

Gamma-starlike 関数について

布 川 護 (群馬大学)

Lewandowski, Miller と Złotkiewicz [2] は以下の性質を満たす関数を

gamma-starlike 関数と定義した. すなわち $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ は単位円内

$E = \{z : |z| < 1\}$ で正則で $f(z)$, $f'(z)$ および $(1 + z f''(z)/f'(z))$ は $0 < |z| < 1$ で 0 と

ならないと仮定し γ を実数とするとき $z \in E$ ならば

$$(1) \quad \operatorname{Re} \left[\left(\frac{z f'(z)}{f(z)} \right)^{1-\gamma} \left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right)^{\gamma} \right] > 0$$

である. ただし巾乗は主値をとるものとする.

上の条件を満たす関数の集合を $\mathcal{L}_{\gamma}$ で表すことにする.

(1) で $\gamma = 0$ のとき $f(z)$ を 星型関数であるという. このとき $f(z)$ は E を原点に関して

星型である領域に写像する. $\gamma = 1$ のときは $f(z)$ を凸型関数という. $f(z)$ が凸型関数ならば

$f(z)$ は E を凸型領域に写像することはよく知られている.

ところで $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ は E で正則で $0 < \alpha \leq 1$ ならば単位円内 E で

$$\left| \arg \frac{z f'(z)}{f(z)} \right| < \frac{\pi}{2} \alpha$$

が成立するとき $f(z)$ は位数が α の strongly starlike 関数と定義する. 位数が

α の strongly starlike 関数は 明らかに星型関数である.

つぎに $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ は E で正則で $0 < \alpha \leq 1$ ならば 単位円内 E で

$$\left| \arg \left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right) \right| < \frac{\pi}{2} \alpha$$

が成立するとき $f(z)$ は位数が α の strongly convex 関数であると定義する.

$f(z)$ が位数 α の strongly convex 関数であれば これも明らかに $f(z)$ は

凸型関数である.

Lewandowski, Miller と Złotkiewicz は [2, 定理 1] で次の定理を得た.

定理 A. γ を任意の実数とすると $f(z) \in \mathcal{L}_\gamma$ ならば $f(z)$ は星型関数である.

また Chiang [1, 定理 1] は次の定理を得た.

定理 B. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ は E で正則で $z \in E$ ならば

$$\left| \arg \left(\frac{z f'(z)}{f(z)} \right)^{1-\gamma} \left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right)^{\gamma} \right| \leq \frac{\pi}{2} (\beta(1+\gamma) - \gamma)$$

とする. ただし $\frac{\gamma}{1+\gamma} < \beta < 1$ である.

このとき $f(z)$ は位数 β の strongly starlike 関数である.

ところで 定理 A は次の様に精密化され, 定理 B も改良される.

定理 1. $f(z) \in \mathcal{L}_\gamma$, $0 < \gamma$ ならば $f(z)$ は位数 β_0 の strongly starlike 関数である. ただし β_0 は下の方程式の最小正数解である.

$$\beta + \frac{2\gamma}{\pi} \tan^{-1} \frac{\beta g(\beta) \sin \frac{\pi}{2}(1-\beta)}{p(\beta) + \beta g(\beta) \cos \frac{\pi}{2}(1-\beta)} = 1,$$

ここで $p(\beta) = (1+\beta)^{\frac{1+\beta}{2}}$ で $g(\beta) = (1-\beta)^{\frac{\beta-1}{2}}$ である.

証明. 仮定より $z \in E$ ならば

$$(2) \quad \operatorname{Re} \left[\left(\frac{z f'(z)}{f(z)} \right)^{1-\gamma} \left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right)^\gamma \right] > 0.$$

つぎに

$$p(z) = \frac{z f'(z)}{f(z)} \quad \text{とおくと}$$

$p(z)$ は E で正則で $p(0) = 1$ である.

ところで, もしも単位円内にある点 z_0 が存在して $|z| < |z_0|$ ならば

$$|\arg p(z)| < \frac{\pi}{2} \beta_0$$

また

$$|\arg p(z_0)| = \frac{\pi}{2} \beta_0 \quad \text{であると. 定すると}$$

布川 [3, Lemma] より

$$\frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} = i \beta_0 k \quad \text{とかける.}$$

ただし

$$k \geq 1 \quad \arg p(z_0) = \frac{\pi}{2} \beta_0 \quad \text{のとき}$$

$$k \leq -1 \quad \arg p(z_0) = -\frac{\pi}{2} \beta_0 \quad \text{のとき.}$$

簡単な計算により

$$\begin{aligned} & \arg \left[\left(\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \right)^{1-\gamma} \left(1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} \right)^{\gamma} \right] \\ &= \arg p(z_0) + \gamma \arg \left(1 + \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)^2} \right). \end{aligned}$$

