

p 進体上の多様体の0サイクルについて

佐藤 周友 (名大多元数理)

目次

1 サイクルの有限性の問題	1
2 定理1の証明の概略	3
3 応用	8

1 サイクルの有限性の問題

X を体 k 上幾何的に連結なスムーズ多様体とする. X の r 次元閉部分多様体全体のなす集合を X_r で表し, 集合 X_r が生成する自由アーベル群 $\mathbb{Z}[X_r]$ を r サイクルの群とよび, $Z_r(X)$ と表す. X の r サイクルの Chow 群 $\mathrm{CH}_r(X)$ を次のように定義する:

$$\mathrm{CH}_r(X) := Z_r(X)/Z_r(X)_{\mathrm{rat}}.$$

ここで $Z_r(X)_{\mathrm{rat}}$ は $r+1$ 次元閉部分多様体上の有理関数の因子であるような r サイクルたちが生成する部分群を表し, $Z_r(X)_{\mathrm{rat}}$ の元は 0 に有理同値な r サイクルとよばれる. Chow 群の次数付けはサイクルの余次元によってなされることも多い:

$$\mathrm{CH}^r(X) := \mathrm{CH}_{\dim(X)-r}(X).$$

これを余次元 r のサイクルの Chow 群とよぶ. 次の事実は基本的である:

- (1) チャウ群は余次元で次数を付けるとスムーズ多様体の間の任意の射に関して反変関手的であり, 次元で次数を付けると固有的な射に関して共変関手的である. (Chow [Ch], Fulton [Fu1], [Fu2])
- (2) 余次元 1 のサイクルの Chow 群 $\mathrm{CH}^1(X)$ は因子類群であり, Picard 群 $\mathrm{Pic}(X)$ と標準同型である. さらに X が k 上射影的な場合, X の Picard 多様体を Pic_X^0 で表すと, 0 に代数同値なサイクル ([Fu2] §10.3) で生成される $\mathrm{CH}^1(X)$ の部分群は $\mathrm{Pic}_X^0(k)$ の指数有限な部分群に対応する.

- (3) k が代数体の場合は, $\mathrm{CH}^1(X)$ は有限生成アーベル群である. (Néron-Severi 群の有限生成性と Mordell-Weil の定理の帰結)

1973 年に (3) を一般化する形で, 次の予想が提起された.

予想 1 (Bass [Ba]) k が代数体ならば, $\mathrm{CH}^r(X)$ は各 r に対して有限生成である.

以下では X は完備 ($:= k$ 上固有的), $\dim(X) \geq 2$ かつ $X(k) \neq \emptyset$ であると仮定する. 次数 0 の 0 サイクルのなす $\mathrm{CH}_0(X)$ の部分群 $A_0(X)$ を考えると, Albanese 写像とよばれる標準写像がある:

$$\mathrm{alb}_X : A_0(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Alb}}_X(k) \quad (\underline{\mathrm{Alb}}_X \text{ は Albanese 多様体}).$$

k が代数体の場合, 右辺は有限生成であるので, 予想 1 の本質的な問題は alb_X の核

$$T(X) := \mathrm{Ker}(\mathrm{alb}_X)$$

の有限生成性である. この部分は体 k によって大きく様子が異なり, 一筋縄では捉えられない. 実際, 次の事実が分かっている. X の幾何種数と小平次元をそれぞれ p_g と κ_X で表す.

- (4) $k = \mathbb{C}$, $\dim(X) = 2$ かつ $p_g > 0$ ならば $T(X)$ は有限次元スキームでは表現できない (巨大な) 群である (Mumford [Mu], 1968 年).
- (5) $k = \mathbb{C}$, $\dim(X) = 2$, $p_g = 0$ かつ $\kappa_X \leq 1$ ならば $T(X) = 0$ である (Bloch-Kas-Lieberman [BKL], 1976 年).
- (6) k が有限体ならば $T(X)$ は位数有限である (Kato-Saito [KS], 1983 年).

1985 年に Beilinson は次のことを予想した.

予想 2 (Beilinson [Be]) k が代数体ならば, $T(X)$ は捩れ群である.

予想 1 と 2 を合わせると, 「 k が代数体ならば $T(X)$ は位数有限」でなければならぬが, 現在までに知られているのは次の事実だけである.

