

帯のトポロジー

東大・教養 加藤十吉

序. なめらかな帯の $\mathbb{R}^3$ での位置を分類するのが目的である。§1 では同位 (イソトピー) のもとでの分類を行う。帯の中心線の結び糸型とひねり数が完全不変量である。§2 では正則ホモトピーのもとで分類する。mod.4 のひねり数がうめこみの正則ホモトピーのもとでの完全不変量となる。結局、 $\mathbb{R}^3$ のうめこまれた帯の正則ホモトピー類は円環面に帰着する。(但し、うめこみ自体でなく像のみを考える)。

実際、メービウスの帯は4回ひねり (2回ねじれ) の帯と $\mathbb{R}^3$ の中で正則ホモトープで、4回ひねりの帯と円環面は互に正則ホモトープになる。前者はメービウスの帯を中心線にそって切ると4回ひねりの帯がえられることと同等で、後者は図1から観察される。結果はスメールの定理を少し拡張すれば得られるが、直観的な議論はまつわり数の考察でなされ興味深いと思われる。

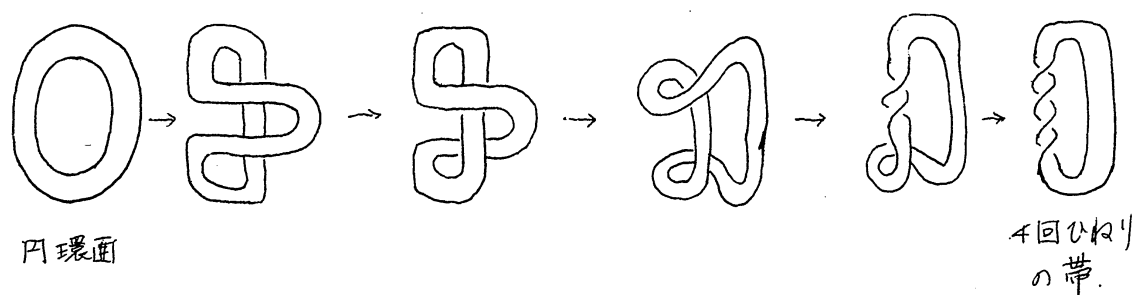


図 1

3.1. 帯とその同位類. 以下, すべて C^∞ -カテゴリーで考える。
したがって, 多様体はなめらかで, はめこみ (embedding) や
うめこみ (immersion) は C^∞ であるとする。

連結, コンパクトな 2 次元多様体 B に対し, $H_1(B) = \mathbb{Z}$
が成立するとき, B は帯と呼ばれる。曲面の分類定理から,
帯は円環面 B_0 かメービウスの帯 B_1 に同相である。帯 B に
対し, $H_1(B)$ を生成するホモロジー類を表わす B の内部の単
一閉曲線を B の中心と呼び, c と表わす。 c は B の内部のイ
ソトピーのもと一意的に定まる。 B の境界 ∂B を b と表わ
す。 B が B_0 と同相なら, b はスツの円周で, π , B_1 の 2
重被覆は B_0 であるから, サイクルとして, $b \sim \pm 2c$ (ホモ
ロギ) という関係がある。 b と c の向きは常に $b \sim \pm 2c$ が
 $\mathbb{R}^3$ にはめこまれた帯 B について考える。
成立するように定めることにする。 B のひねり数 $\ell(B)$ を

