

Free Analog of Malliavin Analysis

水尾 勝 (Masaru Mizuo)

東北大学大学院・情報科学研究科

(Graduate School of Information Sciences, Tohoku University)

概要

semicircular system の生成する W^* 環 $\mathcal{M}$, すなわち free group factor 上に Sobolev 空間 W_n^p ($1 < p < \infty, n \in \mathbb{Z}$) を導入し、それらの共通部分として測度論的 C^∞ 環 S を定める時、この環は semicircular system の生成する C^* 環 $\mathcal{A}$ の中に実現できる。さらに S の相対空間として Schwartz distribution S' を定め、その表現定理を確定する。この S' の部分空間として $\mathcal{M}$ が自然に実現できる。これは Gaussian system の生成する環上に同様の構造を確立した Malliavin analysis に用いる超関数構造の free probability analog の一種である。さらにこの構造が free group factor 上の derivation の理論に適していることを示すために S 上の C^∞ な vector field が S 上連続な写像となっていることを示す。

1 準備

以下証明は全て省略し理論の構成をまとめる。詳しい証明および完全な参考文献は [4] を参照。まず後に必要な事実をまとめる。

$(\mathcal{M}, \tau)$ を W^* probability space, すなわち $\mathcal{M}$ は finite W^* 環, τ は faithful normal tracial state とする。 $\{s_i : i \in I\} \subset \mathcal{M}$ を semicircular system, すなわち I は添字集合, s_i ($i \in I$) はそれぞれ τ で測って semicircular 分布を持ち、互いに free independent な関係にあるものとする。今 $\mathcal{M}$ は $\{1\} \cup \{s_i : i \in I\}$ で生成されているとする。このとき、

$$(\mathcal{M}, \tau) \cong (\star_{i \in I} W^*(\{1, s_i\}), \star_{i \in I} \tau|_{W^*(\{1, s_i\})}) \cong (\mathcal{L}(\mathbb{F}_N), \langle \cdot, l_e, l_e \rangle).$$

ただし $\star$ は W^* free product, $\mathcal{L}(\mathbb{F}_N)$ は N 生成元の free group factor で $N = \text{card } I$, $\langle \cdot, l_e, l_e \rangle$ は free group の単位元が定める faithful normal tracial state. $\{1\} \cup \{s_i : i \in I\}$ が代数的に生成する $*$ -subalgebra を $\mathcal{P}$ とすると、faithful normal state による free product は代数的 free product の closer になることより $\mathcal{P} \cong \mathbb{C}\langle X_i : i \in I \rangle$ 。ただし $\mathbb{C}\langle X_i : i \in I \rangle$ は非可換多項式環でこの同型対応では s_i ($i \in I$) と不定元 X_i が対応する。 $T_n(X)$ を n 次 ($n \geq 0$) の第 2 種 Chebyshev 多項式 (ただし $T_0(X) = 1, T_1(X) = X$ および $T_{n+1}(X) \equiv XT_n(X) - T_{n-1}(X)$ ($n \geq 1$) で定まる) とするとき、

$$\underbrace{T_{i_1 i_1} \cdots i_1}_{m_1} \underbrace{i_2 i_2 \cdots i_2}_{m_2} \cdots \underbrace{i_n i_n \cdots i_n}_{m_n} \equiv T_{m_1}(s_{i_1}) T_{m_2}(s_{i_2}) \cdots T_{m_n}(s_{i_n})$$

