

二階双曲型偏微分方程式 に対する混合問題について

京大 理学部 宮武 貞夫

§1 序

ここでは、二階双曲型偏微分方程式の混合問題が L^2 -well posed であるための必要十分条件を、定数係数の場合に考えよう。これまでに単独高階偏微分方程式の混合問題の L^2 -well posed については、R-Agemi-T. Shirota [1], R. Sakamoto [3] によって扱われているが、ここでは二階の場合に限って、より具体的な characterization を行う。もちろん境界作用素の係数は、複素数の範囲で考える。その理由は real 係数の場合には、変数係数の範囲でも L^2 -well-posed の問題は、セミグループ的 (発展方程式的) な解の存在定理まで求めて解決されているのに対し、複素変数係数に於ては、直接には、同程度の解決が困難であると思われるからである。その解決にここで求めた具体的な定数係数の場合の特微付けが役立つのである。更に付加的な成果として、混合問

類と classical な数学の定理を道具 (特に 函数論, 代数等) との有機的な結合の有様が露呈され, 又その時, Cauchy 問題の L^2 -well-posed の議論 (Seray, Gårding によってなされる) とは, そもそも何であつたのかという事も認識されるであらう。議論の方向は専門化だけでなく, 普遍化を理想とす。

$$(P) \begin{cases} Pu = f(x, y, t) & x > 0, \quad (t, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1} = \{(t, y) \mid t > 0, y \in \mathbb{R}^n\} \\ B u|_{x=0} = g(y, t) & x = 0, \quad " \\ D_t^j u|_{t=0} = u_j(x, y) & t = 0, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

は半空間の混合問題を考える。P は、強双曲型 (t 方向に) であり、後の与る境界条件が一つである条件を仮定する。B も x 方向に non-characteristic の形を考える。この混合問題の L^2 -well posedness は

$$(P) \begin{cases} Pu = f & , x > 0 \quad (t, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \\ B u|_{x=0} = g & , x = 0 \quad (t, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \end{cases}$$

なる形の境界値問題が、次の様な評価が成り立つ時、 L^2 -well posed と呼ばう。特に $g \equiv 0$ の場合に於て。

$$(1.1) \quad \gamma \|u\|_{1,\gamma}^2 \leq C \frac{1}{\gamma} \|f\|_{0,\gamma}^2, \quad \exists C > 0, \quad \forall \gamma > 0.$$

実際, real boundary 係数の場合には, この評価と発展方程式的評価 (即ち 3 次元双曲型方程式の初期値問題と対応する

$$\sum_{j=0}^1 \|D_t^j u\|_{1-j}^2 + \sum_{j=0}^1 \left\langle \Lambda_{y,1}^{-\frac{1}{2}} D_x^j u(s) \right\rangle_{1-j}^2 ds$$

$$\leq \text{Const.} \left\{ \sum \|u_j\|_{1-j}^2 + \int_0^T \|f(s)\|_0^2 ds + \int_0^T \left\langle \Lambda_{y,1}^{-\frac{1}{2}} (\partial_y) u(s) \right\rangle_0^2 ds \right\}$$

for $0 < t \leq T$. Const. depends on T .

の評価) と同等である事が示されている ([2]). ここで, ノルムは

$$\|u\|_{k,\gamma}^2 = \sum_{k+i+j+|\alpha|=k} \left(\iiint |\gamma^k D_x^i D_y^j D_y^\alpha e^{-\gamma x} u|^2 dt dy dx \right)$$

$\|\cdot\|_k$ は空間方向の内積ノルム

$\langle \cdot \rangle_k$ は空間方向の境界上のノルム

$\Lambda_{y,1}^{\frac{1}{2}}$ は境界上 (空間方向のみ) Δ_y (ラプラシアン) + 1 の $\frac{1}{4}$ 乗

§2 ロバチンスキ条件へ

$g \equiv 0$ の時の $(P)_0$ は Fourier-Laplace 変換 $(P)_0$ の両辺に $e^{-\gamma t}$, $\gamma > 0$ をかけて t, y について Fourier 変換すると.

$$(P_0)' \begin{cases} P(D_x, \eta, \tau) \hat{u}(x, \eta, \tau) = \hat{f}(x, \eta, \tau) & , \tau = \sigma - i\delta, \delta > 0 \\ B(D_x, \eta, \tau) \hat{u}(x, \eta, \tau) \Big|_{x=0} \equiv 0 & (\text{かつ } u(\infty, \eta, \tau) = 0) \end{cases}$$