$$\ell(B) = \ell(b, c) \quad (b \text{ と } c \text{ のまっわり数})$$

と定義する。 $\ell(b, c)$ は c のザイフェルト膜 F と b の交叉数

$I(b, F)$ に等しい。

定理 1. 帯 $B \subset \mathbb{R}^3$ に対し, B の中心線 $c \subset \mathbb{R}^3$ の同位類 (結び糸型) とひねり数 $l(B)$ は B の同位 (イソトピー) 類の完全不変量である。すなわち, この不変量で与えられる次の写像は全単射である。帯の $\mathbb{R}^3$ での同位類 $\} \Rightarrow \{\text{結び糸型}\} \times \mathbb{Z}$
(証明) 被覆同位定理により, 同位であることと全同位 (ambient isotope) ということとは同値である。よって, 中心線の結び糸型とひねり数は帯の同位不変量である。逆に, 結び糸 c 及び整数 n が与えられたとし, c を中心線, n をひねり数とする帯 $B_{c,n}$ を構成し, c と同位な中心線を有し, ひねり数が n である帯が $B_{c,n}$ と同位であることを示そう。
まず, c のガイフェルト膜 F をとり, F への ε -法線分バンドルを c へ制限したものを $B_{c,0}$ とおく。 $B_{c,0}$ は中心線 c , ひねり数 0 を有する。 c の1本のまわりでの $(\mathbb{R}^3, F, c)$ の局所モデルとして, $(\mathbb{R}^3, H, \mathbb{R}^1)$ をとれる。但し, $\mathbb{R}^3$ を (x, y, z) -空間とすれば, H^2 は (x, z) -上半平面, $\mathbb{R}^1$ は x 軸である。 c の向きは, $\mathbb{R}^1$ の正の向き, そして, $B_{c,0}$ は $\mathbb{R}^1 \times [-1, 1] \times 0$ とみなせる。ここで写像 $\tau_n: \mathbb{R} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ を,

$$0 \leq x \leq 1 \text{ に対し, } \tau_n(x, y) = (x, y \cos n \cdot x \cdot \pi, y \sin n \cdot x \cdot \pi)$$

$$\neq, \quad x \leq 0, \quad 1 \leq x \text{ に対し, } \tau_n(x, y) = (x, y, 0)$$

と定義する。 τ_n は矛盾なく定義され、はめこみである。
 $[0, 1] \times [-1, 1]$ の外側では恒等写像だから、 $B_{c,0}$ から $\mathbb{R}^3$
 へのはめこみ $\tau_n : B_{c,0} \rightarrow \mathbb{R}^3$ へと拡大される。

$\tau_n(B_{c,0}) = B_{c,n}$ が求まるものである。実際、 $\ell(B_{c,n})$
 $= n$ が示される。 さて、かつてな帯 $B \subset \mathbb{R}^3$ が与えられ、
 中心線が c と同位で、ひねり数 $\ell(B)$ が n であるとする。 $\mathbb{R}^3$
 の全同位のもとで、 B の中心線は c であるとしてよい。 c の
 $\mathbb{R}^3$ での法円板バンドルを N とすれば、 B 及び $B_{c,0}$ はその
 部分線分バンドルとみなされ、 N が自明であることから、こ
 れらは写像 $\lambda, \lambda_{c,n} : c \rightarrow O(2)/O(1) \times O(1) = S^1/\mathbb{Z}_2$
 のホモトピー類（すなわち写像度） $\sqcup$ ($= S^1$)
 で分類される。自明化を c のサイフェルト膜への法ベクトル
 場を拡張してとれば、 $\lambda, \lambda_{c,n}$ の写像度はそのひねり数
 $\ell(B)=n, \ell(B_{c,n})=n$ に一致する。よって、 B 及び $B_{c,n}$
 は部分バンドルとして同型となる。すなわち、 N の、したが
 って、 $\mathbb{R}^3$ の全同位のもとで B と $B_{c,n}$ は重ねられる。(3).

c が自明な結び糸のとき、 $B_{c,n}$ を B_n と表わす。 B_n の
 標準形は2本の組み糸で次の様に表わせる。

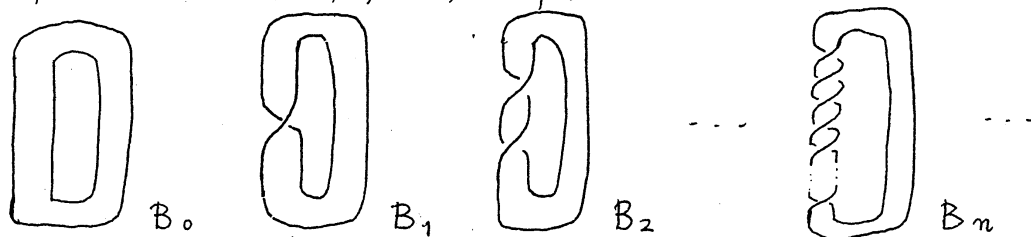


図2.

