

Mahlerの方法の発展

慶応大経済 西岡久美子 (Kumiko Nishioka)

筆者が超越数論における Mahler の方法を知ったのは 17 年前である。その後、色々な分野における結果を使うことにより、Mahler の方法は発展し、またその応用も広がっている。1994 年に筆者は「Mahler 関数と超越数 II」(Seminar on Math. Sci., No. 21, 慶応大学理工学部)を著し、それまでの研究の到達点を明らかにした。ここではその内容及び、その後に行われた結果にもふれたらと思う。参考文献については、上記講義録を参照して頂きたい。

I. 一変数 Mahler 関数

K を代数体とし、 d は 2 以上の整数とする。中級数 $f(z) \in K[[z]]$ は $\{|z| < R\}$ で収束し、次の関数方程式をみたすとする。

$$(1) \quad f(z^d) = \sum_{i=0}^m a_i(z) f(z)^i / \sum_{i=0}^m b_i(z) f(z)^i,$$

ここで $m < d$ で, $a_i(z), b_i(z) \in K[z]$ である. $\Delta(z) \in K[z]$ を $\sum_{i=0}^m a_i(z) u^i$ と $\sum_{i=0}^m b_i(z) u^i$ の u に関する終結式とする.

定理 1 (Mahler, 1929). $f(z)$ が有理関数体 $K(z)$ 上超越的で、代数的数 α が $0 < |\alpha| < \min\{1, R\}$, $\Delta(\alpha^{d^k}) \neq 0$ ($k \geq 0$) を満たせば $f(\alpha)$ は超越数である.

例. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{d^k}$ は $f(z^d) = f(z) - z$ を満たす. 従って, $0 < |\alpha| < 1$ を満たす代数的数 α に対して, $f(\alpha)$ は超越数である.

定理 1 は次の様に一般化された. $f(z)$ は次の関数方程式を満たすとする.

$$(2) \quad Q_0(z, f(z)) f(z^d)^n + Q_1(z, f(z)) f(z^d)^{n-1} + \dots + Q_n(z, f(z)) = 0,$$

ここで $Q_i(z, u) \in K[z, u]$ ($i=0, \dots, n$) は互いに素とする. すると

$$g(z) = \sum_{i=1}^n g_i(z, u) Q_i(z, u) \in K[z]$$

となるような $g_i(z, u) \in K[z, u]$, $g(z)$ が存在する.

$$m = \max_{0 \leq i \leq n} \deg_u Q_i, \quad M = \max \{d, m\}$$

と置く。

定理 2 (Nishicka, 1982). $f(z)$ は $K(z)$ 上超越的で $Mn^2 < d^2$ とする。代数的数 α が $0 < |\alpha| < \min\{1, R\}$ $f(\alpha d^{\frac{1}{k}}) \neq 0$ ($k \geq 0$) をみたせば $f(\alpha)$ は超越数である。

系. 定理 1 は $m < d^2$ の仮定の下に成り立つ。

$p_c(z) = z^2 + c$ とおくと M は Mandelbrot Set M は次の様に定義される。

$$M = \{c \mid \overbrace{p_c \circ \cdots \circ p_c}^k(0) \not\rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty)\}.$$

M の外側から $\{z \mid |z| > 1\}$ への等角写像が知られている。定理 2 の応用として次が得られる。

定理 3 (Becker and Bergweiler, 1993).

$\alpha \in \mathbb{C} \setminus M$ が代数的数なら α は超越数である。

$$J(z) = j(\log z / 2\pi i) \quad (j(u) \text{ は modular invariant})$$

と置く。 $J(z)$ はすべての 2 以上の整数 d に対して (2) 型の関数方程式をみたす。しかし n が d より大きいので

定理 2 を使う事はできない。最近、すいとの d に対して関数方程式をみたすという事と、 $J(z)$ の Taylor 展開の係数の絶対値の精密な評価 (Mahler による) を使って次の定理が証明された。

定理 4 (Barre-Sirieix, Diaz, Gramain, Philibert, To appear in Invent. Math.). $0 < |\alpha| < 1$ を $\mathbb{C}$ の代数的数 α に対し、 $J(\alpha)$ は超越数である。

次に代数的独立性について述べよう。中級数 $f_1(z), \dots, f_m(z) \in K[[z]]$ は $\{|z| < R\}$ で収束し、次をみたすとする。

$$(3) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z^d) \\ \vdots \\ f_m(z^d) \end{pmatrix} + B(z),$$

ここで $A(z)$ は m 次正方形行列、 $B(z)$ は m 次元ベクトルで、それらの成分は有理関数体 $K(z)$ の元である。

定理 5 (Nishioka, 1990). 代数的数 α が $0 < |\alpha| < \min\{1, R\}$ をみたし α^{d^k} ($k \geq 0$) は $A(z), B(z)$ の成分の極でなく、 $\det A(z)$ の零点でもないとする。このとき

$$\text{trans. deg}_{\mathbb{Q}} (f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha))$$

$$= \text{trans. deg}_{K(z)} K(z)(f_1(z), \dots, f_m(z)).$$

定理 1 (Amou, 1991). $A(z), B(z)$ の成分は $K[z]$ の元とする. $f_1(z), \dots, f_m(z)$ が $K(z)$ 上代数的独立で α が $0 < |\alpha| < 1$ をみたす超越数なら

$$\text{trans deg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\alpha, f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) \geq \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor.$$

regular sequence から生成される巾級数が (3) の様な関数方程式をみたすことが知られている. また Becker, Töpfer により 一般的な変換 $z \rightarrow p(z)$ ($p(z) \in K(z)$) が扱われている.