はる parameter を含む常微分方程式の解を次の如く表示しよう。

$$(2.1) \quad \hat{u}(x) = \int_0^\infty G(x, x'; \eta, \tau) \hat{f}(x') dx' \equiv G \hat{f}, \quad (\hat{u}(x) = \hat{u}(x, \eta, \tau) \text{ 等})$$

$$\text{更に} \quad G = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{i(x-x')\xi}}{P(\xi, \eta, \tau)} d\xi + G_c \equiv G_0 + G_c$$

と書こう。 $G_0 \hat{f} \equiv \hat{u}_0$ に対応する項は $x < 0$ まで考えた時の Cauchy 問題に対応しており、当然 (1.1) に於て u と u_0 におきかえた式は成り立っている (known fact)。それ故に (1.1) と

(1.1) に於て $\hat{u}$ を $G_c \hat{f}$ に置きかえたものとす同値である。 G_c は留数計算の方法で R. Sakamoto [3] に計算されてあり。

$$(2.2) \quad G_c = -B(\xi_+)^{-1} B(\xi_-) (\xi_- - \xi_+)^{-1} e^{ix\xi_+} e^{ix'\xi_-}$$

(ここで $B(\xi_+) = B(\xi_+, \eta, \tau)$ であり、 ξ_+ は $P(\xi_+, \eta, \tau) = 0$ 。 $\text{Im } \xi_+ > 0$ for $\delta > 0$ 。

今 次の (2.3) が成り立つ事に注意する

$$(2.3) \quad B(\xi_+)^{-1} B(\xi_-) = 1 + (\xi_- - \xi_+) B(\xi_+)^{-1}$$

すると $\gamma G_c(x, x', \eta, \tau)$ は $\Sigma = \{(\eta, \sigma, \delta), \delta \geq 0, |\eta|^2 + \sigma^2 + \delta^2 = 1\}$

上で連続である事加すぐ確かめられる。それ故、次式と

$$\gamma \|u_c\|_{1,\gamma}^2 \leq \frac{C}{\gamma} \|f\|_{0,\gamma}^2 \quad (\hat{u}_c = G_c \hat{f})$$

$$(2.4) \quad \|G_c\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \leq \frac{\text{Const.}}{\gamma} \quad \text{for all } (\gamma, \alpha, \gamma) \in \Sigma$$

との同等性が localise して確かめられる。これは R. Agemi - T. Pflinger [1] で述べられた事柄である。さて更に G_c の形 (rank 1) に注意すると

$$\|G_c\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} = \|G_c\|_{L^2(\alpha, \alpha')} \quad \text{かわかるから} \quad (2.4) \text{より} (2.3) \text{を得て}$$

$$(2.5) \quad \left| \frac{1}{(\beta_+ - \beta_-)} - \frac{1}{B(\beta_+)} \right| \left\{ \frac{1}{|\ln \beta_+| |\ln \beta_-|} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\text{Const.}}{\gamma}$$

が得られる。けれども上式はより簡単になるのである。即ち

$$(2.6) \quad \frac{1}{|\beta_+ - \beta_-|} \left\{ \frac{1}{|\ln \beta_+| |\ln \beta_-|} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\text{Const.}}{\gamma}$$

が双曲性と同様にして簡単に証明できる (ここでは略す)。から (2.5) は

$$(2.7) \quad \exists (\text{positive constant}), \gamma \leq |\ln \beta_+|^{\frac{1}{2}} |\ln \beta_-|^{\frac{1}{2}} |B(\beta_+)| \quad \text{on } \Sigma$$

となる。即ち (1.1) と (2.7) は同値である。この式は単にロバチンスキ - determinant $|B(\beta_+)|$ のみならず β_+, β_- の虚部も併せて考

える必要がある事を意味する。即ち ellipticity と関連する。次に (2.7) を考察する。

§3. 具体的表現 (波動方程式の場合).

$$\begin{cases} P = D_x^2 - D_t^2 + \sum_{j=1}^n D_{y_j}^2 \\ B = D_x - c D_t + \sum_{j=1}^n b_j D_{y_j} \end{cases}$$

を考えよう. (2.7) より 次の事柄がわかる.

$$(3.1) \quad \begin{cases} (1) \quad \gamma > 0 \text{ ならば } |B(z_+)| \neq 0. \\ (2) \quad \{(0, \eta), \eta^2 - 1/\eta^2 > 0\} \text{ から } \gamma = 0 \text{ ならば } |B(z_+)| \neq 0 \\ (3) \quad \{(0, \eta), \eta^2 - 1/\eta^2 < 0\} \text{ から } \gamma = 0 \text{ ならば } |B(z_+)| = 0 \text{ となる.} \end{cases}$$