$$(n \geq 0, i_j \in I (1 \leq j \leq n), m_j \geq 0 (1 \leq j \leq n))$$

とおく。ただし $T_0 \equiv 1$ とする。このとき $\{T_{i_1 i_2 \dots i_n} : n \geq 0, i_j \in I (1 \leq j \leq n)\}$ は $\mathcal{P}$ の linear basis となるが、 $L^2(\mathcal{M}, \tau)$ の CONS にもなる。線形空間 $\mathcal{P}_n \equiv \text{sp}\{T_{i_1 i_2 \dots i_n} : i_j \in I (1 \leq j \leq n)\}$ ($n \geq 0$) とするともちろん $\mathcal{P}_n$ ($n \geq 0$) は互いに直交する。また $L^2(\mathcal{M}, \tau)$ 上の線形作用素 L を $\text{dom } L = \mathcal{P}$, $L(x) = nx$ (for $x \in \mathcal{P}_n$) で定めると、 $-\bar{L}^{L^2(\mathcal{M}, \tau)}$ は明らかに selfadjoint で Ornstein-Uhlenbeck Laplacian とよばれている。以下 L 自身も Ornstein-Uhlenbeck Laplacian として引用する。さらに $L^2(\mathcal{M}, \tau)$ 上の contraction semigroup $\exp(-\bar{L}^{L^2(\mathcal{M}, \tau)}t)$ ($t \geq 0$) は $\mathcal{M} \subset L^2(\mathcal{M}, \tau)$ を global invariant にする。このとき $\exp(-\bar{L}^{L^2(\mathcal{M}, \tau)}t)|_{\mathcal{M}}$ ($t \geq 0$) は $\mathcal{M}$ 上 τ -preserving (normal) unital complete positive semigroup になり、Ornstein-Uhlenbeck semigroup と呼ばれるが、これは $\mathcal{M}$ の最も自然な拡散過程である。

2 Sobolev 空間 W_n^p ($1 < p < \infty, n \geq 0$) および C^∞ 環 $\mathcal{S}$ の導入

Definition 2.1 $x \in \mathcal{P}$ に対して

$$\|x\|_{W_n^p} \equiv \|x\|_{L^p(\mathcal{M}, \tau)} + \|L^{\frac{1}{2}}x\|_{L^p(\mathcal{M}, \tau)} + \dots + \|L^{\frac{n}{2}}x\|_{L^p(\mathcal{M}, \tau)}$$

を Sobolev W_n^p ($1 < p \leq \infty, n \geq 0$) norm とよぶ。

ただし $\|\cdot\|_{L^\infty(\mathcal{M}, \tau)}$ は $\mathcal{M}$ の C^* norm。また以下非可換 $L^p(\mathcal{M}, \tau)$ は単に L^p と記述することもある。

Definition 2.2 $\mathcal{P}$ の W_n^p norm ($1 < p \leq \infty, n \geq 0$) による抽象的完備化を Sobolev 空間 W_n^p ($1 < p < \infty, n \geq 0$) とよぶ。

このとき明らかに W_0^p ($1 < p < \infty$) は $L^p(\mathcal{M}, \tau)$ と同型になるが以下常にこの同型対応で両者を同一視する。 $1 < p < p' < \infty$ あるいは $0 \leq n < n'$ のとき $\mathcal{P}$ (with $W_n^{p'}$ norm) から $\mathcal{P}$ (with W_n^p norm) への恒等写像 $i_{p', p}^n$, あるいは $\mathcal{P}$ (with $W_n^{p'}$ norm) から $\mathcal{P}$ (with W_n^p norm) への恒等写像 $i_{n, n'}^p$ は連続なので $W_n^{p'}$ から W_n^p , あるいは $W_n^{p'}$ から W_n^p への写像 $i_{p', p}^n$ および $i_{n, n'}^p$ に拡張される。このとき、

Proposition 2.3 上述の写像は常に injective である。よって全ての Sobolev 空間 W_n^p ($1 < p < \infty, n \geq 0$) は $L^1(\mathcal{M}, \tau)$ の部分空間と見なせる。

したがって次の可換図式を得る。ただし $\Subset$ は連続な埋蔵を示すために使う。

$$\begin{array}{ccccccc}
 L^\infty \equiv \mathcal{M} & \Subset & W_0^p = L^p & \Subset & W_0^2 = L^2 & \Subset & W_0^p = L^p & \Subset & L^1 \\
 & & (2 < p < \infty) & & & & (1 < p < 2) & & \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\
 & & W_1^p & \Subset & W_1^2 & \Subset & W_1^p & & \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\
 & & W_2^p & \Subset & W_2^2 & \Subset & W_2^p & & \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & &
 \end{array}$$

$n \geq 0$ に対し Sobolev 空間 W_n^p ($1 < p < \infty$) の projective limit を $W_n^\cap$ とし $W_n^\cap$ ($n \geq 0$) の projective limit を S とする。このとき、

Proposition 2.4 $W_n^\cap$ ($n \geq 0$) は Frechet $*$ -algebra になる。すなわち $W_n^\cap$ ($n \geq 0$) の位相は完備局所凸距離位相で、 $*$ -operation は連続、および掛け算は両連続になる。したがって S も Frechet $*$ -algebra になる。

この Proposition より S のことを C^∞ 環とよぶ。なお Proposition 2.3 および 2.4 の証明は次章 Proposition 3.5 を用いる。さらに、