- (7) k が代数体, $\dim(X) = 2$ かつ, ある埋め込み $k \hookrightarrow \mathbb{C}$ に関して $T(X_{\mathbb{C}}) = 0$ ならば $T(X)$ は位数有限である (Colliot-Thélène-Raskind [CTR], 1991 年).

本稿の主題は k が p 進体 ($\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体) の場合の $T(X)$ の構造である. この場合には, 1990 年代に専門家の間で次のことが予想された.

予想 3 (予想 2 の類似) k が p 進体ならば, $T(X)$ は有限群と可除群の直和である.

この予想に関しては (7) の類似として次の場合が知られている.

- (8) k が p 進体, $\dim(X) = 2$ かつ, ある埋め込み $k \hookrightarrow \mathbb{C}$ に関して $T(X_{\mathbb{C}}) = 0$ ならば $T(X)$ は位数有限である (Colliot-Thélène–Raskind [CTR], 1991 年).

本稿の主結果は予想 3 を弱めた次の定理 1 である. 素数 p とアーベル群 M が与えられたとき, M が p' 可除であるとは, p と素な任意の自然数 n について $M \otimes \mathbb{Z}/n = 0$ であることをいう. またアーベル群 M が指数有限であるとは, n 倍写像 $M \rightarrow M$ が零写像であるような自然数 n が存在することをいう.

定理 1 (齋藤・佐藤 [SS2]) X を p 進体 k 上のスムーズ完備多様体とし, $X(k) \neq \emptyset$ を仮定する. このとき $A_0(X)$ と $T(X)$ はどちらも指数有限群と p' 可除群の直和である.¹

X が曲線の積である場合は, Raskind, Spiess [RS] と山崎 [Y] が p 進的な構造を含めて $A_0(X)$ を詳しく計算している.

記号と約束. 本文で用いる記号と約束は以下の通りである.

- 体 F の分離閉包を $\bar{F}$ で表す.
- スキームのコホモロジーはすべてエタールコホモロジーである. スキーム X 上の小エタール景 (small étale site) を $X_{\text{ét}}$ で表す.
- スキーム X 上で可逆な自然数 n に対して, 1 の n 乗根のなす $X_{\text{ét}}$ 上の層を μ_n で表す.

2 定理 1 の証明の概略

p 進体 k の整数環を $\mathfrak{o}$ で表し, $\mathfrak{o}$ の剰余体を $\mathbb{F}$ で表す. $\mathfrak{o}$ 上のスキーム Z に対して

$$Z_s := Z \otimes_{\mathfrak{o}} \mathbb{F}$$

という記号をしばしば用いる. de Jong の alteration 定理 [dJ] と Chow 群の関手性を用いた簡単な議論により, 定理 1 は X が半安定環元 (semistable reduction) を持つ場合に帰着される. 以下ではこの条件より弱い, 次の条件 (N) をみたすような X の正則モデル $\mathcal{X}$ が存在する場合に定理 1 の証明の概略を述べる:

¹Mattuck の定理 [Ma] により, $\text{Alb}_X(k)$ は $\mathbb{Z}_p$ の有限直和を指数有限な部分群として含むから有限群と p' 可除群の直和である. したがって $T(X)$ に関する定理 1 の主張と $A_0(X)$ に関する定理 1 の主張は互いに同値である ([SS1] 補題 2.3.2 (3) 参照). また, $X(k) \neq \emptyset$ という仮定がなくても, $A_0(X)$ が指数有限群と p' 可除群の直和であるという主張は正しい (以下の定理 1 の証明を見よ).

(N) $\mathcal{X}$ は $\mathfrak{o}$ 上射影的かつ平坦であり, $\mathcal{X}_s$ に被約な閉部分スキーム構造を与えた $(\mathcal{X}_s)_{\text{red}}$ は $\mathcal{X}$ 上の単純正規交叉因子である.

次の定理が定理 1 を証明する鍵である.

定理 2 (齋藤・佐藤 [SS2]) $\mathcal{X}$ を条件 (N) をみたす $\mathfrak{o}$ 上の正則スキームとし, ℓ を p と異なる素数とする. このとき $\mathcal{X}$ のサイクル写像

$$\text{cl}_{\mathcal{X}, \ell^n} : \text{CH}_1(\mathcal{X})/\ell^n \longrightarrow H^{2d}(\mathcal{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}) \quad (n \geq 1)$$

は全単射である. ただし d は $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec}(\mathfrak{o})$ のファイバーの次元を表す.