けれども最も複雑な所は, $\eta^2 - 1/\eta^2$ の近傍であり $\gamma = 0$ である. (2.7) を直接考えて処理する. 即ち適切な変換を導入する. 今

$$(3.2) \quad B(z_+) = \sqrt{\tau^2 - 1/\eta^2} + \sum b_j \eta_j - c\tau = 0$$

$$(1.e). \quad \sqrt{\quad} \text{ は } \operatorname{Im} \sqrt{\quad} > 0 \text{ となる } \gamma > 0 \text{ の根}$$

を考えよう. 同次方程式に注意して.

$$(3.3) \quad \begin{cases} (1) \quad \sqrt{\mu^2 - 1} = c\mu - \sum b_j \eta_j / \eta_1 \equiv c\mu - b(\eta), \quad \mu = \frac{\tau}{\eta_1} \\ (2) \quad \sqrt{\mu^2 - 1} = -c\mu + \sum b_j \eta_j / \eta_1 \equiv -(c\mu - b(\eta)), \quad \mu = \frac{-\tau}{\eta_1} \end{cases}$$

この式が (3.2) - と対応する. 何故ならば 符号に異なる符号の自由度が半分になるからである. (1) では $\mu = \frac{\tau}{\eta_1}$ であるが (2) では

便宜上, η と $-\eta$ に 1 を掛けている. $\mu = \frac{-\tau}{1-\eta_1} = \frac{-\tau}{\eta_1}$ とおける. $\tau = 0$ の場合を考慮すると (3.1), (3.3) より

$$(3.4) \quad \begin{cases} (1). \quad (3.3) \text{ の (1) は } -\operatorname{Im} \mu > 0 \text{ に根を持つ. (3.1) の (1) より} \end{cases}$$

- (2). (3.3)の(2)は $+ \operatorname{Im} \mu > 0$ に根を持たない (3.1)の(1)より
 (3) μ の real 軸上では. $|\mu| > 1$ の根は (3.3)の(1)(2)とも持たない. ((3.1)の(2)より)
 (4) μ の real 軸上で $|\mu| \leq 1$ なる根は. 持てない (3.1)の(3)より).

(3.4)の事実を一つの代数方程式が根をすべて上半平面 (軸を u) に持つという条件に帰着させる。そのために次の様に変換する。

$$\mu \longrightarrow z \longrightarrow v$$

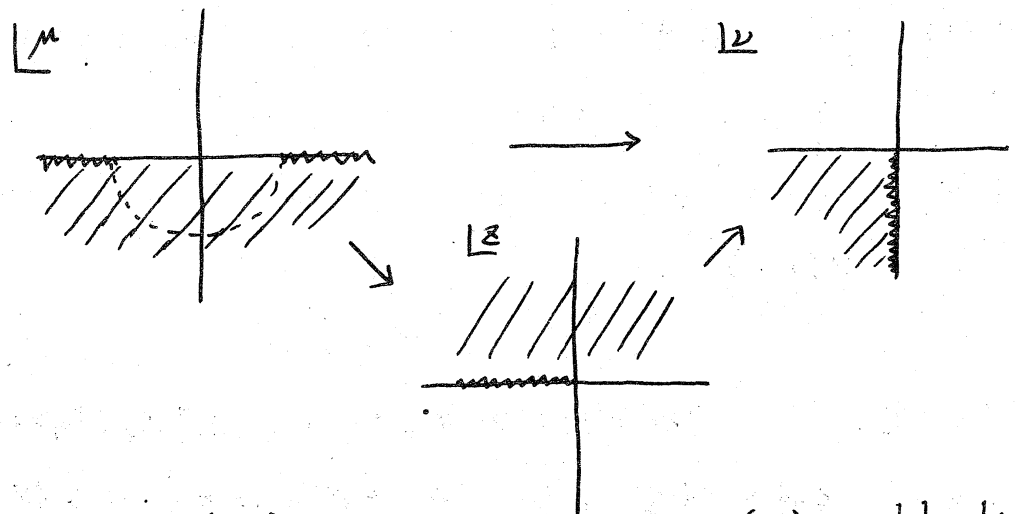
$$(3.5) \quad \mu = \frac{1-z}{z+1}$$

$$(3.6) \quad z = v^2 \quad v: \text{下半平面中心に (3.4)の(1),(2)で別々に branch する。}$$

$$(3.5) \text{ の性質 } \begin{cases} \text{(i) 逆も同じ形} & z = \frac{1-\mu}{\mu+1} \\ \text{(ii) 実軸} \rightarrow \text{実軸, } i \rightarrow -i & \therefore \text{上半} \rightarrow \text{下半} \\ \text{(iii) 虚軸} \leftrightarrow \text{単位円, } 0 \rightarrow 1 & \therefore \text{円の内側} \rightarrow \text{右半平面} \end{cases}$$

