{2}$ だから、この不等式 (3.5) から

$$\|u(t)\|_2^2 \leq C t^{-\frac{1}{2}}$$

が出てくる。これを (3.3) に代入して、(3.2) を使って前と同様に進めていくと、(3.5) より良い評価式

$$\|u(t)\|_2^2 \leq C[t^{-n(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})} + t^{-\frac{n}{2}}]$$

が得られる。これより (ii) が示される。

$n=2$ のときに (ii) を示す。この場合はもう少し複雑になる。それは $n=2$ のとき (3.5) 式から解の減衰に関する情報が何も得られないためである。 $n=2$ の場合には、強解の大域的存在、及び弱解のクラスでの解の一意性が知られている。([1]) 今後はこの解について考えるので (3.1) において $w=u$ とする。まず $a \in L^2_\sigma \cap L^r_\sigma$ ($1 < r < 2$) の場合を考える。このとき $u(t) \in L^2_\sigma \cap L^r_\sigma$ ($\forall t \geq 0$) なることが示される。([2]) 従って定理1 (i) により今後 $a \in L^2_\sigma \cap L^r_\sigma$ かつ $\|a\|_2$ は十分小さいと

仮定してよい。次に $2 < q < (\frac{1}{r} - \frac{1}{2})^{-1}$ なる q を固定して、 $\|a\|_2$ が十分小さいことを使えば次の評価が得られる。(詳しい証明は[2]を見よ。)

$$\left[\int_0^t \|u(s)\|_2^q ds \right]^{1/q} \leq C \|a\|_r t^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r} + \frac{1}{2}}$$

従って (3.3) より

$$\begin{aligned} \|E(\rho)u(t)\|_2 &\leq t^{-(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})} \|a\|_r + C \cdot \rho \cdot t^{1-\frac{2}{q}} \left[\int_0^t \|u(s)\|_2^q ds \right]^{2/q} \\ &\leq t^{-(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})} \|a\|_r + C \cdot \rho \cdot \|a\|_r^2 \cdot t^{2-\frac{2}{r}} \end{aligned}$$

(3.2) にこれを代入し、 $\rho = \alpha \cdot t^{-1}$ ($\alpha > \frac{q}{q-2}$) として $n \geq 3$ のときと同様の手法により求める不等式が導かれる。最後に $n=2$, $r=1$ の場合を考える。 $a \in L_\sigma^2 \cap L_\sigma^1 \subset L_\sigma^2 \cap L_\sigma^{\frac{q}{q-2}}$ であるからすでに示したことから $\|u(t)\|_2^2 \leq C t^{-\frac{1}{2}}$ が出てくる。従って (3.3) により $\|E(\rho)u(t)\|_2 \leq C(t^{-\frac{1}{2}} + \rho \cdot t^{\frac{1}{2}})$ が得られるので、これを (3.2) に代入し、 $\rho = \alpha t^{-1}$ ($\alpha > 1$) として 前と同様の論法により求める評価が得られる。

定理 2 の証明 $v(t) = u(t) - u_0(t)$, $u_0(t) = e^{-tA} a$ とおくと、次の式が成り立つ。

$$(3.6) \quad \frac{dv}{dt} + Av = -P(w, v)u, \quad v(0) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \|v\|_2^2 + 2 \|A^{1/2} v\|_2^2 = 2B(w, u, v),$$

そこで $B(w, u, v) = -(P(w, \nabla)u, v) = -((w, \nabla)u, v)$ である。
簡単な計算により $B(w, u, v) = -B(w, v, u_0)$ がわかる。

$\|u(t)\|_\infty \leq t^{-\frac{n}{2r}} \|a\|_r$ を使えば

$$2|B(w, v, u_0)| \leq \|a\|_r^2 \|w\|_2^2 t^{-\frac{n}{r}} + \|A^{\frac{1}{2}}v\|_2^2$$