Proposition 2.5 (Sobolev の補題) $C \equiv (\sum_{n \geq 1} (\frac{n+1}{n^2})^2)^{\frac{1}{2}}$ とおく。このとき $x \in \mathcal{P}$ に対して $\|x\|_{W_n^p} \leq C \|x\|_{W_{n+n'}^2}$, ($n \geq 0, n' \geq 4, 1 < p \leq \infty$)。したがって $W_{n+n'}^2 \in W_n^p$ ($n \geq 0, n' \geq 4, 1 < p < \infty$)。

$\mathcal{A} \equiv C^*(\{1\} \cup \{s_i : i \in I\})$ とする。このとき定義より $\mathcal{A}$ は W_0^∞ と同型。Proposition 2.5 より以下の 3 つの Corollary を得る。

Corollary 2.6 (Sobolev の埋蔵定理) W_4^2 は $\mathcal{A}$ に連続に埋蔵される。すなわち $W_4^2 \in \mathcal{A}$ 。

Corollary 2.7 C^∞ 環 S の位相は W_n^2 ($n \geq 0$) norm 族で生成される。

Corollary 2.8 C^∞ 環 S は nuclear space ではない。

3 Weak 微分 D

$I^{(2)} \equiv I \cup \text{copy of } I$, $\mathcal{M}^{(2)} \equiv W^*(\{1\} \cup \{s_i : i \in I^{(2)}\})$ とし自然に $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^{(2)}$ を部分環とし、 $\mathcal{M}^{(2)}$ を $\mathcal{M}$ あるいは $\mathcal{P}$ の bimodule と見なす。また $\{s_i : i \in I^{(2)}\}$ が代数的に生成する $*$ -subalgebra を $\mathcal{P}^{(2)}$ および $\mathcal{M}^{(2)}$ 上の Ornstein-Uhlenbeck Laplacian を $L^{(2)}$, tracial normal state を $\tau^{(2)}$ また C^∞ 環を $\mathcal{S}^{(2)}$ とする。また $i \in I$ に対して $i + N \equiv \text{copy of } i \in \text{copy of } I$ とする。このとき、

Definition 3.1 $\mathcal{M}$ から $\mathcal{P}$ bimodule $\mathcal{M}^{(2)}$ への derivation D で $\text{dom } D = \mathcal{P}$ かつ $D(s_i) = s_{i+N}$ ($i \in I$) で定まるものを weak derivation とよぶ。

weak derivation D の $\text{dom } D = \mathcal{P}$ は非可換多項式環と同型なので Definition 3.1 は well-defined である。このとき、

Lemma 3.2 $D(T_{i_1 i_2 \dots i_n}) = \sum_{k=1}^n T_{i_1 i_2 \dots i_k + N \dots i_n}$ ($n \geq 0, i_j \in I (1 \leq j \leq n)$)

$i \in \text{copy of } I$ に対して $i - N \equiv \text{original of } i \in I$ とする。このとき線形写像 $D_{\text{dual}} : \mathcal{P}^{(2)} \rightarrow \mathcal{P}$ を $n \geq 0, i_j \in I^{(2)} (1 \leq j \leq n)$ に対して、

$$D_{\text{dual}}(T_{i_1 i_2 \dots i_n}) = \begin{cases} T_{i_1 i_2 \dots i_j - N \dots i_n} & \text{if } \exists j \ i_j \in \text{copy of } I \text{ and } i_k \in I (k \neq j), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定めると、

Lemma 3.3 $x \in \mathcal{P}$, $y \in \mathcal{P}^{(2)}$ とする。そのとき、

$$\tau^{(2)}(y^* D(x)) = \tau(D_{dual}(y^*)x).$$

したがって D は $L^p(\mathcal{M}, \tau)$ から $L^p(\mathcal{M}^{(2)}, \tau^{(2)})$ ($1 < p < \infty$) への写像とみて closable である。また、

Corollary 3.4 $x \in \mathcal{P}$ にたいして、

$$D_{dual}D(x) = L(x),$$

$$DL(x) = L^{(2)}D(x).$$

したがって $DL^{-\frac{1}{2}}$ は $\bigoplus_{i=1}^{\infty} P_i$ 上 $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{M}, \tau)}$, $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{M}^{(2)}, \tau^{(2)})}$ isometry になる。ただし $L^{-\frac{1}{2}}$ の定義は L の定義から明らかであるが $\bar{L}^{L^2(\mathcal{M}, \tau)}$ の functional calculus だともよい。これと同様のことが L^p の場合でも成り立つ。

