

Minimal Fullharmonic 構造と Minimal resolvent について

静大 理 部 敏昭

先に筆者は Axiomatic theory of non-negative full-superharmonic functions (to appear) において Full 調和構造と submarkov resolvent の関係を論じた。すなわち 調和空間 $(X, \mathcal{H})$ 上の full 調和構造 $\mathcal{H}$ が与えられたとき, $E^n = C(X) \cap \mathcal{H}(X - K_n)$, ここに (K_n) はコンパクト集合による X の exhaustion, とおくと E^n は $C_b(X)$ のバナハ部分空間で $E = \bigcup_n E^n$ と次の resolvent の値域 $V_\lambda(B_b(X))$ は同じ uniform closure をもつ事を示した。ここに V_λ は 非負な full-superharmonic 函数全体 $\tilde{\mathcal{H}}_+(X)$ を エクスセラ函数的全体として持つ submarkov resolvent である。

$$V_\lambda : B_b(X) \rightarrow C_b(X) .$$

そこでこのような full 調和構造の中で最小なものを見つけること, それに対応する resolvent が Meyer により構成された resolvent ; そのエクスセラ函数全体 $= \mathcal{H}_+(X)$

, と一致するかどうかをしらねること が問題となる.

$(X, \mathcal{H})$ を Brelot の harmonic space ,

$$1 \in \mathcal{H}(X),$$

$\exists p > 0$. potential on X .

とする。 X_0 を Δ -コンパクト化 $X_0 = X \cup \{\Delta\}$ とし 集合 $A \subset X_0$ の $A \cap X$ の X での境界を ∂A , X_0 での境界を δA と書く。 ∂D がコンパクトな, 相対コンパクトな領域 (X での) の全体を $\mathcal{D} \ni D$ と書く。 K を X のコンパクト集合とし, ∂K 上の函数 f に対し, $f' = f$ on ∂K , $= 0$ on Δ として $\mathcal{H}(X-K)$ 上の函数 f' を def. する。

$$\mathcal{V}(f) = \left\{ s \in \mathcal{H}(X-K) ; \liminf_{X-K \ni y \rightarrow x} s(y) \geq f'(x) \quad \forall x \in \delta(X-K) \right\}$$

$$\bar{H}^{X-K} f = \inf \mathcal{V}(f)$$

と置く。 $\bar{H}^{X-K} f$ は $X-K$ 上で調和的である。

Loeb により得られた結果

$G \subset X$ 開領域, $x_0 \in \delta G$ とする。 G に対する点 x_0 での barrier とは x_0 の開近傍と G の共通部分で定義された調和函数 $B \geq 0$ で $\lim_{G \ni x \rightarrow x_0} B = 0$ となるものを言う。

コンパクト集合 $K \neq \emptyset$ は 各 $x \in \partial K$ に対し x での $X-K$ に対する barrier が存在するとき 外から正則的 と

言う。すべてのコンパクト集合は外から正則的なコンパクト集合に含まれていることがわかる (Loeb)。 K を外から正則的, $f \in C(\partial K)$ なら

$$\lim_{X-K \ni y \rightarrow x} \bar{H}^{X-K} f(y) = f(x), \quad \forall x \in \partial K.$$

Minimal な full 調和構造を導入しよう。

$D \in \mathcal{D}$ に対し

$$\tilde{\mathcal{H}}_0(D) = \left\{ h \in \mathcal{H}(D) : \begin{array}{l} \exists \text{ 外から正則的コンパクト } K \\ X-K \subset D, \\ h = \bar{H}^{X-K} [h|_{\partial K}] \end{array} \right\}.$$

この $\tilde{\mathcal{H}} = \{ \tilde{\mathcal{H}}(D), D \in \mathcal{D} \}$ が

$$(*) \quad D, D' \in \mathcal{D}, D' \subset D \quad u \in \tilde{\mathcal{H}}_0(D) \Rightarrow u|_{D'} \in \tilde{\mathcal{H}}_0(D')$$

$$(**) \quad u \in \mathcal{H}(D), \exists K \text{ compact } \partial D \subset K,$$

$$u|_{D-K} \in \tilde{\mathcal{H}}_0(D-K) \Rightarrow u \in \tilde{\mathcal{H}}_0(D)$$