ここで考えているサイクル写像は Gabber の絶対純粋性 [FG] によって定義されるものである. また $\mathcal{X}$ は $d+1$ 次元だから, $\text{CH}_1(\mathcal{X}) = \text{CH}^d(\mathcal{X})$ であることに注意しておく. 定理 2 の証明, および定理 2 から定理 1 を導く過程では次の 2 つの補題が重要である:

補題 3 ([SS2] Theorem 4.2) $\mathcal{X}$ は条件 (N) をみたす $\mathfrak{o}$ 上のスキームとする. このとき

(1) 次の条件 (N⁺) をみたす超曲面切断 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ が存在する:

(N⁺) $\mathcal{Y}$ は (N) をみたし, $\mathcal{Y} \cup (\mathcal{X}_s)_{\text{red}}$ は $\mathcal{X}$ 上の単純正規交叉因子である.

(2) ((1) の精密化) $Y_1, Y_2, \dots, Y_r$ を $(\mathcal{X}_s)_{\text{red}}$ の既約成分とする. $1 \leq a \leq d$ かつ $1 \leq i_1 < \dots < i_a \leq r$ であるような整数の組 $(a, i_1, \dots, i_a)$ に対して

$$Y_{i_1, \dots, i_a} := Y_{i_1} \cap \dots \cap Y_{i_a}$$

とおく. 次の 3 条件をみたす閉部分スキーム $W \subset \mathcal{X}$ を考える.

- (i) W は正則な整スキーム $W_1, \dots, W_m$ の直和 (非交和) である.
- (ii) $1 \leq a \leq d, 1 \leq i_1 < \dots < i_a \leq r$ かつ $1 \leq \nu \leq m$ であるような整数の組 $(a, i_1, \dots, i_a, \nu)$ に対して, $W_\nu \not\subset Y_{i_1, \dots, i_a}$ ならば $W_\nu \times_X Y_{i_1, \dots, i_a}$ は空集合であるか, または正則かつ $\dim(W_\nu \times_X Y_{i_1, \dots, i_a}) < \frac{1}{2} \dim(Y_{i_1, \dots, i_a})$ である.
- (iii) $1 \leq a \leq d, 1 \leq i_1 < \dots < i_a \leq r$ かつ $1 \leq \nu \leq m$ であるような整数の組 $(a, i_1, \dots, i_a, \nu)$ に対して, $W_\nu \subset Y_{i_1, \dots, i_a}$ ならば $\dim(W_\nu) < \frac{1}{2} \dim(Y_{i_1, \dots, i_a})$ である.

このとき W を含み, (N⁺) をみたすような超曲面切断 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ が存在する.

補題 4 ([SS2] Theorem 3.2) $\mathcal{X}$ は条件 (N) をみたす $\mathfrak{o}$ 上のスキームとし, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ は (N⁺) をみたす超平面切断とする. ℓ は $\mathfrak{o}$ で可逆な素数とする. このとき

(1) $q \geq d + 2$ に対して $H^q(\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}) = 0$ である.

(2) $H^{d+1}(\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}, \mathbb{Q}_{\ell}/\mathbb{Z}_{\ell}(d)) = 0$ である.

補足 5 Artin-Gabber のアフィン Lefschetz 定理 ([FG] §5) は, $\mathfrak{o}$ 上相対次元 d であるような正則アフィンスキーム $\mathcal{U}$ と $q \geq d + 3$ に対して

$$H^q(\mathcal{U}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}) = 0$$

であることを主張しているが, 補題 4 は条件 (N⁺) の下でこれよりも強い消滅が起ることを主張している.

‘定理 2 $\Rightarrow$ 定理 1’ の証明. X を定理 1 の通りとし, X は条件 (N) をみたすような $\mathfrak{o}$ 上のモデル $\mathcal{X}$ を持つと仮定する. 定理 2 から次の命題を示す:

(†) $A_0(X) \hat{\otimes} \mathbb{Z}_{\ell} := \varprojlim_{n \geq 1} A_0(X)/\ell^n$ は, 任意の素数 $\ell \neq p$ に対して位数有限であり, 殆どすべての $\ell \neq p$ に対して自明である.