Proposition 3.5 $1 < p < \infty$ のとき、 $DL^{-\frac{1}{2}} : L^p(\mathcal{M}, \tau) \rightarrow L^p(\mathcal{M}^{(2)}, \tau^{(2)})$ は $\bigoplus_{i=1}^{\infty} P_i$ 上、上にも下にも有界。

これより以下の Corollary がすぐに従う。

Corollary 3.6 $\mathcal{P}$ 上 $\|L^{\frac{n}{2}} \cdot\|_{L^p(\mathcal{M}, \tau)} \sim \|(L^{(2)})^{\frac{n-1}{2}} D \cdot\|_{L^p(\mathcal{M}^{(2)}, \tau^{(2)})}$ ($1 < p < \infty, n \geq 1$)。

Corollary 3.7 $D : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}^{(2)}$ は連続。

Corollary 3.8 $x \in \mathcal{P}$ にたいして、 $\|x\|_{W_1^p} \sim \|x\|_{L^p(\mathcal{M}, \tau)} + \|D(x)\|_{L^p(\mathcal{M}^{(2)}, \tau^{(2)})}$ ($1 < p < \infty$) ($\bar{D}^{L^p}$ の graph norm)

同様に $I^{(3)} \equiv I^{(2)} \cup \text{copy of } I^{(2)}, I^{(4)}, \dots, \mathcal{M}^{(3)}, \mathcal{M}^{(4)}, \dots, D^{(2)}, D^{(3)}, \dots$ と定義し、 $\mathcal{M}^{(1)} \equiv \mathcal{M}, D^{(1)} \equiv D, \dots$ とおく。上と同じ議論を繰り返すことで最終的に以下を得る。

Proposition 3.9 $1 < p < \infty, n \geq 1$ とする。 $x \in \mathcal{P}$ に対して $\|x\|_{W_n^p}$ と $\|x\|_{L^p(\mathcal{M}^{(1)}, \tau^{(1)})} + \|D^{(1)}(x)\|_{L^p(\mathcal{M}^{(2)}, \tau^{(2)})} + \dots + \|D^{(n)}D^{(n-1)} \dots D^{(1)}(x)\|_{L^p(\mathcal{M}^{(n+1)}, \tau^{(n+1)})}$ は同値。さらに線形写像 $D^{(n+1)}D^{(n)}D^{(n-1)} \dots D^{(1)} : \mathcal{P}^{(1)}$ (with $\|\cdot\|_{L^p(\mathcal{M}^{(1)}, \tau^{(1)})} + \|D^{(1)}(\cdot)\|_{L^p(\mathcal{M}^{(2)}, \tau^{(2)})} + \dots + \|D^{(n)}D^{(n-1)} \dots D^{(1)}(\cdot)\|_{L^p(\mathcal{M}^{(n+1)}, \tau^{(n+1)})}$ norm) $\rightarrow \mathcal{P}^{(n+2)}$ (with $\|\cdot\|_{L^p(\mathcal{M}^{(n+2)}, \tau^{(n+2)})}$ norm) は closable。

4 Schwartz Distribution $\mathcal{S}'$

Definition 4.1 $\mathcal{S}$ 上の連続線形汎関数の全体を Schwartz distribution $\mathcal{S}'$ とよぶ。 $\mathcal{S}'$ 上の位相は $\mathcal{S}$ の汎弱位相を考える。

W_n^p ($1 < p < \infty, n \geq 0$) の相対空間を $\hat{W}_{-n}^q$ ($1 < q < \infty, n \geq 0$) と書くことにする。ただし以下 q は p の共役指数として用いる。また記号 $(\)'$ は常に dual のためにもちいる。 $1 < p < p' < \infty$ あるいは $0 \leq n < n'$ のとき $\bar{t}_{p',p}^{n'}$ あるいは $\bar{t}_{n',n}^p$ は dense な値域を持つ。したがってその相対写像 $\bar{t}_{q,q'}^{-n} \equiv (\bar{t}_{p,p}^n)' : \hat{W}_{-n}^q \rightarrow \hat{W}_{-n}^{q'}$ あるいは $\bar{t}_{-n,-n'}^q \equiv (\bar{t}_{n',n}^p)' : \hat{W}_{-n}^q \rightarrow \hat{W}_{-n'}^{q'}$ は injective になる。このとき $1 < q < q' < \infty$ かつ $0 \leq n < n'$ ならば、