【注】. はめこみ $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ が同位となる為の必要十分条件は, $f(c)$ と $g(c)$ が向きづけられた結び糸として同位で, $\ell(f(B)) = \ell(g(B))$ が成立することである.

§2. 帯のうめこみの正則ホモトピー類.

C^∞ 写像 $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ がうめこみとは, B の各点で, φ の微分の階数が2であるときをいう. $\varphi(B)$ は $\mathbb{R}^3$ にうめこまれた帯であるという. C^∞ 写像 $\Xi : B \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ が正則ホモトピーであるとは, 各 $t \in [0, 1]$ に対し, $\Xi|_{B \times t}$ がうめこみであるときをいう. このとき, $\Xi_0(x) = \Xi(x, 0)$, $\Xi_1(x) = \Xi(x, 1)$ により定義されたうめこみ $\Xi_0, \Xi_1 : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ は互に正則ホモトープであるといわれる. 又, うめこまれた帯 $\Xi(B_0)$ と $\Xi(B_1)$ も互に正則ホモトープと呼ばれる.

補題1. 帯 B の $\mathbb{R}^3$ へのうめこみははめこみと正則ホモトープである. (i). B の中心線のうめこみの自己交叉を $\mathbb{R}^3$ の局所イソトピーでとり除き, 中心線ははめこまれているとしてよい. 局所イソトピーは B からの正則ホモトピーへ拡張される. 次に, 中心線の管状近傍の中へ帯をちぢめてゆけばよい. (j).

補題2. 帯 $B \subset \mathbb{R}^3$ はある $B_n \subset \mathbb{R}^3$ と正則ホモトープ.

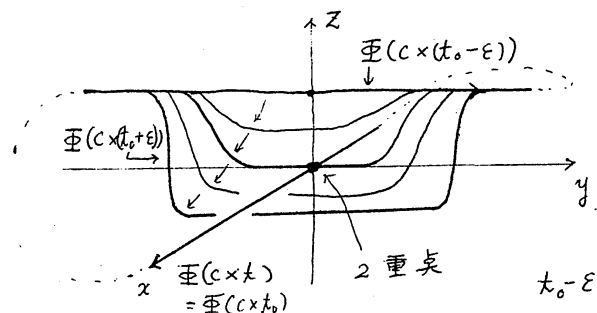
(:) B の中心線 c を $\mathbb{R}^3$ へ正則射影して, 正則射影での交叉点の上下の指定を適当に入れかえて c を自明に示う。中心線のこの正則ホモトピーは図1の途中で行われている帯の上下を入れかえる正則ホモトピーへと拡張される。(了)

補題3. $n \equiv m \pmod{4}$ であれば, B_n と B_m は正則ホモトープである。(:) 図2よりこれは図1に帰着される。

はめに $f: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対し, $l(f) = l(f(B))$ と定義し, f のひねり数と呼ぶ。

補題4. はめに $f, g: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ が正則ホモトープなら, $l(f) \equiv l(g) \pmod{4}$ が成立する。

(:) f と g の間の正則ホモトピー $\varphi: B \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $c \times [0, 1]$ へ制限したものは, $f(c)$ と $g(c)$ の間の正則ホモトピーとなる。これを一般にすれば, $[0, 1]$ の有限個の点を除くと同位を与えるとしてよい。そして, その有限個の点^{てい}は c が二重点をもつように φ でうつされるとしてよい。局所的には次の図3の左のようになる。但し, $\varphi(c \times t_0)$ が二重点を有するとしている。



を有するとしている。

したがって, ひねり数の変化はそのような t_0 で問題となる。

$$B^- = \pi(B \times (t_0 - \varepsilon)) \quad , \quad B^+ = \pi(B \times (t_0 + \varepsilon)) \quad \text{と} \text{お} \text{く} \text{。}$$