をみたすことはすぐわかる。また 上述より

(***) すべてのコンパクト集合に対し それを含むコンパクトで $\tilde{\mathcal{H}}_0$ -regular な補集合をもつようなものが存在することもある。ここに $D \in \mathcal{D}$ は $C(\partial D)$ の任意の関数 f が $\tilde{\mathcal{H}}_0(D)$ に属するような連続拡張をもち それを $\tilde{H}_0^D f$ とするなら $f \geq 0 \Rightarrow \tilde{H}_0^D f \geq 0$ がしたがうようなとき、そのとき $\tilde{\mathcal{H}}_0$ -regular と言う。

以上より $\tilde{\mathcal{H}}_0$ は full 調和構造である。

Lemma $D \in \mathfrak{D}$, A を外から regular なコンパクトで $\overline{X-A} \subset D$. $S \in \mathcal{S}_+(D)$ は

$$S \geq \tilde{H}^{X-A} S = \tilde{H}_0^{X-A} S \quad \text{on } X-A$$

をみたす。(註. $\psi(S|_{\partial A})$ の定義より)

B. Walsh により 一つの full harmonic 構造 $\tilde{\mathcal{H}}$ が与えられたとき (上記 (*) ~ (***) で $\tilde{\mathcal{H}}_0$ を $\tilde{\mathcal{H}}$ と書きなおした条件をもつ構造が与えられたとき) 外から regular なコンパクト集合はすべて その補集合を $\tilde{\mathcal{H}}$ -regular にする事が示された。そこで 次の定義を与える。

定義: 二つの full harmonic 構造 $\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathcal{H}}'$ に対し

$\tilde{\mathcal{H}} > \tilde{\mathcal{H}}' \Leftrightarrow \forall A$ 外から regular なコンパクト

$\forall f \in C_+(\partial A)$ に対し

$$\tilde{H}^{X-A} f \geq \tilde{H}'^{X-A} f \quad \text{on } X-A.$$

(ここにおいて $\tilde{H}^D f$ 等は先の $\tilde{H}_0^D f$ と同じ意味。)

この定義と上の Lemma より ただちに $\tilde{\mathcal{H}}_0$ が Minimal であることがわかった。

$1 \in \mathcal{S}_+(X)$ と positive potential の存在を仮定している。このため minimal full harmonic 構造 $\tilde{\mathcal{H}}_0$ は筆者の先の論文の結果をすべて適用できるようになっている。とくに

$\tilde{\mathcal{H}}_0(X) = \{0\}$, $\tilde{\mathcal{J}}(X) = \tilde{\mathcal{J}}_+(X) = \mathcal{J}_+(X)$, ここに
 $\tilde{\mathcal{J}}(X)$ は X 上の full superharm. 函数全体, かわかる. した
 かって $\exists$ submarkov resolvent (V_λ°) ,

$\mathcal{J}_+(X) = (V_\lambda^\circ)$ -excessive f.n.s 全体.
 かわかる.

この結果 系として V_λ° は Meyer により構成された
 resolvent と正に一致しているから その resolvent の 値
 域 が特性づけられた. すなわち $E_n^\circ = C(X) \cap \tilde{\mathcal{H}}_0(X - K_n)$,
 $E^\circ = \bigcup_n E_n^\circ$ とおくと

$$\overline{V_\lambda^\circ(B_b(X))} = \overline{E^\circ}$$

かわかった.

$E^\circ \supset C_c(X)$ だから 当然 $\lambda V_\lambda^\circ f(x) \rightarrow f(x)$ が
 $\forall f \in C_c(X)$ に対し X 上で一様に成り立つ. Meyer が得た
 V_λ° の regularity がこれである.

P. Loeb. Ann. Inst. Fourier 16 (1966)

B. Walsh. Inventiones math. 8 (1969)

P.A. Meyer. Ann. Inst. Fourier 13 (1963)