まず最初に $\arg p(z_0) = \frac{\pi}{2} \beta_0$ であると仮定すると 布川 [3, p. 236] より

$$\begin{aligned} & \arg \left(1 + \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)^2} \right) \\ & \geq \tan^{-1} \frac{\beta_0 g(\beta_0) \sin \frac{\pi}{2} (1-\beta_0)}{P(\beta_0) + \beta_0 g(\beta_0) \cos \frac{\pi}{2} (1-\beta_0)} \end{aligned}$$

を得るから

$$\begin{aligned} & \arg \left[\left(\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \right)^{1-\gamma} \left(1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} \right)^{\gamma} \right] \\ & \geq \frac{\pi}{2} \left(\beta_0 + \frac{2\gamma}{\pi} \tan^{-1} \frac{\beta_0 g(\beta_0) \sin \frac{\pi}{2} (1-\beta_0)}{p(\beta_0) + \beta_0 g(\beta_0) \cos \frac{\pi}{2} (1-\beta_0)} \right) \\ & = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

これは仮定 (2) に反するから矛盾である。次に $\arg p(z_0) = -\frac{\pi}{2} \beta_0$ であると仮定しても

同様にして

$$\begin{aligned} & \arg \left[\left(\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \right)^{1-\gamma} \left(1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} \right)^{\gamma} \right] \\ & \leq -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

となつて仮定に反する。よつて $z \in E$ ならば

$$\left| \arg \left(\frac{z f'(z)}{f(z)} \right) \right| \leq \frac{\pi}{2} \beta_0$$

が証明された。

定理 1 の証明と全く同じ方法で次の定理を得る。

定理 1'. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ は E で正則で $z \in E$ ならば

$$\left| \arg \left(\frac{z f'(z)}{f(z)} \right)^{1-\gamma} \left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right)^{\gamma} \right| < \frac{\pi}{2} \alpha(\beta)$$

とする。ただし $0 < \gamma$, $0 < \beta < 1$ で

$$\alpha(\beta) = \beta + \frac{2\gamma}{\pi} \tan^{-1} \frac{\beta g(\beta) \sin \frac{\pi}{2} (1-\beta)}{p(\beta) + \beta g(\beta) \cos \frac{\pi}{2} (1-\beta)}.$$

このとき $f(z)$ は位数 β の strongly starlike 関数となる.

注意. $0 < \gamma$ であるとき 定理 B においては

$$\beta(1+\gamma) - \gamma = \beta - \gamma(1-\beta) < \beta$$

であり 定理 1' においては

$$\beta < \beta + \frac{2\gamma}{\pi} \tan^{-1} \frac{\beta q(\beta) \sin \frac{\pi}{2}(1-\beta)}{p(\beta) + \beta q(\beta) \cos \frac{\pi}{2}(1-\beta)}$$

であるから 定理 1 は 定理 B を精密化している.

定理 2. $f(z) \in \mathcal{L}_\gamma$, $1 \leq \gamma$ ならば $f(z)$ は凸型関数であり かつ位数が

$(\beta_0 + \frac{1}{\gamma}(1-\beta_0)) \leq 1$ の strongly convex 関数である.

証明.

$$(3) \quad \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^{1-\gamma} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right)^\gamma = g(z) \quad \text{とおくと}$$

仮定より $g(z)$ は Carathéodory 関数である. すなわち $z \in E$ ならば

$$|\arg g(z)| < \frac{\pi}{2} \quad \text{である.}$$

また 定理 1 より $z \in E$ ならば

$$(4) \quad \left| \arg \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \right| < \frac{\pi}{2} \beta_0$$

ただし β_0 は 定理 1 で得られた値である ($0 < \beta_0 < 1$).

また (3) と (4) より

$$\begin{aligned} \left| \arg \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right| &= \left| \arg q(z)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right| \\ &< \frac{\pi}{2} \frac{1}{\gamma} + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\pi}{2} \beta_0 \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\beta_0 + \frac{1}{\gamma} (1 - \beta_0) \right) \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

よつて 定理 2 が証明された.

参 考 文 献

- [1] Y.M. Chiang, On a subclass of strongly gamma-starlike functions and quasiconformal extensions, Ann. Univ. Marie Curie-Sklodowska, Sect.A. 45(1991), 21-27.
- [2] Z. Lewandowski, S. Miller and E. Zlotkiewicz, Gamma-starlike functions, Ann. Univ. Marie Curie-Sklodowska, Sect. A. 28(1974), 53-58.
- [3] M. Nunokawa, On the order of strongly starlikeness of strongly convex functions, Proc. Japan Acad. 69. Sect. A. (1993), 234-237.

(めのかわ まもる・群馬大学教育学部)