この命題は次の命題と同値であることに注意しておく:

(†') $\mathrm{CH}_0(X) \hat{\otimes} \mathbb{Z}_{\ell} := \varprojlim_{n \geq 1} \mathrm{CH}_0(X)/\ell^n$ は, 任意の素数 $\ell \neq p$ に対して $\mathbb{Z}_{\ell}$ と有限群の直和に同型であり, 殆どすべての $\ell \neq p$ に対して $\mathbb{Z}_{\ell}$ に同型である.

定理 1 は命題 (†) と逆極限に関する一般的な事実 ([JS] Lemma 7.7 参照) の帰結である.

(†) と (†') の証明. (†') を $d = \dim(X) \geq 1$ に関する帰納法で示す.

$d = 1$ の場合, X の Jacobi 多様体を Jac_X で表すと, (†) は同型 $A_0(X) \simeq \mathrm{Jac}_X(k)$ および Mattuck の定理 [Ma] から正しい (よって (†') も正しい).

$d \geq 2$ の場合, 仮定から条件 (N) をみたすような X の $\mathfrak{o}$ 上のモデル $\mathcal{X}$ を 1 つ取る. 補題 3 (1) から, 条件 (N⁺) をみたすような超曲面切断 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ が存在する. $Y := \mathcal{Y} \otimes_{\mathfrak{o}} k$ とおき, $\iota: \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{X}$ と $i: Y \hookrightarrow X$ をそれぞれ自然な閉埋め込みとする. ℓ を p と異なる素数とし, 次の可換図式を考える:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}_1(\mathcal{Y})/\ell^n & \xrightarrow{\text{pull-back}} & \mathrm{CH}_0(Y)/\ell^n \\ \downarrow \iota_* & & \downarrow i_* \\ \mathrm{CH}_1(\mathcal{X})/\ell^n & \xrightarrow{\text{pull-back}} & \mathrm{CH}_0(X)/\ell^n \end{array}$$

定理 2 によりこの図式の群はすべて位数有限であるから, i_* が全射ならば d に関する帰納法が成立する. i_* の全射性を示すには ι_* の全射性を示せばよい. そこで次の可換図式を考える:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{CH}_1(\mathcal{Y})/\ell^n & \xrightarrow{\iota_*} & \mathrm{CH}_1(\mathcal{X})/\ell^n & & \\ \downarrow \mathrm{cl}_{\mathcal{Y}, \ell^n} \wr & & \downarrow \mathrm{cl}_{\mathcal{X}, \ell^n} \wr & & \\ H^{2d-2}(\mathcal{Y}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d-1}) & \xrightarrow{\iota_*} & H^{2d}(\mathcal{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}) & \longrightarrow & H^{2d}(\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}) \quad (\text{exact}). \end{array}$$

ここで縦の矢印はサイクル写像であり, 定理 2 によって全単射である. 下側の系列はエタールコホモロジーの局所化完全系列であり, 最後の項は補題 4(1) から 0 である ($d \geq 2$ に注意). よって下側の ι_* は全射であるから, 上側の ι_* も全射である. 以上により, 定理 2 を仮定して (†) と (†') が証明された (すなわち定理 1 が得られた). $\square$

以下では定理 2 の証明の概略について説明する.

定理 2 の証明の概略. $\text{cl}_{\mathcal{X}, \ell^n}$ の全射性は (†') の証明と同様の議論 (補題 3(1) と補題 4(1) を用いた議論) によって $d = 1$ の場合に帰着される. $d = 1$ の場合は Brauer 群に関する Artin の底変換定理と有限体上の曲線の Hasse 原理によって $\text{cl}_{\mathcal{X}, \ell^n}$ の全射性が比較的容易に分かる ([SS2] §5 を参照).

以下では $\text{cl}_{\mathcal{X}, \ell^n}$ の単射性の証明について述べる. サイクル写像 $\text{cl}_{\mathcal{X}, \ell^n}$ の $n \geq 1$ に関する帰納極限

$$\text{cl}_{\mathcal{X}, \ell^\infty} : \text{CH}_1(\mathcal{X}) \otimes \mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow H^{2d}(\mathcal{X}, \mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Z}_\ell(d))$$

を考える. $\text{cl}_{\mathcal{X}, \ell^n}$ の単射性は次の 3 段階で証明される:

Step 1. $d = 2$ の場合に $\text{cl}_{\mathcal{X}, \ell^\infty}$ が単射であることを示す.

