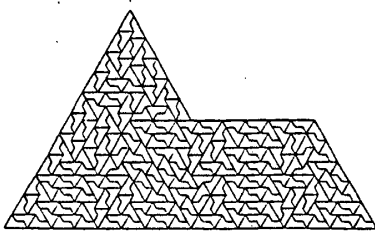


# 自己相似法による欠陥を持った格子構造

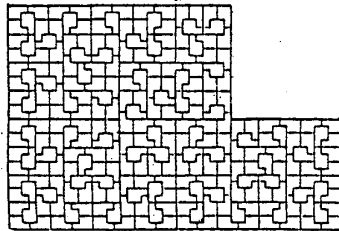
(理 研) 渡辺泰成

一般に高次の回転対称を有する準結晶格子は高次元の超立方体の2次元または3次元空間への射影と解釈されている。一方 Mackay は5回対称を持つペンローズタイルが自己相似則によって発生できることを示し、小川は3次元のペンローズ格子と発生させる自己相似則を発見した。準結晶格子とは異なる非周期パターンにおいても自己相似法の適用によって幾つかのパターンが作られている。本報告ではペントミノ片を用いた平面タイルの自己相似構造を紹介すると同時に、一般の非周期構造における2次元、3次元座標と自己相似則から導く方法を示す。

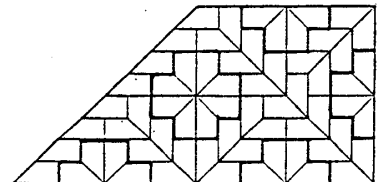
オ 1 図. 格子点を用いた自己相似法による非周期パターン



スフィンクス



ペントミノ



ウェッジ

結晶構造が単位胞内の非対称単位原子座標を与えることにより記述されるように自己相似構造も自己相似の基底単位胞の粒子座標を与えることにより空間に長距離秩序を以て分布する全ての粒子を記述することができる。基底単位胞をオ0世代、基底単位胞が集合して自己相似な単位パターンを形成するときこのパターンをオ1世代と呼ぶ。

オ0世代の  $n$  個の粒子座標の行ベクトル  $\underline{X}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$   $x_n^{(0)} = (x_n^{(0)}, y_n^{(0)}, z_n^{(0)})$

$m$  個の対称操作行列  $R$  の列ベクトル  $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix}$

$R$  に付随した並進ベクトルの  $m \times m$  行列  $\Pi^{(0)} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_1 & \dots & \pi_1 \\ \pi_2 & \pi_2 & \dots & \pi_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_m & \pi_m & \dots & \pi_m \end{pmatrix}$

オ  $l$  世代の粒子座標の行列  $\underline{X}^{(l)}$ ,  $l-1$  世代から  $l$  世代へ拡大する相似比  $k$

$$\underline{X}^{(l)} = R \underline{X}^{(l-1)} + k \Pi^{(l-1)} \quad (1)$$

$$\Pi^{(l-1)} = k \Pi^{(l-2)} = k^2 \Pi^{(l-3)} = \dots = k^{l-1} \Pi^{(0)} \quad (2)$$

$$(1), (2) \text{ より } X^{(l)} = R | X^{(l-1)} + k \pi^{(l-1)} \quad (3)$$

$l$  世代の空間粒子分布は  $X^{(l)}$  の行列要素として求めることができる。ペントミノの場合は基底単位胞が 1 種類であるがスフィンクス、ウェッジ、ヤペンローズパターンのように対掌体も含んだり、2 種類の菱形の基底パターンを以て構成される単位パターンでは 1 番目の基底パターンを 1 世代の 1 番目の単位パターンに移す  $R$  の列ベクトル  $R_{11}$ ,  $T$  の行列  $\pi_{11}^{(0)}$ 、2 番目の基底パターンを 1 番目の単位パターンに移す  $R$  の列ベクトル  $R_{21}$ ,  $T$  の行列  $\pi_{21}^{(0)}$  とすれば

$$X_{11}^{(l)} = R_{11} | X_1^{(l-1)} + k \pi_{11}^{(l-1)} \quad (4)$$

$$X_{21}^{(l)} = R_{21} | X_2^{(l-1)} + k \pi_{21}^{(l-1)} \quad (5)$$

$$X_1^{(l)} = X_{11}^{(l)} \cup X_{21}^{(l)} \quad (6)$$

$$X_2^{(l)} \text{ も同様に } X_2^{(l)} = X_{21}^{(l)} \cup X_{22}^{(l)} \quad (7)$$

(3) の漸化式を解いて  $i$  世代  $j$  番目の粒子座標ベクトル  $(i, j, n)$  を求めると

$$W(i, j, n) = R \left[ \frac{j}{n} \right] W \left( j - \left[ \frac{j}{n} \right] \times n \right) + T \left[ \frac{j}{n} \right] \quad i=1 \quad (8)$$

