

サブスライス $\mathcal{Q}_{3,n}$ 上の strongly independent な中間論理

東京理科大学 増田 勲

(Isao Masuda)

中間論理は、スライス $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3, \dots, \mathcal{Q}_\omega$ に分けられている (細井 [1])。そして $\mathcal{Q}_3$ の中間論理は、さらにサブスライス $\mathcal{Q}_{3,1}, \mathcal{Q}_{3,2}, \dots, \mathcal{Q}_{3,\omega}$ に分けられている ([2])。ここでは $\mathcal{Q}_3$ の各サブスライス $\mathcal{Q}_{3,n}$ に非可算無限個の中間論理が存在することを、Jankov ([3]) の方法を使って証明する。Kuznecov ([4]) によると $\mathcal{Q}_3$ に非可算無限個の中間論理が存在するというが、その証明は印刷されていない。

定義 1. P O S モデル (小野 [5]) $S_{3,i}$ を以下のように定める。

$$S_{3,1} = 3\alpha,$$

$$S_{3,i+1} = \alpha \uparrow (2\alpha, \alpha^i) \text{ for } i=1, 2, \dots,$$

$$S_{3,\omega} = (S_{3,i})_{i=1, 2, \dots}$$

ただし、 α とは一点からなる P O S モデルのことである。

サブスライス $\mathcal{Q}_{3,n}$ は次のように定義されている ([2])。

定義 2. $\mathcal{Q}_{3,i} = \{L \in \mathcal{Q}_3 \mid L(S_{3,i}) \supseteq L, \text{ かつ } L(S_{3,i+1}) \supseteq L\}$

$$\mathcal{Q}_{3,\omega} = \{L \in \mathcal{Q}_3 \mid L(S_{3,i}) \supseteq L \text{ for } i=1, 2, \dots\}.$$

定義 3. 次のように公理をきめる。

$$P_{3,1} = N_{10}(a),$$

$$P_{3,n} = \left(\bigvee_{1 \leq i \leq n} N_{10}(a_i) \right) \vee \left(\neg \neg \left(\bigvee_{1 \leq i \leq n} \neg a_i \right) \right)$$

$$\bigvee_{1 \leq i \leq n} \left(\bigvee_{1 \leq j \leq n} \neg \neg \left(\neg a_i \vee \left(\bigvee_{j \neq i} a_j \right) \right) \right) \quad (1 < n < \omega).$$

$$P_{3,\omega} = a \supset a,$$

$$A_n = \bigvee_{\substack{1 \leq i, j, k \leq n+2 \\ i \neq j, i \neq k, j \neq k}} \left(((a_i \supset Z(a_j, a_k)) \supset \left(\bigvee_{1 \leq l \leq n+2} a_l \right)) \right)$$

$$\supset \left(\bigvee_{1 \leq l \leq n+2} a_l \right).$$

POS モデル M_n を次のように定義する

$$\text{定義 4. } 1) M_n = \bigcup_{1 \leq i \leq n+2} \{v_i, w_i\} \cup \{u_0\}$$

ただし、順序関係は次の 2), 3) をみたす最小の関係とする。

$$2) \text{ おのおのの } i \text{ に対して、 } u_0 < v_i$$

3) 異なる任意の i, j に対して、 $v_i < w_j$

補題 5. $M_n \in Q_{3,1} \quad (n=1, 2, \dots)$.

補題 6. $A \notin L(M_n) \quad (n=1, 2, \dots)$.

証明 POSモデル M_n に対して、付値 W を以下のように定義する。

1) 異なる任意の i, j に対して、 $W(a_i, w_i) = f$ かつ $W(a_j, w_i) = t$

2) 異なる任意の i, j に対して、 $W(a_i, v_i) = t$ かつ $W(a_j, v_i) = f$

このとき、 $W(A, u_n) = f$ であることがわかる。

補題 7. もし $m \neq n$ ならば $A \in L(M_m) \quad (m=1, 2, \dots, n=1, 2, \dots)$ である。

$L(M)$ を POSモデル M で valid な論理式の集合とする。

補題 8. $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_{k-1} \wedge A_{k+1} \wedge \dots \wedge A_n \in L(M_k) \quad (n < \omega)$.

証明 補題 7 から、この補題を得る。

補題 9. $A \notin LJ + A_1 + A_2 + \dots + A_{k-1} + A_{k+1} + \dots + A_n$.