Step 2. $d = 2$ の場合に $\text{cl}_{\mathcal{X}, \ell^n}$ が単射であることを示す.

Step 3. $d \geq 3$ の場合に $\text{cl}_{\mathcal{X}, \ell^n}$ が単射であることを示す.

以下では Step 1 と Step 2 のみ説明する. Step 3 は Step 1 と同様の議論によって得られるので省略する ([SS2] §8 を参照).

Step 1. $\text{CH}_1(\mathcal{X}) \otimes \mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Z}_\ell$ の元 $\alpha = \sum_{i=1}^r [C_i] \otimes \lambda_i$ を固定し, $\text{cl}_{\mathcal{X}, \ell^\infty}(\alpha) = 0$ を仮定する. ただし各 C_i は $\mathcal{X}$ 上の 1 次元閉部分整スキームであり, 各 λ_i は $\mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Z}_\ell$ の元である. 状況を分かりやすくするため, まず次のような ‘非常に都合のよい’ 仮定を付け加える:

(*) すべての C_i を含み, 補題 3 の条件 (N⁺) をみたすような超曲面切断 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ が存在する.

この仮定の下で $\iota : \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{X}$ を自然な閉埋め込み射とし, 次の可換図式を考える:

$$\begin{array}{ccc} \text{CH}_1(\mathcal{Y}) \otimes \mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Z}_\ell & \xrightarrow{\iota_*} & \text{CH}_1(\mathcal{X}) \otimes \mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Z}_\ell \\ \text{cl}_{\mathcal{Y}, \ell^n} \downarrow & & \downarrow \text{cl}_{\mathcal{X}, \ell^n} \\ H^3(\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}, \mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Z}_\ell(2)) & \longrightarrow & H^2(\mathcal{Y}, \mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Z}_\ell(1)) \xrightarrow{\iota_*} H^4(\mathcal{X}, \mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Z}_\ell(2)) \quad (\text{exact}). \end{array}$$

ここで $\text{cl}_{\mathcal{Y}, \ell^n}$ の単射性は同型 $\text{CH}_1(\mathcal{Y}) \simeq \text{Pic}(\mathcal{Y})$ と $\mathbb{G}_m$ の Kummer 理論による. 下側の系列はエタールコホモロジーの局所化完全系列であり, 最初の項は $\mathcal{Y}$ に関する仮

定と補題 4(1) から 0 である. よって下側の ι_* は単射であり, 一方 $\mathcal{Y}$ がすべての C_i を含むことから, α は

$$\alpha = \iota_*(\beta) \quad (\beta \in \mathrm{CH}_1(\mathcal{Y}) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$$

の形で表される. これらの事実と仮定 $\mathrm{cl}_{\mathcal{X}, \ell^\infty}(\alpha) = 0$ から $\beta = 0$ であり, ゆえに $\alpha = 0$ である. よって仮定 $(*)$ の下で $\alpha = 0$ が示された.

仮定 $(*)$ なしで $\alpha = 0$ を示すには, 以下のようにする. まず初等的な移動の議論 ([SS2] §7 を参照) によって C_i 達を $\mathfrak{o}$ 上平坦なものに取り換える. 次に C_i たちの特異点を閉点に沿ったブローアップの列

$$\mathcal{X}' = \mathcal{X}_m \longrightarrow \mathcal{X}_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{X}_1 \longrightarrow \mathcal{X}_0 = \mathcal{X}$$

によって還元する. これらのスキームはすべて条件 (N) をみたすことに注意しよう. C_i の強変換 $\tilde{C}_i \subset \mathcal{X}'$ を用いて

$$\alpha' := \sum_{i=1}^r [\tilde{C}_i] \otimes \lambda_i \in \mathrm{CH}_1(\mathcal{X}') \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$$