であるから次の式が成り立つ。

$$\frac{d}{dt} \|v\|_2^2 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|_2^2 \leq \|a\|_r^2 \|w\|_2^2 t^{-\frac{n}{r}}$$

定理1の証明と同じように $\|A^{\frac{1}{2}}v\|_2^2 \geq \rho(\|v\|_2^2 - \|E(\rho)v\|_2^2)$
($\rho > 0$) を代入すれば、

$$\frac{d}{dt} \|v\|_2^2 + \rho \|v\|_2^2 \leq \rho \|E(\rho)v\|_2^2 + \|a\|_r^2 \|w\|_2^2 t^{-\frac{n}{r}}$$

(3.6) より $v(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} F(w, u)(s) ds$ であるから、補題を用いて

$$\|E(\rho)v(t)\|_2 \leq \rho^{\frac{n+2}{4}} C \int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds$$

従って、

$$(3.7) \quad \frac{d}{dt} \|v\|_2^2 + \rho \|v\|_2^2 \leq C \rho^{\frac{n+4}{2}} \left(\int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds \right)^2 + \|a\|_r^2 \|w\|_2^2 t^{-\frac{n}{r}}.$$

(iii)を示す。 $a \in L^\sigma_\sigma$ を仮定する。 $r=2$, $\rho = \alpha t^{-1}$ ($\alpha > \frac{n}{2} + 2$) と
とれば (3.7) より

$$\|v(t)\|_2^2 \leq C t^{-\frac{n}{2}} \left[(t^{-1} \int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds)^2 + t^{-1} \int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds \right]$$

が得られる。 $\|u(t)\|_2^2 \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) であるから (iii) が成り立つ。

(iv)を示すには $\rho = \alpha t^{-1}$ として (3.7) を今までと同様に変形する。その際に定理1(ii)及び補題(1)に注意して $\|u(t)\|_2$, $\|w(t)\|_2$ を評価すれば次の命題が導かれる。(詳しい証明は [2]を見よ。) この命題から (iv) は明らかである。

命題 $a \in L^2_\sigma \cap L^r_\sigma$ ($1 \leq r < 2$) とする。 $t \rightarrow \infty$ のとき

$$\|v(t)\|_2^2 = \begin{cases} O(t^{1+\frac{n}{2}-\frac{2n}{r}}) & (\frac{n}{r} - \frac{n}{2} < 1) \\ O(t^{-1-\frac{n}{2}}(\log t)^2) & (\frac{n}{r} - \frac{n}{2} = 1) \\ O(t^{-1-\frac{n}{2}}) & (\frac{n}{r} - \frac{n}{2} > 1) \end{cases}$$

参考文献

- [1] L. Caffarelli, R. Kohn and L. Nirenberg : Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. Comm. Pure Appl. Math. 35, 771-831 (1982)
- [2] R. Kajikiya and T. Miyakawa : On L^2 decay of weak solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$. preprint
- [3] T. Kato : Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions. Math. Z. 187, 471-480 (1984)
- [4] J. Leray : Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. Acta Math. 63, 193-248 (1934)
- [5] J. L. Lions : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris. Dunod et Gauthier-Villars 1969

- [6] K. Masuda : Weak solutions of the Navier-Stokes equations
Tôhoku Math. J. 36, 623-646 (1984)
- [7] M. Reed and B. Simon : Methods of modern mathematical physics
Vol. II. ; Fourier analysis, self-adjointness. New York-London -
San Francisco : Academic Press 1975.
- [8] M.E. Schonbek : L^2 decay for weak solutions of the Navier -
Stokes equations. Arch. Rational Mech. Anal. 88, 209-222 (1985)
- [9] M.E. Schonbek : Large time behaviour of solutions to the
Navier - Stokes equations. preprint
- [10] H. Sohr : On the decay of weak solutions of the Navier-Stokes
equations. To appear in J. Funct. Anal.
- [11] R. Temam : Navier-Stokes equations. Amsterdam :
North-Holland Publ. Co. 1977.