

Martingaleの L^p -normに関する

Gilatの評価について

富山大 理 菊池 万里 (Masato kikuchi)

D. Gilat [5] によれば、一様可積分な martingale $X = (X_t)$ の H^1 -norm と L^p -norm の間に、つぎの不等式が成り立つ。

$$\|X^*\|_1 \leq \Gamma(q+1)^{1/q} \|X_-\|_p \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1)$$

実は、定数 $\Gamma(q+1)^{1/q}$ は best possible な値である。 $E[X_- \log^+ X_-] < \infty$ ならば $X \in H^1$ であり、逆は成立しないことを思い起こせば上の不等式は納得しやすい。この不等式を導く際に用いられる Blackwell-Dubins の分布不等式は、 $X^* = \sup_s |X_s|$ の分布を直接に評価するもので、他の martingale 不等式を考察する際にも大変有効である。

先ず記号を定義する。 $\mathbb{R}$ 上の確率法則 μ に対し、区間 $]0, 1[$ 上で定義された減少関数で (Lebesgue 測度に関する) 分布が μ となるものを f_μ と書く。このような f_μ はすべての μ に対して本質的に一意に定まる。 $(f_\mu = \inf \{s \in \mathbb{R} : \mu(]-\infty, s]) > 1-t\})$ また、 f_μ^* をつぎのように定義する。

$$f_\mu^*(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f_\mu(s) ds$$

f_μ は減少であることに注意すれば f_μ^* はその最大関数であることがわかる。

定理 1 (Blackwell-Dubins [2])

$X = (X_t)$ を一様可積分な martingale とする。 X_- , $|X_-|$ の分布をそれぞれ μ , ν

とする。このとき、

$$(1) \quad P \{ \sup_t X_t > \lambda \} \leq m \{ s \in]0, 1[: f_\mu(s) > \lambda \} \quad \text{for every } \lambda > 0$$

$$(2) \quad P \{ \sup_t |X_t| > \lambda \} \leq m \{ s \in]0, 1[: f_\nu(s) > \lambda \} \quad \text{for every } \lambda > 0$$

ここに m は $]0, 1[$ 上の Lebesgue 測度である。

定理 2 (Dubins-Gilat [3])

有限な平均を持つ distribution μ に対し、ある確率空間 (Ω, F, P) 上に $X_\infty \stackrel{d}{=} f_\mu$, $\sup_t X_t \stackrel{d}{=} f_\mu^*$ なる一様可積分な martingale $X = (X_t)$ が存在する。

定理 1 の証明はつぎの事実を使うと簡単である。

補題 : 区間 $]0, 1[$ 上の $0 \leq \phi \leq 1$ なる可測関数 ϕ と減少関数 f に対し

$$\int_0^1 f(t) \phi(t) dt \leq \int_0^a f(t) dt \quad \text{where} \quad a = \int_0^1 \phi(t) dt$$

(定理 1 の証明) (1)、(2)とも同様であるから (1)のみ示す。先ず $A \in F$ に対し $\mathbb{R}$ 上の可測関数 $\phi(x)$ を $\phi(X_\infty) = P(A | X_\infty)$ となるようにとる。

$$E[X_\infty : A] = E[X_\infty \phi(X_\infty)] = \int_0^1 f_\mu(t) \phi(f_\mu(t)) dt \leq \int_0^{P(A)} f_\mu(t) dt$$

ここで最後の不等式は補題と $\phi \circ f_\mu$ の $]0, 1[$ 上での積分が $P(A)$ であることによる。特に

$A = \{\sup_t X_t > \lambda\}$ とすれば、Doob の不等式と上の不等式より

$$\lambda P(A) \leq \int_0^{P(A)} f_\mu(t) dt \quad \therefore \quad \lambda \leq f_\mu^*(P(A))$$

従って $P(A) \leq \sup \{t \in]0, 1[: f_\mu^*(t) > \lambda\} = m \{t \in]0, 1[: f_\mu^*(t) > \lambda\}$ □

定理 2 の性質をみたす martingale は Duins-Gilat の他にも Azema-Yor [1] によって構成されている。それは Brown 運動を適当に stop して得られるもので大変興味深いが、細かい計算を必要とするので、ここでは Dubins-Gilat の例をあげておく：

$\Omega =]0, 1[$, $F_t = \sigma(B(]0, t[), [t, 1[))$, $P =$ the Lebesgue measure on Ω

とし、

$$X_t(\omega) = f_\mu(1-\omega) I_{]0, t[}^*(\omega) + f_\mu^*(1-t) I_{[t, 1[}(\omega)$$

とおけばよい。

Duins-Gilat は Doob の不等式 $\|X^*\|_p \leq q \|X_\infty\|_p$ の定数 q が最良であることを示すために定理 2 を用いた。実際、区間 $]0, 1[$ 上で $f(t) = t^{-1/p}$ とし $X_\infty \simeq f$, $\sup_t X_t \simeq f$ となる martingale $X = (X_t)$ をとれば、(X : non-negative に注意して)

$$\|X^*\|_p \leq q \|X_\infty\|_p, \quad p' < p$$

であることがわかる。

つぎに、この報告の最初にあげた不等式と $L \log^+ L$ タイプの Doob の不等式への応用をあげておこう。

定理 3 (D. Gilat [5])

任意の martingale $X = (X_t)$ に対し、つぎが成立：

$$(3) \quad \|X^*\|_1 \leq \Gamma(q+1)^{1/q} \|X_\infty\|_p \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1)$$

定数 $\Gamma(q+1)^{1/p}$ は最良である。

これはつぎの不等式の言い換えである： f を減少関数とすると

$$\int_0^1 f^*(t) dt = \int_0^1 f(t) \log t^{-1} dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^1 \log t^{-q} dt \right)^{1/q} = \Gamma(q+1)^{1/q} \|f\|_p$$

この不等式は $g(t) = C(\log t^{-q})$ のときに限り等号が成立する。したがって $X_\infty \simeq g$, $\sup_t X_t \simeq g^*$ となる (positive) martingale $X = (X_t)$ にたいして (3) は等式になる。

定理 4 (D. Gilat [4])

c_0 をつぎの方程式の根とする。 $e^{-c_0} = (c_0 - 1)^2$: $c_0 \approx 1.487 < 1.582 \approx e/(e-1)$

$$E[X^*] \leq c_0 (1 + E[|X_-| \log^+ |X_-|])$$

がすべての $X = (X_t)$ に対して成立し、等号の成り立つような martingale も存在する。

証明には

$$\int_0^1 f^*(t) dt \leq c_0 \left(1 + \int_0^1 |f(t)| \log^+ |f(t)| dt \right)$$

を示せばよいが、これも初等的な計算である。等号を与える関数は $g(t) = e^{-1/c_0} \vee 1$ である。

参 考 文 献

- [1] J. Azéma et M. Yor, Une solution simple au problème de Skorokhod, Séminaire de Prob. XIII, Lecture Notes in Math. 721, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1978), 90-115
- [2] D. Blackwell and L. E. Dubins, A converse to the dominated convergence theorem, Illinois J. Math. 7 (1963), 508-514
- [3] L. E. Dubins and D. Gilat, On the distribution of maxima of martingales, Proc. Amer. Math. Soc. 68 (1978), 337-338
- [4] D. Gilat, The best bound in the $L \log L$ inequality of Hardy & Littlewood and its martingale counterpart, Proc. Amer. Math. 97 (1986), 429-436
- [5] D. Gilat, On the ratio of the expected maximum of a martingale and the L_p -norm of its last term. Israel J. Math. 63 (1988) 270-280