というサイクルを考える. 補題 3(2) によって $\tilde{C}_i$ たちをすべて含み, 条件 (N^+) をみたすような超曲面切断 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}'$ が存在する. $E_1, E_2, \dots, E_b$ を $(\mathcal{X}'_s)_{\mathrm{red}}$ の既約成分で $(\mathcal{X}_s)_{\mathrm{red}}$ の既約成分に対応しないものとし, $W_j := E_j \cap \mathcal{Y}$ と定める. $\dim(\mathcal{X}') = 3$ なので, $W_1, W_2, \dots, W_b$ は $\mathcal{Y}$ 上の空でない正則な 1 次元閉部分スキームである. このとき仮定 $\mathrm{cl}_{\mathcal{X}, \ell^\infty}(\alpha) = 0$ (必ずしも $\mathrm{cl}_{\mathcal{X}', \ell^\infty}(\alpha') = 0$ ではない) と $(*)$ の場合と同様の議論によって

$$\alpha' = \sum_{j=1}^b [W_j] \otimes \lambda'_j \in \mathrm{CH}_1(\mathcal{X}') \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \quad (\lambda'_j \in \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$$

と表され, ここから

$$\alpha = \pi_*(\alpha') = 0 \quad (\pi : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X})$$

が得られる (詳細は [SS2] §8 を参照). 以上で Step 1 が完了する.

Step 2. 補題 3(1) によって条件 (N^+) をみたすような超曲面切断 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ をとり, 次の完全系列の可換図式を考える:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{CH}_1(\mathcal{Y}) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell & \xrightarrow{\iota_*} & \mathrm{CH}_1(\mathcal{X}) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell & \longrightarrow & \mathrm{CH}^2(\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \mathrm{cl}_{\mathcal{Y}, \ell^\infty} & & \downarrow \mathrm{cl}_{\mathcal{X}, \ell^\infty} & & \downarrow \mathrm{cl}_{\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}, \ell^\infty} & & \\ H^2(\mathcal{Y}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1)) & \xrightarrow{\iota_*} & H^4(\mathcal{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) & \longrightarrow & H^4(\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)). & & \end{array}$$

上下の列はそれぞれ Chow 群とエタールコホモロジーの局所化完全系列である. $\text{cl}_{\mathcal{Y}, \ell^\infty}$ が全単射, かつ $\text{cl}_{\mathcal{X}, \ell^\infty}$ がステップ 1 によって単射であるから, $\text{cl}_{\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}, \ell^\infty}$ は単射である. 一方, 補題 4(1) から $H^4(\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ なので, $\text{cl}_{\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}, \ell^\infty}$ の単射性と合わせて

$$\text{CH}^2(\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell = 0 \quad (2.1)$$

である. ここで次の一般的な補題を用いる:

補題 6 ([SS2] Lemma 8.7) Z を有限次元, ネーターかつ正則な整スキームとし, ℓ を Z 上可逆な素数とする. このとき次の完全系列が存在する:

$$H^3(Z, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \longrightarrow \text{U}(Z, \ell^n) \longrightarrow \text{CH}^2(Z)/\ell^n \xrightarrow{\text{cl}_{Z, \ell^n}} H^4(Z, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}).$$

ただし $\text{U}(Z, \ell^n)$ は次で定義される Z の不分岐コホモロジー群である:

$$\text{U}(Z, \ell^n) := \text{Ker} \left(\partial : H^3(\eta, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \rightarrow \bigoplus_{x \in Z^1} H^2(x, \mu_{\ell^n}) \right).$$

右辺の η は Z の生成点を表し, ∂ はガロアコホモロジーの境界写像を表す.

補題 6 から次の完全系列が存在する ($\text{U}(Z, \ell^\infty) := \varinjlim_{n \geq 1} \text{U}(Z, \ell^n)$):

$$H^3(\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \longrightarrow \text{U}(\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}, \ell^\infty) \longrightarrow \text{CH}^2(\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell.$$

補題 4(2) によってこの系列の最初の群は 0 であり, (2.1) によって最後の群も 0 だから $\text{U}(\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}, \ell^\infty) = 0$, ゆえに

$$\text{U}(\mathcal{X}, \ell^\infty) \subset \text{U}(\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}, \ell^\infty) = 0,$$

すなわち $\text{U}(\mathcal{X}, \ell^\infty) = 0$ である. さらに Merkur'ev-Suslin の定理 [MS] によって

$$\text{U}(\mathcal{X}, \ell^n) \subset \text{U}(\mathcal{X}, \ell^\infty) \quad ([SS2] \text{ Lemma 8.8})$$

なので $\text{U}(\mathcal{X}, \ell^n) = 0$. したがって再び補題 6 から $\text{cl}_{\mathcal{X}, \ell^n}$ は単射であり, Step 2 が完了する. $\square$

以上で定理 2 の証明の概略を終了する.