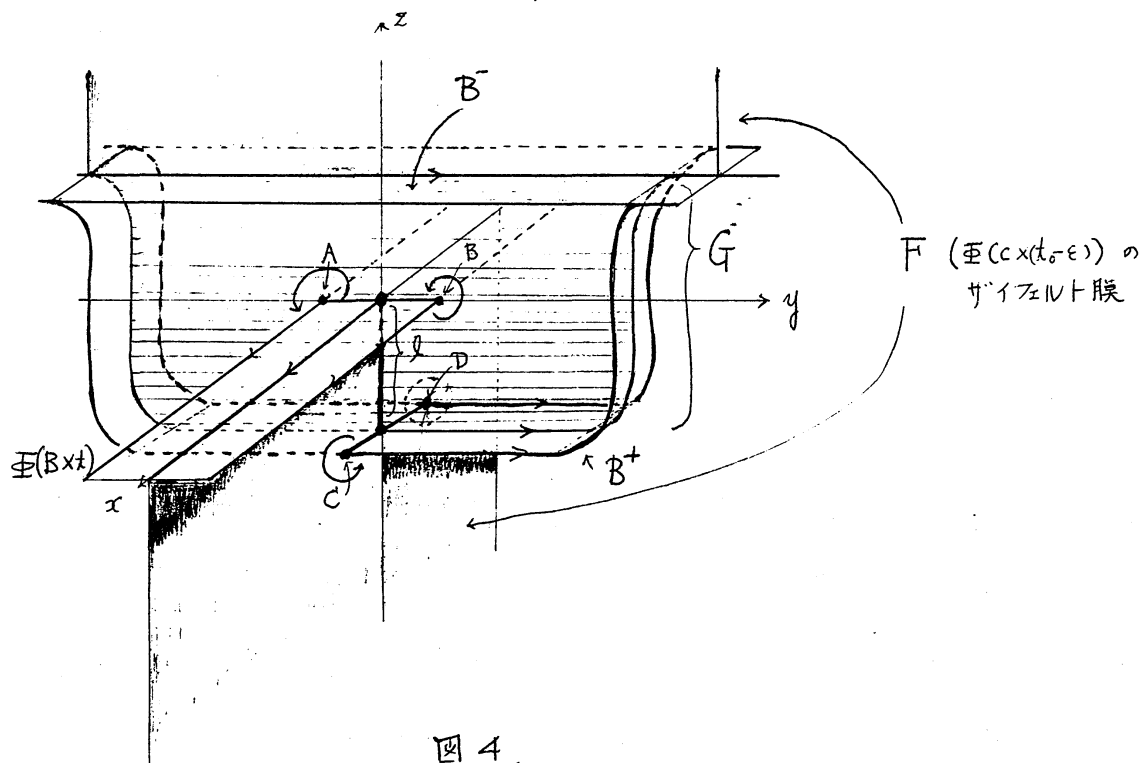


図 4.

上図の様にガイフェルト膜下の局所モデルをとれば,

$$l(B^+) = l(B^-) + 4$$

が成立する。これは, $F \cup G$ は自己交叉 l を有するが,

$$l(F \cup G) = \pi(C \times (t_0 + \varepsilon)) \quad \text{である鎖をなすことにより,}$$

$$l(B^+) = l(\pi(C \times (t_0 + \varepsilon)), F \cup G) = l(B^-) + 4$$

と計算される。結局, 一般的に, $l(B^+) = l(B^-) \pm 4$ が成立する。[3].

はめこみ $f: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対し, $l(f)$ の mod 4 合同類を

$l_4(f)$ と表わす。うめこみ $\varphi: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ は補題 1 によりはめこみ $f: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ と正則ホモトープで、 $l_4(f)$ は補題 4 により正則ホモトピー不変量であるから、 φ の $\text{mod } 4$ のねり数 $l_4(\varphi) = l_4(f)$ が定義される。補題をまとめると、

定理 2. うめこみ $\varphi, \psi: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ が正則ホモトープであるための必要十分条件は $l_4(\varphi) = l_4(\psi)$ ということである。

(注). B が向きづけ可能なら、 $l_4(\varphi)$ は 2 でわりきれぬ。 φ と正則ホモトープなはめこみ f に対し、 $f(B)$ は向きづけ可能であるから、 $l(f)$ が偶数となるからである。よって、その正則ホモトピー類は B_0 か B_2 に等しい。これは、スミールの結果に一致する。実際、 $\pi_1(V_{3,2}) = \pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$ であるから、 $\mathbb{R}^3$ の 2-frame は順序づけられた独立なベクトルの対 (v_1, v_2) である。 $(v_1, v_2) \equiv (v_1, -v_2)$ と同一視すれば、 $V_{3,2}$ の商空間 $\bar{V}_{3,2}$ が得られ、同一視写像

$$V_{3,2} \longrightarrow \bar{V}_{3,2} \quad \text{は 2 重被覆で、完全系列}$$

$$0 \rightarrow \pi_1(V_{3,2}) \rightarrow \pi_1(\bar{V}_{3,2}) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad \mathbb{Z}_2$$