$$\begin{aligned} \bar{t}_{q,q'}^{-n'} \bar{t}_{-n,-n'}^q &= (\bar{t}_{p',p}^{n'})' (\bar{t}_{n',n}^p)' \\ &= (\bar{t}_{n',n}^p \bar{t}_{p',p}^{n'})' \\ &= (\bar{t}_{p,p}^n \bar{t}_{n',n}^p)' \\ &= \bar{t}_{-n,-n'}^q \bar{t}_{q,q'}^{-n} \end{aligned}$$

したがって次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hat{W}_{-2}^q & \subseteq & \hat{W}_{-2}^2 & \subseteq & \hat{W}_{-2}^q \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \hat{W}_{-1}^q & \subseteq & \hat{W}_{-1}^2 & \subseteq & \hat{W}_{-1}^p \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \hat{W}_{-0}^q & \subseteq & \hat{W}_{-0}^2 & \subseteq & \hat{W}_{-0}^p \\ (2 < q < \infty) & & & & (1 < q < 2) \end{array}$$

このとき $\mathcal{S}' = \cup_{1 < q < \infty, n \geq 0} \hat{W}_{-n}^q$ であるが、Corollary 2.7 より、

$$\begin{aligned} \mathcal{S}' &= \cup_{n=0}^{\infty} \{W_n^2 \text{ norm continuous linear function on } \mathcal{S}\} \text{ (inductive limit)} \\ &= \text{inductive } \lim_{n \geq 0} \hat{W}_{-n}^2 \end{aligned}$$

となる。 $L^p(\mathcal{M}, \tau)$ ($1 < p < \infty$) の duality より $W_0^p = L^p(\mathcal{M}, \tau)$ ($1 < p < \infty$) と $\hat{W}_{-0}^p = (W_0^q)' = (L^q(\mathcal{M}, \tau))'$ は同型であるが同型対応 $\lambda_p : W_0^p \rightarrow \hat{W}_{-0}^p$ ($1 < p < \infty$) を次のように定める。 $x \in W_0^p = L^p(\mathcal{M}, \tau)$ のとき

$$\lambda_p(x) = -\tau(x \cdot) \in \hat{W}_{-0}^p = (W_0^q)' = (L^q(\mathcal{M}, \tau))'$$

これにより最終的に次の可換図式を得る。なお以下 $\vdots$ の記号は以下省略する。この図式のように $\mathcal{M}$ および $\mathcal{S}$ は $\mathcal{S}'$ の部分空間と見なせる。

S'

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& W_{-2}^p & \in & W_{-2}^2 & \in & W_{-2}^p & \\
& \cup & & \cup & & \cup & \\
& W_{-1}^p & \in & W_{-1}^2 & \in & W_{-1}^p & \\
& \cup & & \cup & & \cup & \\
\mathcal{M} & \in W_0^\cap & \in & W_0^p = L^p & \in & W_0^2 = L^2 & \in W_0^p = L^p \in L^1 \\
& & & (2 < p < \infty) & & & (1 < p < 2) \\
& \cup & & \cup & & \cup & \cup \\
W_1^\cap & \in & W_1^p & \in & W_1^2 & \in & W_1^p \\
& \cup & & \cup & & \cup & \cup \\
W_2^\cap & \in & W_2^p & \in & W_2^2 & \in & W_2^p \\
& \cup & & \cup & & \cup & \cup \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& \cup & & & & & \\
& S & & & & &
\end{array} \tag{1}$$

直積線形空間 $\otimes_{n=0}^\infty \bar{\mathcal{P}}_n^{L^2(\mathcal{M}, \tau)}$ (product topology) を考える。ここで、 $H_n^2 \equiv \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in \otimes_{n=0}^\infty \bar{\mathcal{P}}_n^{L^2(\mathcal{M}, \tau)} : \sum_{i=0}^\infty (1+i)^{\frac{n}{2}} \|x_i\|_{L^2(\mathcal{M}, \tau)}^2 < \infty\}$ ($n \in \mathbb{Z}$) とするとき明らかに $n < n'$ のとき $H_{n'}^2$ は H_n^2 の部分空間となる。このときの埋め込み写像を $\kappa_{n', n}$ とする。また図式 (1) における $W_{n'}^2 \in W_n^2$ の埋め込み写像を $\iota_{n', n}$ とする。このとき、