3 応用

ここでは定理 2 の帰結を 2 つ挙げる. その他にも定理 2 は論文 [AS] において重要な役割を果たしていることを述べておく. $k, \mathfrak{o}, \mathbb{F}$ は前節の通りとする.

系 7 $\mathcal{X}$ を $\circ$ 上スムーズかつ射影的な整スキームとし,

$$X := \mathcal{X} \otimes_{\circ} k, \quad Y := \mathcal{X} \otimes_{\circ} \mathbb{F}$$

とおく. $j : X \hookrightarrow \mathcal{X}$ と $i : Y \hookrightarrow \mathcal{X}$ をそれぞれ標準的な埋め込み射とする. このとき $\circ$ で可逆な素数 ℓ に対して, 引き戻し写像

$$\mathrm{CH}_0(X)/\ell^n \xleftarrow{j^*} \mathrm{CH}_1(\mathcal{X})/\ell^n \xrightarrow{i^*} \mathrm{CH}_0(Y)/\ell^n$$

はいずれも全単射である.

証明. 次の可換図式を考える ($d := \dim(X) = \dim(Y)$):

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{CH}_0(X)/\ell^n & \xleftarrow{j^*} & \mathrm{CH}_1(\mathcal{X})/\ell^n & \xrightarrow{i^*} & \mathrm{CH}_0(Y)/\ell^n \\ \mathrm{cl}_{X,\ell^n} \downarrow & & \mathrm{cl}_{\mathcal{X},\ell^n} \downarrow \wr & & \mathrm{cl}_{Y,\ell^n} \downarrow \wr \\ H^{2d}(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}) & \xleftarrow{j^*} & H^{2d}(\mathcal{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}) & \xrightarrow{i^*} & H^{2d}(Y, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}). \end{array}$$

ただし次の事実を用いた:

- 上側の j^* は全射である. (初等的な事実)
- 下側の i^* は全単射である. (proper base-change theorem)
- 下側の j^* は単射である. (k の素元とのカップ積による切断がある)
- cl_{Y,ℓ^n} は全単射である. (加藤・齋藤 [KS])
- $\mathrm{cl}_{\mathcal{X},\ell^n}$ は全単射である. (定理 2)

系の主張はこれらの事実からただちに従う. □

系 8 $X \subset \mathbb{P}_k^N$ を k 上スムーズな完備交叉多様体 (complete intersection variety) とし, $\dim(X) \geq 2$ かつ X は k 上で良環元 (good reduction) をもつと仮定する. このとき任意の素数 $\ell \neq p$ に対して $A_0(X)$ は ℓ 可除である.

証明. $\ell \neq p$ とし, $Y/\mathbb{F}$ を X の環元とする. 系 7 によって

$$\mathrm{CH}_0(X)/\ell \simeq \mathrm{CH}_0(Y)/\ell$$

であるから, $\mathrm{CH}_0(Y)/\ell \simeq \mathbb{Z}/\ell$ を示せばよい. 有限体上の多様体の不分岐類体論 [KS] によって

$$H^1(\bar{Y}, \mathbb{Z}/\ell) = 0 \quad (\bar{Y} := Y \otimes_{\mathbb{F}} \bar{\mathbb{F}})$$

を示せば十分である. エタールコホモロジーの proper smooth base-change theorem によって

$$H^1(\overline{Y}, \mathbb{Z}/\ell) \simeq H^1(\overline{X}, \mathbb{Z}/\ell) \quad (\overline{X} := X \otimes_k \overline{k})$$

であり, X に関する仮定から右辺は 0 なので, 系の主張が得られる. $\square$

補足 9 系 8 において X が good reduction をもつという仮定は本質的である. 実際, 論文 [CTS] では $p \neq 3$ という仮定の下で, $A_0(X) \simeq \mathbb{Z}/3$ あるいは $(\mathbb{Z}/3)^{\oplus 2}$ であるような p 進体 k 上の 3 次超曲面 $X \subset \mathbb{P}_k^3$ の例が挙げられているが, その例では X は good reduction を持たない. なお論文 [SS3] では同じ形の超曲面で $p = 3$ の場合を計算している.

