

Index ratio sets for minimal equivalence relations - subrelations

山形大学 理学部 数理科学科 佐野 隆志 (Takashi Sano)

Department of Mathematical Sciences,
Faculty of Science, Yamagata University

本講演では, ジョーンズの指数理論で展開された, ergodic equivalence relations - subrelations の分類結果の C*-環バージョンについて言及する: C. Sutherland や T. Hamachi により エルゴード的 同値関係の組についてはよく分っている。(See [H].) そこで choice functions により定まる index cocycle から index ratio sets なる有限群の組を得て, それら群の作用で 同値関係の標準的な分解を与えている。ここでは, minimal な equivalence relation - subrelation に対して ある種の index cocycle が与えられた時, 同様の議論が行えることについて述べる。

X をコンパクト距離空間とし, X 上 離散群 G が作用している, とする。(X 上の同相写像の全体を $\text{Homeo}(X)$ とかけば, $G \subseteq \text{Homeo}(X)$.) G による同値関係

$\mathcal{R} = \mathcal{R}_G := \{ (gx, x) \mid x \in X, g \in G \}$
を考える。

G (or $\mathcal{R}_G$) が minimal であるとは, 以下の(同値

な) 条件のどれかを満たすとき, という:

- ① $\forall x \in X$ に対し $Gx (= \mathcal{R}(x) = \text{Orb}_G x) \underset{\text{dense}}{\subseteq} X$.
- ② $E(\subseteq X)$ closed, $gE = E (\forall g) \Rightarrow E = \emptyset \text{ or } X$.
- ③ $\forall U (\neq \emptyset)$ open に対し, $X = \bigcup_{g \in G} gU$.

よく知られた事実として G が minimal なるとき

$gY = Y (\forall g \in G)$, $G|_Y$: minimal
なる 閉集合 $Y (\subseteq X)$ が存在する。

さて, $\mathcal{R} := \mathcal{R}_G \cong \mathcal{S}$ は minimal equivalence
relation - subrelation とし, 次の 2つの設定を加える:

$$\textcircled{1} \quad X \ni x \mapsto \#\{\mathcal{S}(y) \mid y \sim_{\mathcal{R}} x\} : \text{constant} (=: N)$$

$$\textcircled{2} \quad \sigma : \mathcal{R} \ni (gx, x) \mapsto \sigma(gx, x) \in \mathbb{S}_N$$

(homomorphism, X 上 continuous,

$$\mathcal{S} \cong \ker \sigma := \{(y, x) \in \mathcal{R} \mid \sigma(y, x) = e\}$$

なる写像 σ が与えられる。

(choice functions $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ ($\varphi_1 = \text{id}$) が存在
するときは, $\sigma(y, x)(i) = j \stackrel{\text{def}}{\iff} \varphi_i(x) \sim_{\mathcal{S}} \varphi_j(y)$ と定義
すれば, $\textcircled{2}$ (連続性以外) は成立する。

$$[\mathcal{R}] := \{\varphi \in \text{Homeo}(X) \mid \varphi x \in \mathcal{R}(x), \forall x\}$$

$$[\mathcal{R}]_* := \left\{ \varphi : \text{Dom } \varphi (\text{open}) \rightarrow \text{Im } \varphi \text{ homeo}, \right. \\ \left. \varphi x \in \mathcal{R}(x) \quad \forall x \in \text{Dom } \varphi \right\}$$

とし,

$$\iota_0(\mathcal{S}) := \left\{ \theta \in \mathbb{G}_N \mid \begin{array}{l} \forall \mathcal{U} : \text{open}(\subseteq X) \\ \forall x_0, y_0 \in \mathcal{U} \\ \exists \varphi, \psi \in [\mathcal{S}]_* \quad \text{s.t.} \\ \text{Dom } \varphi (\ni x_0), \text{Im } \varphi \subseteq \mathcal{U} \\ \text{Dom } \psi (\ni y_0), \text{Im } \psi \subseteq \mathcal{U} \\ \& \\ \sigma(\varphi x, x) = \theta \quad \forall x \in \text{Dom } \varphi \\ \sigma(\psi y, y) = \theta^{-1} \quad \forall y \in \text{Dom } \psi \end{array} \right\}$$

とおけば, $\iota_0(\mathcal{S})$ は群になる。また

$$\mathcal{Q} := \{ (y, x) \in \mathcal{S} \mid \sigma(y, x) \in \iota_0(\mathcal{S}) \}$$

とおくと $\#\{\text{Ker } \sigma\text{-minimal 成分}\} < +\infty$

であることが, $\text{Ker } \sigma\text{-minimal 成分} = \mathcal{Q}\text{-minimal 成分}$ であることから示される。これより $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $\text{Ker } \sigma\text{-minimal 成分}$ よりなる X の有限分割 ($\#\Lambda < \infty$) とする。

各 $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$\iota_\lambda(\mathcal{S}) := \text{" } \iota_0(\mathcal{S}) \text{ の定義で } \mathcal{U} \subseteq \underline{A_\lambda} \text{ に制限したもの "}$$

$$\iota_\lambda(\mathcal{R}) := \text{" } \iota_\lambda(\mathcal{S}) \text{ の定義で } \varphi, \psi \in [\mathcal{R}]_* \text{ と置き換えたもの "}$$

と定義すると,

$$r_\lambda(R) \cong r_\lambda(S) \overset{\sim}{\underset{\text{conjugate}}{}} r_{\lambda_0}(R) \cong r_{\lambda_0}(S)$$

$\begin{array}{c} \text{!!} \\ G \end{array}$

$\begin{array}{c} \text{!!} \\ H \end{array}$

となることも分る。

あとは, G の free な作用 α_g を作り, $\rho(\subseteq S)$ という subrelation を定義して

$$R = \rho \rtimes_{\alpha} G \cong S = \rho \rtimes_{\alpha} H$$

と表せることなど, 論文 [H] と同様に議論
 することが出来る. (説明を省いた記号・定義等
 については [H] を参照.)

Reference

[H] : T. Hamachi, Canonical subrelations of
 ergodic equivalence relations - Subrelations
 J. Operator Theory 43 (2000) 3-34.