(3.6) は $\begin{cases} (3.3) \text{の(1)の場合,} & z: \text{上半平面} \rightarrow v \text{が3象限,} \\ (2) \text{の場合} & z: \text{下半平面} \rightarrow v \text{が4象限.} \end{cases}$
 なる写像を考える。

(3.3)の(1)について 対応する写像を図示しよう



斜線の部分 及 u v の部分に (3.3)の(1)は根対称的。

他方
$$\mu^2 - 1 = \frac{-4v^2}{(v^2 + 1)^2}$$

であるが 個々に符号を吟味すれば

(3.7)
$$+\sqrt{\mu^2 - 1} = \frac{-2iv}{v^2 + 1} \quad (- \text{は (1) の場合, } + \text{は (2) の場合})$$

故に (3.3)の(1)(2)共に

(3.8)
$$\frac{-2iv}{v^2 + 1} = c \left(\frac{1 - v^2}{v^2 + 1} \right) - b(1)$$

により c で $\frac{1 - v^2}{v^2 + 1}$ をかけると (これは 丁度前に (3.2) から (3.3) を出す時に $|z|$ で $|z|$ を (左方に対応する。))

$$(3.9) \quad \alpha z^2 - 2iz - \beta = 0, \quad \alpha = c + b(i), \quad \beta = c - b(i)$$

がすべての根を実軸まで引いて上半平面に持つことになる。

これを証明するためには次の Hermite の定理。

6. n 次多項式 $f(z) = 0$ の根がすべて上半平面にあるための必要十分条件は次の二つの別々の表現がある。

$$(I). \quad -i \frac{f(x)\bar{f}(y) - f(y)\bar{f}(x)}{x-y} = \sum_{i,j=0}^{n-1} A_{ij} x^i y^j \quad \text{としたとき}$$

$A = (A_{ij})$ (対称行列) の正定値。

$$(II). \quad f(x) = p(x) + i q(x), \quad p(x), q(x) \text{ 実係数としたとき}$$

$p(x), q(x)$ はそれぞれ real の根のみを持ち互いに相分つ。

Hermite の定理の Corollary

$f(z) = 0$ の根が non real な複素共役の根を持つという仮定のもとに、 $f(z) = 0$ の根が実軸まで引いて上半平面にすべての根を持つ必要十分条件は $A \geq 0$ である。

今 $f(z)$ は (3.9) の左辺とすると A は

$$A = \begin{pmatrix} 2 \operatorname{Re} \alpha & \operatorname{Im}(\bar{\alpha} \beta) \\ \operatorname{Im}(\bar{\alpha} \beta) & 2 \operatorname{Re} \beta \end{pmatrix} \quad \text{となる。結果を整理すると}$$

(Hermite の Th の Corollary 5)

$$(3.9) \left\{ \begin{array}{l} \text{I. } \operatorname{Re} \alpha = \operatorname{Re} \beta = 0 \text{ ならば } 1 + \alpha_2 \beta_2 \geq 0 \quad \alpha_2 = \operatorname{Im} \alpha, \beta_2 = \operatorname{Im} \beta \\ \text{II. } |\operatorname{Re} \alpha| + |\operatorname{Re} \beta| \neq 0 \text{ ならば } A \geq 0. \end{array} \right.$$

更に具体的に変換を follow していくことにより, (1.8) と (3.9) の (I) における ≥ 0 を > 0 にしたものと等しい値であることを加示せる.

§4. generalization

この節では 波動方程式の代りに 二階の双曲型方程式を考えよう. この場合にも §3 と同様に議論が進められる. その時の前のものとの対応を明らかなにするためにとどめよう.

$$P = -a D_t^2 + 2 \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{y_i} + a_n D_x \right) D_t + \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{y_i} D_{y_j} + 2 \sum_{i=1}^n a_{ni} D_{y_i} D_x + D_x^2 \right)$$

に於て t 方向に強双曲性を仮定する. 即ち. アイニコタイ風の記号で

$$P = -a \tau^2 + 2(a_{ij} \eta_i + a_n \xi) \tau + (a_{ij} \eta_i \eta_j + 2 a_{ni} \eta_i \xi + \xi^2)$$