参考文献

- [AS] Asakura, M., Saito, S.: Surfaces over a p -adic field with infinite torsion in the Chow group of 0-cycles. *Algebra Number Theory* **1**, 163–181 (2007)
- [Ba] Bass, H.: Some problems in “classical” algebraic K -theory. In: *Algebraic K-theory, II: “Classical” algebraic K-theory and connections with arithmetic, Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972*, (Lecture Notes in Math. 342), pp. 3–73, Springer, Berlin, 1973
- [Be] Beilinson, A.: Higher regulators and values of L -functions. *J. Soviet Math.* **30**, 2036–2070 (1985)
- [BKL] Bloch, S., Kas, A., Lieberman, D.: Zero cycles on surfaces with $p_g = 0$. *Compositio Math.* **33**, 135–145 (1976)
- [Ch] Chow, W.-L.: On equivalence classes of cycles in an algebraic variety. *Ann. of Math.* **64**, 450–479 (1956)
- [CTR] Colliot-Thélène, J.-L., Raskind, W.: Groupe de Chow de codimension deux des variétés sur un corps de nombres: Un théorème de finitude pour la torsion. *Invent. Math.* **105**, 221–245 (1991)
- [CTS] Colliot-Thélène, J.-L., Saito, S.: Zéro-cycles sur les variétés p -adiques et groupe de Brauer. *Internat. Math. Res. Notices* 1996, 151–160

- [FG] Fujiwara, K.: A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber). In: Usui, S., Green, M., Illusie, L., Kato, K., Looijenga, E., Mukai, S., Saito, S. (eds.) *Algebraic Geometry, Azumino, 2001*, (Adv. Stud. in Pure Math. 36), pp. 153–184, Tokyo, Math. Soc. Japan, 2002
- [Fu1] Fulton, W.: Rational equivalence on singular varieties. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **45**, 147–167 (1975)
- [Fu2] Fulton, W.: *Intersection Theory. 2nd edition.* (Ergeb. der Math. und ihr. Grenzgeb. 3. Folge), Springer, Berlin, 1998
- [Ha] Hartshorne, R.: *Algebraic geometry.* (Grad. Texts in Math. 52), Springer, Berlin, 1977
- [JS] Jannsen, U., Saito, S.: Kato homology of arithmetic schemes and higher class field theory. Documenta Math. Extra Volume: *Kazuya Kato's Fiftieth Birthday*, 479–538 (2003)
- [dJ] de Jong, A. J.: Smoothness, semi-stability and alterations. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **83**, 51–93 (1996)
- [KS] Kato, K., Saito, S.: Unramified class field theory for arithmetic surfaces. Ann. of Math. **118**, 241–274 (1983)
- [Ma] Mattuck, M.: Abelian varieties over p -adic ground fields. Ann. of Math. **62**, 92–119 (1955)
- [MS] Merkur'ev, A. S., Suslin, A. A.: K -cohomology of Severi-Brauer Varieties and the norm residue homomorphism. Math. USSR Izv. **21**, 307–340 (1983)
- [Mu] Mumford, D.: Rational equivalence of 0-cycles on surfaces. J. Math. Kyoto Univ. **9**, 195–204 (1968)
- [RS] Raskind, W., Spiess, M.: Milnor K -groups and zero-cycles on products of curves over p -adic fields. Compositio Math. **121**, 1–33 (2000)
- [SS1] Saito, S., Sato, K.: A p -adic regulator map and finiteness results for arithmetic schemes. Documenta Math. Extra Volume: *Andrei A. Suslin's Sixtieth Birthday*, 525–594 (2010)
- [SS2] Saito, S., Sato, K.: A finiteness theorem for zero-cycles over p -adic fields. Ann. of Math. **172**, 1593–1639 (2010)

- [SS3] Saito, S., Sato, K.: Zero-cycles on varieties over p -adic fields and Brauer groups.
<http://front.math.ucdavis.edu/0906.2273>
- [SSu] Saito, S., Sujatha, R.: A finiteness theorem for cohomology of surfaces over p -adic fields and an application to Witt groups. In: Jacob, B. and Rosenberg, A. (eds.) *Algebraic K-Theory and Algebraic Geometry: Connections with quadratic forms and division algebras, Santa Barbara 1992*, (Proc. of Sympos. Pure Math. 58, Part 2), pp. 403–416, Amer. Math. Soc., Providence, 1995.
- [Y] Yamazaki, T.: On Chow and Brauer groups of a product of Mumford curves. *Math. Ann.* **333**, 549–567 (2005)