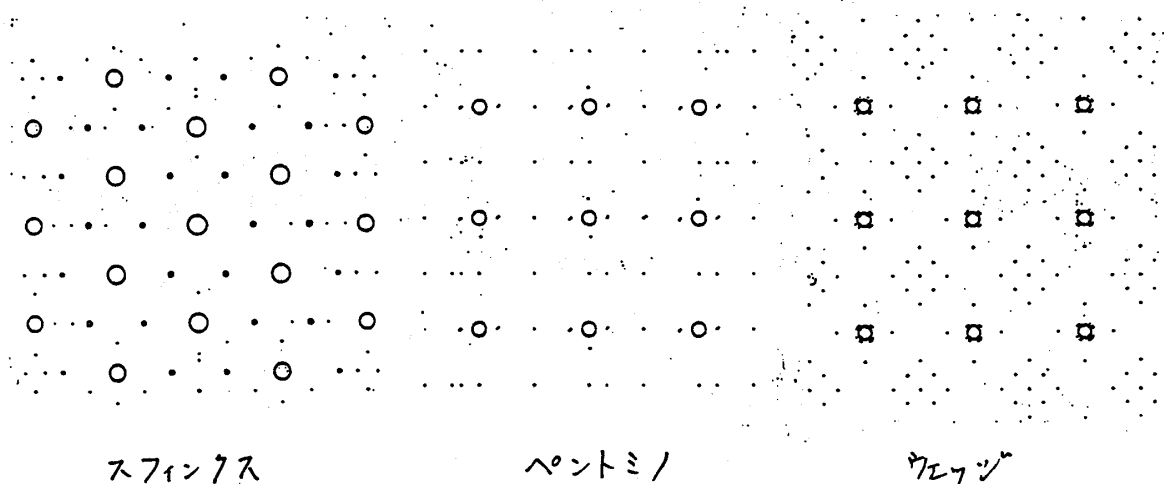
$$\begin{aligned}
 W(i, j, n) = & R \left[ \frac{j-F_1}{n} \right] R \left[ \frac{F_1}{n} \right] W \left( j - \left[ \frac{j}{n} \right] \times n \right) + R \left[ \frac{j}{n \cdot m} \right] \\
 & + R \left[ \frac{j}{n \cdot m} \right] + T \left[ \frac{F_1}{n} \right] + T \left[ \frac{j}{n \cdot m} \right] k \quad i=2 \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ここで } F_1 = & j - \left[ \frac{j}{n \cdot m} \right] \times n \cdot m \\
 & \\
 W(i, j, n) = & R \left[ \frac{j-F_{i-1}}{n \cdot m^{i-1}} \right] \prod_{\ell=1}^{i-1} R \left[ \frac{F_{i-\ell}}{n \cdot m^{i-\ell-1}} \right] W \left( j - \left[ \frac{j}{n} \right] \times n \right) \\
 & + \sum_{\ell=2}^i R \left[ \frac{j-F_{i-1}}{n \cdot m^{i-1}} \right] \prod_{\ell'=2}^{i-\ell+2} R \left[ \frac{F_{i-\ell'+1}}{n \cdot m^{i-\ell'}} \right] T \left[ \frac{F_{\ell-2}}{n \cdot m^{\ell-3}} \right] k^{\ell-3} \\
 & + R \left[ \frac{j}{n \cdot m^{i-1}} \right] T \left[ \frac{F_{i-1}}{n \cdot m^{i-2}} \right] k^{i-2} + T \left[ \frac{j}{n \cdot m^{i-1}} \right] k^{i-1} \quad i \geq 3 \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ここで } F_{i-\ell} = & j - \left[ \frac{j}{n \cdot m^{i-\ell}} \right] \times n \cdot m^{i-\ell} \quad (\ell=1, i \geq 2), \quad F_{i-\ell} = F_{i-\ell+1} - \left[ \frac{F_{i-\ell+1}}{n \cdot m^{i-\ell}} \right] n \cdot m^{i-\ell} \\
 & (\ell > \ell \geq 2, i \geq 3)
 \end{aligned}$$

$[x]$  は変換操作の番号  $[ ]$  はガウス記号  $m \leq x < m+1$  のとき  $[x] = m$ .

(8) (9) (10) より スフィンクス, ペントミノ, ウエッジの格子点を求め。  
これらの回折像と計算した結果と下図に示す。回折像はいずれも結晶格子から選ばれた  
カ2図。カ1図のフーリエ変換による回折像



格子点の集合のフーリエ変換であるので結晶格子の対称(3回, 4回)を有するが  
自己相似操作による非周期性のため結晶格子として眺めた場合、欠陥を持った格子構造と  
解釈することが出来る。特にウエッジでは規則的な消滅則が観測され一種の変調構造があ  
ると考えられる。これは格子点より長い周期を持った4回対称の模様単位が存在しこの  
模様の内部に欠陥格子点を含むことによると考えられる。これに対しスフィンクスやペン  
トミノでは主反射に対する衛星反射が認められる点はウエッジと同じであるが、その消滅  
則はウエッジほど顕著でない。

### 参考文献

- de Bruijn, N. G (1981) *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 43 39-66  
 Branko Grünbaum & G.C. Shephard. (1986) "Tillings and Patterns"  
 W. H. Freeman and Company New York 512-523  
 Duneau, M. & Katz, A (1985), *Phys. Rev. Lett.* 54 2688-2691  
 Mackay, A. L. (1981), *Sov. Phys. Crystallogr.* 26 517-522  
 Mackay, A. L. (1982), *Physica* 114A 609-613  
 Ogawa, T (1985), *J. Phys. Soc. Jpn.* 54 3205-3208  
 Penrose, R. (1974), *Bull. Inst. Maths. Appl.* 10 266-271