Proposition 4.2 (S' の表現定理) $n < n'$ のとき $\kappa_{n', n} : H_{n'}^2 \rightarrow H_n^2$ と $\iota_{n', n} : W_{n'}^2 \rightarrow W_n^2$ は同型。したがって S' は $\otimes_{n=0}^\infty \bar{\mathcal{P}}_n^{L^2(\mathcal{M}, \tau)}$ の緩増加数列の空間 $\{x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in \otimes_{n=0}^\infty \bar{\mathcal{P}}_n^{L^2(\mathcal{M}, \tau)} : \exists n \in \mathbb{Z} \sum_{i=0}^\infty (1+i)^{\frac{n}{2}} \|x_i\|_{L^2(\mathcal{M}, \tau)}^2 < \infty\}$ 、 S は $\otimes_{n=0}^\infty \bar{\mathcal{P}}_n^{L^2(\mathcal{M}, \tau)}$ の急減少数列の空間 $\{x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in \otimes_{n=0}^\infty \bar{\mathcal{P}}_n^{L^2(\mathcal{M}, \tau)} : \forall n \in \mathbb{N} \sum_{i=0}^\infty (1+i)^{\frac{n}{2}} \|x_i\|_{L^2(\mathcal{M}, \tau)}^2 < \infty\}$ と同型。さらにこの同一視で $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in \otimes_{n=0}^\infty \bar{\mathcal{P}}_n^{L^2(\mathcal{M}, \tau)} \in S'$ のとき $\tilde{x}_n \equiv \sum_{i=0}^n x_i$ は $n \rightarrow \infty$ で x に収束する。したがって $\mathcal{P}$ は S' で dense。

5 C^∞ Vector Field

ここでは $N = \text{card } I < \infty$ とする。 $\mathcal{P}$ は非可換多項式環と同型なので $k = (k_1, k_1, \dots, k_N) \in \oplus_N S$ に対して $\text{dom } \delta_k = \mathcal{P}$, $\delta_k(s_i) = k_i$ ($i \in I$) となる S 上の derivation δ_k は一意に存在する。この形の S 上の derivation を C^∞ vector field とよぶ。したがって C^∞ vector field の全体が作る線形空間と $\oplus_N S$ は同型。一方 $\{T_{i_1 i_2 \dots i_n} (n \geq 0, i_j \in I (1 \leq j \leq n)) : \exists 1 \leq j \leq n \ i_j \in \text{copy of } I \text{ and } i_k \in I (k \neq j)\} \subset S^{(2)}$ が生成する線形空間 $\mathcal{D}$ は $\mathcal{P}$ subbimodule となるが、 $\mathcal{P}$ subbimodule $\mathcal{D}$ から $\mathcal{P}$ bimodule S へ

$m_k(T_{i+N}) = k_i$ ($i \in I$) の条件で bimodule map m_k が一意に定まり、 $\delta_k = m_k D$ となる。
すなわち $\mathcal{P}$ subbimodule $\mathcal{D}$ は $\mathcal{P}$ の普遍微分加群である。このとき、

Proposition 5.1 $m_k : \mathcal{D}$ (with $S^{(2)}$ topology) $\rightarrow S$ (with S topology) は連続。したがって C^∞ vector field δ_k は S 上連続。

したがって $(\delta_k)' : S' \rightarrow S'$ が定義でき連続写像となるが、

Proposition 5.2 δ_k が τ -preserving ならば、 $(\delta_k)'|_{\mathcal{P}} = \delta_k|_{\mathcal{P}}$

すなわち δ_k は S' 上に連続拡張できる。

参考文献

- [1] M. Bożejko, Ultracontractivity and Strong Sobolev Inequality for q -Ornstein-Uhlenbeck Semigroup ($-1 < q < 1$), *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, Vol. 2, No. 2(1999), 203-220.
- [2] F. Hiai and D. Petz, *The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol.77, Amer. Math. Soc., 2000.
- [3] F. Lust-Piquard, Riesz Transforms on Deformed Fock Spaces, *Comm. Math. Phys.*, **205**(1999), 519-549.
- [4] M. Mizuo, *Noncommutative Sobolev Spaces, C^∞ Algebra and Schwartz Distribution Associated with Operator Algebra Generated by Semicircular System*, preprint.
- [5] D. Nualart, *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Springer-Verlag, 1995.