証明 補題 8 から、 $LJ + A_1 + A_2 + \dots + A_{k-1} + A_{k+1} + \dots + A_n \subseteq L(M_k)$ であり、

補題 6 から、 $A \notin L(M_k)$ である。故に $A \notin LJ + A_1 + A_2 + \dots + A_{k-1} + A_{k+1}$

$+ \cdots + A_n$ となる。

補題 10. $A_k \notin LJ + A_1 + A_2 + \cdots + A_{k-1} + A_{k+1} + \cdots + A_n + \cdots$.

証明 $A_k \in LJ + A_1 + A_2 + \cdots + A_{k-1} + A_{k+1} + \cdots + A_n + \cdots$ であると仮定する。

このとき、compactness theorem によって、ある m が存在して $A_k \in LJ + A_1$

$+ A_2 + \cdots + A_{k-1} + A_{k+1} + \cdots + A_m$ となる。これは、補題 9 に矛盾する。

補題 11. $P_3 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_{k-1} \wedge A_{k+1} \wedge \cdots \wedge A_n \in L(M_k)$.

証明 補題 8 と $h(M_k) = 3$ ということから、補題を得る。

したがって、補題 9 と同様にして、つぎの補題を得る。

補題 12. $P_3 \wedge A_k \notin LJ + P_3 + A_1 + \cdots + A_{k-1} + A_{k+1} + \cdots$.

補題 13. $P_3 \wedge P_{3,m} \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_{k-1} \wedge A_{k+1} \wedge \cdots \wedge A_n \in L(M_k)$.

証明 補題 8 と $P_{3,m} \in L(M_k)$ ということから、補題を得る。

したがって、補題 9 と同様にして、つぎの補題を得る。

補題 14. $P_3 \wedge P_{3,m} \wedge A_k \notin LJ + P_3 + P_{3,m} + A_1 + \cdots + A_{k-1} + A_{k+1} + \cdots$.

補題 15. $LJ + A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots \in \mathcal{Q}_\omega$.

証明 任意の A_i に対して、 $A_i \in L(S_\omega)$ ということから、補題を得る。

$$\text{系 16. } LJ + P_3 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots \in \mathcal{Q}_3.$$

$$\text{補題 17. } LJ + P_3 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots \in \mathcal{Q}_{3, \omega}.$$

証明 任意の $S_{3, j}$ に対して、 $A_i \in L(S_{3, j})$ である。故に、どんな A_i に対しても $A_i \in L(S_{3, \omega})$ となる。また、任意の $S_{3, j}$ に対して、 $P_3 \in L(S_{3, j})$ である。したがって、補題 15 から、補題を得る。

系 18. $\{i_1, i_2, i_3, \dots\}$ は自然数の集合の部分集合とする。このとき、

$$LJ + P_3 + A_{i_1} + A_{i_2} + \cdots + A_{i_n} + \cdots \in \mathcal{Q}_{3, \omega}$$

が成り立つ。

系 19. $\{i_1, i_2, i_3, \dots\}$ は自然数の集合の部分集合とする。このとき、

$$LJ + P_3 + P_{3, n} + A_{i_1} + A_{i_2} + \cdots + A_{i_n} + \cdots \in \mathcal{Q}_{3, n}$$

が成り立つ。

注意 系 18 と 19 において、異なる部分集合から構成される論理は必ず異なる。

定理 20. スライス 3 の各サブスライス $\mathcal{Q}_{3,n}$ ($1 \leq n \leq \omega$) には、非可算無限個の中間論理が存在する。

参考文献

- [1] T. Hosoi: On intermediate logics I, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. I, 14 (1967), 293-312.
- [2] 細井勉・増田勲: スライス 3 の中間論理の分類, 数学基礎論分科会講演アブストラクト (日本数学会平成 3 年度年会 (慶応大学)) 5-6.
- [3] V. A. Jankov: Constructing a sequence of strongly independent superintuitionistic propositional calculi, Soviet Math. Dokl., 9(1968), 806-807.
- [4] A. V. Kuznecov: On Superintuitionistic Logics, Proceedings of the International Congress of Mathematicians Vancouver, 1974, 243-249.
- [5] H. Ono: Kripke models and intermediate logics, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 6 (1970/71), 461-476.