と1次時, $a \neq 0$ で, τ に関する判別式が正である. これを ξ につ

いての二次式に整理すると

$$(a + a_n^2) \xi^2 + 2(a_n a_{ij} \eta_i + a a_{ni} \eta_i \xi) \xi + \{ (a_{ij} \eta_i)^2 + a a_{ij} \eta_i \eta_j \} > 0$$

となるが、これは次の二つと等値である。

$$0) \quad a + a_n^2 > 0$$

$$1) \quad -D(\eta) = (a_n a_i \eta_i + a a_n \eta_j)^2 - (a + a_n^2) \{ (a_i \eta_i)^2 + a a_{ij} \eta_i \eta_j \} < 0$$

更に boundary condition についての条件より

$$2) \quad a > 0$$

を仮定する。これは boundary condition の追加一つという条件である

0) は不用である。 残すは 1) 2) を仮定する その時、

$$(4.1) \quad P = -a \{ \tau - a^{-1}(a_i \eta_i + a_n \xi) \}^2 + a^{-1}(a + a_n^2) \{ \xi + (a + a_n^2)^{-1}(a_n a_i \eta_i + a a_{nj} \eta_j) \}^2 + a^{-1}(a + a_n^2)^{-1} D(\eta)$$

と完全平方の形になる時、1) 2) の条件はみえすい。

完全平方の順序を交換した時、第3項の剰余項を $D'(\eta)$ と表し、

$$(4.2) \quad P = (\xi + a_n \tau + a_n \eta_j)^2 - (a + a_n^2) \{ \tau - (a + a_n^2)^{-1}(a_i \eta_i - a_n a_n \eta_j) \}^2 + D'(\eta)$$

この時残すは $D'(\eta) = a^{-1}(a + a_n^2)^{-1} D(\eta)$ を示せる。

何故ならば $\frac{\partial P}{\partial \xi} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial \tau} = 0$ を ξ と τ についての

連立一次方程式とみて、その根を $\xi = \xi(\eta)$, $\tau = \tau(\eta)$ と一つ

持つと、(4.1) (4.2) に代入すれば、

$$P(\bar{x}(t), z(t), t) = D(t) = a^{-1}(a + a_n^2)^{-1} P(t)$$

と仮定からである。それ故に我々は境界値問題に対して、
(4.2)の形を波動方程式 $\bar{x}^2 - (t^2 - 12t)$ に対応させる。即ち、

$$\bar{x} = \bar{x} + a_n t + a_n \eta_j$$

$$\bar{t} = (a + a_n^2)^{-\frac{1}{2}} \{ t - (a + a_n^2)^{-1} (a_n \eta_j - a_n a_n \eta_j) \}$$

$$d(t) = a^{-\frac{1}{2}} (a + a_n^2)^{-\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}}(t) \quad (> 0.)$$

とすれば (4.2) は $\bar{x}^2 - (t^2 - d(t)^2)$ の形になる。この時 $d(t)$ の
の形乃至考慮して議論を進めていけば、前と同様である。但し、
boundary condition の方も、

$$B = \bar{x} - \bar{t} \bar{t} + \bar{b}(t) d(t)$$

という形にいて、

$$\bar{\alpha} = \bar{t} + \bar{b}(t), \quad \bar{\beta} = \bar{t} - \bar{b}(t)$$

を α, β のかわりに使えばよい。

終りに ことでは述べた事は [5] で述べた事の多次元への又、
方程式の形を一般形への拡張であることはお断りしておきます。なお [5]
の 3 頁目の下から 6 行目に '発展方程式 type の' とありまうのは、
'dual の問題' に対しても (2) の形の ' のあやまりであり、この紙面をか
りて訂正します。

References

- [1]. R. Agemi - T. Shirota ; On necessary and sufficient

condition for L^2 -well-posedness of mixed problems for hyperbolic equations. J. Fac. Sci. 21. Hokkaido Univ. No. 2. (1976) 133-151.

[2]. S. Miyatake ; Mixed problem for hyperbolic equation of second order J. Math. Kyoto Univ. vol. 13. No. 3 (1973) 435-487.

[3]. R. Sakamoto ; L^2 -well-posedness for hyperbolic ^{mixed} problem. P. R. I. M. S. Kyoto Univ. vol. 8. No. 2. (1972) 266-293.

[4]. R. Agemi ; Remarks on L^2 -well-posed mixed problem for hyperbolic equation of second order. Hokkaido M. J. vol. II. No. 2. p 214 - 230.

[5]. S. Miyatake ; 波動方程式に対する混合問題について.
シホイウム '超点散と擬微分作用素' 講究録. 数理解.