が得られる。 $\pi_1(\bar{V}_{3,2}) = \mathbb{Z}_4$ が成立する。実際、 $\varphi: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対し、 $l_4(\varphi)$ を $\pi_1(\bar{V}_{3,2})$ の元とみなすスミールの写像の括

張を考えることができる。

B_0 をその 2 重被覆 $\gamma_0: B_0 \rightarrow B_0 \subset \mathbb{R}^3$ の像とみなせば,
 $\ell_4(\gamma_0) \equiv 2$ であるから (図 5), B_0 と B_2 は正則ホモトープである。
 B_1 の 2 重被覆 $\gamma_1: B_0 \rightarrow B_1 \subset \mathbb{R}^3$ に対しては, $\ell_4(\gamma_1) \equiv 0$ が成立する。(図 5). よって, B_0 と B_1 は正則ホモトープである。(図 1 参照) B_2 の 2 重被覆 $\gamma_2: B_0 \rightarrow B_2 \subset \mathbb{R}^3$ に対し, $\ell_4(\gamma_2) \equiv 2$ が成立する。
 又, B_3 の 2 重被覆 $\gamma_3: B_0 \rightarrow B_3 \subset \mathbb{R}^3$ に対して $\ell_4(\gamma_3) \equiv 2$ が成立する。

結局, すべての帯 $B \subset \mathbb{R}^3$ は B_0 と正則ホモトープである。

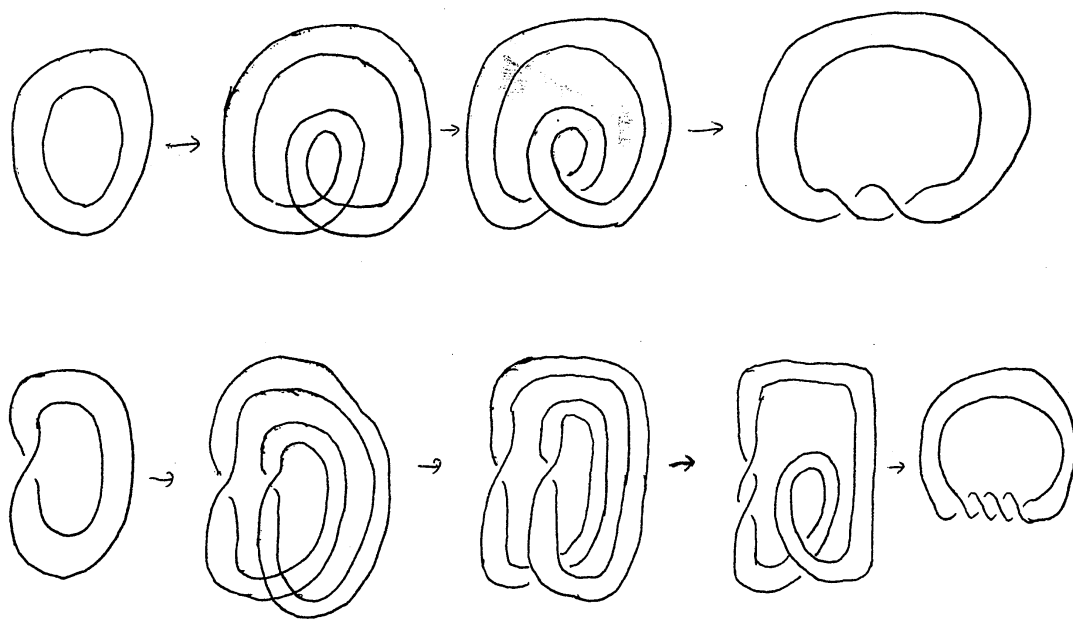


図 5.