II. 多変数 Mahler 関数.

$\Omega = (\omega_{ij})$ は非負 n 次正方形行列で $\omega_{ij} \in \mathbb{Z}$ とする. $z = (z_1, \dots, z_n)$ に対し

$$\Omega z = \left(\prod_{j=1}^n z_j^{\omega_{1j}}, \dots, \prod_{j=1}^n z_j^{\omega_{nj}} \right)$$

とおいて変換 $\Omega : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ を定義する. 以後 Ω , 代数的点 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ はある適当な条件をみたすとする. (こゝでは詳しくは述べない). $z \rightarrow z^d$ の代わりに $z \rightarrow \Omega z$ として定理 1 が成り立つ.

例. ω は正二次無理数とし

$$F_{\omega}(z_1, z_2) = \sum_{h_1=1}^{\infty} \sum_{h_2=1}^{\lfloor h_1 \omega \rfloor} z_1^{h_1} z_2^{h_2}$$

とおく。 $F_{\omega}(z_1, z_2)$ は $\{|z_1| < 1, |z_1||z_2|^{\omega} < 1\}$ で収束する。

$$f_{\omega}(z) = F_{\omega}(z, 1) = \sum_{h=1}^{\infty} [h\omega] z^h$$

とおく。簡単のために ω の連分数展開は純巡環で $\omega < 1$ とする。 $\omega = [0; a_1, a_2, \dots]$ とし、 $2 \leq i$ 偶数の周期とし。

$$\Omega = \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと。

$$F_{\omega}(z_1, z_2) = F_{\omega}(\Omega(z_1, z_2)) + b(z_1, z_2),$$

$$b(z_1, z_2) \in \mathbb{Q}(z_1, z_2)$$

である。これより $0 < |\alpha_1| < 1$, $0 < |\alpha_1||\alpha_2|^{\omega} < 1$

をみたす代数的数 α_1, α_2 に対して $F_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2)$ は超越数であることがあかる。とくに $0 < |\alpha| < 1$ をみたす代数的数 α に対して $f_{\omega}(\alpha)$ は超越数である。

多変数 Mahler 関数に対して定理 5, 6 の様な結果はまだ得られていないが $A(x)$ の成分がすべて定数の時

トは次の結果がある。

定理 7 (Nishicka, to appear in Tôhoku Math. J.)
 $f_1(z), \dots, f_m(z) \in K[[z_1, \dots, z_n]]$ は多重円板 U
 で収束し、関数方程式

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1(Qz) \\ \vdots \\ f_m(Qz) \end{pmatrix} + B(z)$$

をみたすとする。ここで A は K の元を成分に持つ m
 次正方形行列, $B(z)$ は $K(z)$ の元を成分に持つ m 次元ベ
 クトルである。 $f_1(z), \dots, f_r(z)$ ($r \leq m$) が $K(z)$ を法
 として K 上線形独立なら、代数的点 $\alpha \in U$ に対し
 て $f_1(\alpha), \dots, f_r(\alpha)$ は代数的独立である。

系.

$$\begin{aligned} \text{trans. deg}_{\mathbb{Q}} (f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) \\ = \text{trans. deg}_{K(z)} K(z)(f_1(z), \dots, f_m(z)). \end{aligned}$$

III. 異なる変換に関する代数的独立性

$d_1, \dots, d_t$ は 2 以上の整数で $i \neq j$ なら

$\log d_i / \log d_j \notin \mathbb{Q}$ とする。 $f_{ij} \in K[[z]]$ ($1 \leq i \leq t$,
 $1 \leq j \leq M_i$) は $|z| < R$ で収束し、次の関数方程式
 をみたすとする。

$$f_{i\bar{j}}(z^{d_i}) = f_{i\bar{j}}(z) + b_{i\bar{j}}(z), \quad b_{i\bar{j}}(z) \in K(z).$$

定理 8 (Nishio, 1994). 各 i 上 $1 \leq f_{i1}(z), \dots, f_{iM_i}(z)$ が $K(z)$ 上代数的独立なら, $0 < |\alpha| < \min\{1, R\}$ を与える代数的数 α に対して

$f_{i\bar{j}}(\alpha), \quad 1 \leq i \leq t, \quad 1 \leq \bar{j} \leq M_i$
は代数的独立である。

例. $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha d^k, \quad d \geq 2$ は代数的独立である。