

配置空間の一意化 - 超幾何積分

YOSHIDA Masaaki

九大数理 吉田 正章

皆さんのお話はリー群 G から出発されました。表現の分類, Whittaker, Wave, spherical 関数等の研究; それらはリッチな数学です。だけれども後指をさされません。

私の今日の話は線型関数の(複素)中の積の積分から始ります。

$$\int \prod l_j^{\alpha_j}$$

こんなものを考えて何かいいことがあるのでしょうか。なぜこんなものを調べなくてはいけないのか皆様を納得させる理由を私は持っていません。私自身こんなことをやっていていいのだろうかといつも考えています, 限界も知っているつもりです。一番簡単な例

$$\int t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (\text{Beta}), \quad \int t^x (1-t)^x (1-xt)^x dt \quad (\text{超幾何})$$

が特殊関数と名の付く本多比工学部向け数学概論の教科書の最初の10頁以内に出ているとか言うことは, あまり説得力が

あるとは思っていません。

御存知のように数学には I, II, III, IV の 4 つの type があります。

	大切	大切でない
面白い	I	III
面白くない	II	IV

保型形式の Fourier 展開の係数を調べるというのは、大切に面白いに決ってますから I 型です。しかし、もし Casimir op. や shift op.'s の合成を書いてみたら、1 つの係数で 10 頁かかったとなると、だんだん II $\rightarrow$ IV となってゆきます。もし root 系の分類が Bourbaki の本の最後の数頁でなく、小さな font で印刷しても東京都の電話帳みたいになっていたら、root 系に関する数学も I 型とは言えないでしょう。

私は III 型の数学を目指しています。大切でないかもしれないので、面白くなかったら IV 型です。今日は上に言った積分を使って、配置空間を研究をします。うまくゆく保障は何もありません。実は殆ど人の場合だめなのです。

定義 The configuration space of n points (hyperplanes) in general position on $\mathbb{P}^{k-1}$ とは

$$X(k, n) := GL(k) \setminus \left\{ x \in M(k, n) \mid \forall k\text{-minor} \neq 0 \right\} / H(n).$$

すぐ分るようにこの空間は $\mathbb{C}^{\overset{k \times n \text{ 行列}}{(k-1)(n-k-1)}}$ の Zariski 閉集合です。 $\uparrow$
対角型 $GL(n)$

例. $X(2,4) \simeq \mathbb{P}^1 - \{3 \text{ 点}\},$

$X(2,5) \simeq \mathbb{P}^2 -$ .

記号, 約束: $\mathbb{P}^{k-1} \ni t_1 : \dots : t_{k-1} : t_k = 1, \quad X = (x_{ij}) \in M(k, n)$ に対して,

$$l_j = \sum_i x_{ij} t_i, \quad l_n = 1,$$

i.e. n 番目の超平面は無限遠とする.

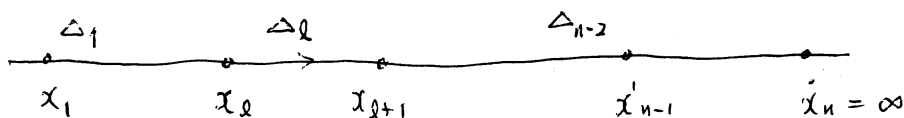
我々の積分は,

$$u_\Delta(x) = \int_\Delta \prod_{j=1}^{n-1} l_j^{\alpha_j-1} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{k-1}$$

である。積分域 Δ は後で説明する。この積分は左 $GL(k)$, 右 $H(n)$ の作用で不変でない。不変な型に書くこともできる (松本 invariant form) が今日は Δ をたくさん取ってきて, u_Δ 達の比を考えるので, このままにしておく。

$k=2$ (積分は1次元)

$$u_l(x) = \int_{\Delta_l} \prod_{j=1}^{n-1} (x_j - t)^{\alpha_j-1} dt \quad l=1, \dots, n-2.$$

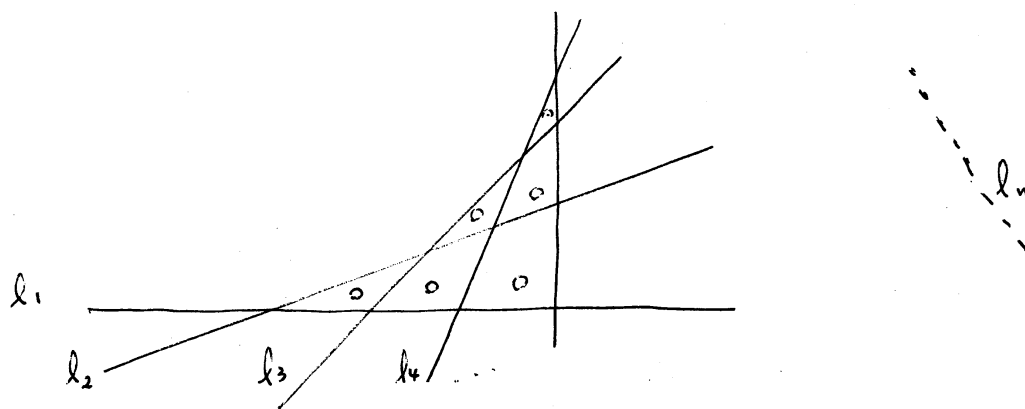


u_l 達をならべて (多価写像)

$$\mathcal{G} : X(2, n) \ni X \mapsto u_1(x) : \dots : u_{n-2}(x) \in \mathbb{P}^{n-3}$$

を考える.

$k=3$ (積分は2次元). 積分域は以下の通り:



一般の k では $l_1, \dots, l_{n-1}$ で囲める有界域

$$\Delta_1, \dots, \Delta_r, \quad r = \binom{n-2}{k-1}$$

で積分し, $u_j(x) := u_{\Delta_j}(x)$, 多価写像

$\varphi: X(k, n) \ni x \mapsto u_1(x) : \dots : u_r(x) \in \mathbb{P}^{r-1}$
を考える.

配置空間の一意化: $\alpha_j \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ をうまくとって, 像 $\text{Im } \varphi$ がある対称領域 D の open dense subset, $D \subset \mathbb{P}^{r-1}$ は equivariant embedding, そして φ^{-1} が一価, i.e.

$$X(k, n) \xrightarrow[\sim]{\varphi} (D - \text{fixed}(\Gamma)) / \Gamma$$

($\Gamma \subset \text{Aut}(D)$, discrete) としたい.

何の理由もありません. そうなったらいいなあと思ったまでです. そうなる例は,

$$\begin{array}{llll} k=2, & n=4 & \infty \text{ヶ} & D = B_1 (\simeq H \leftarrow \text{上半平面}) \\ & n=5 & 27 \text{ヶ} & D = B_2 \leftarrow \text{Ball} \end{array}$$

$\vdots$ だんだん減って $\vdots$ 領域は I 型
 $n=8$ 14 $D=B_5 \leftarrow$ 5次元 Ball
 $n \geq 9$ なし. ... 数学は IV 型

ところで, $k=2$ のときは, $u_1, \dots, u_{n-2}$ は Appell-Lauricella の
 超幾何微分方程式 F_D^{n-3} の線型独立解を与える. 解が方程式
 の rank 分 explicit に分っているのに方程式をみたすことなん
 かどうでもよいではないかと考えるのは間違いです. まっそ
 れはともかく, この方程式系を

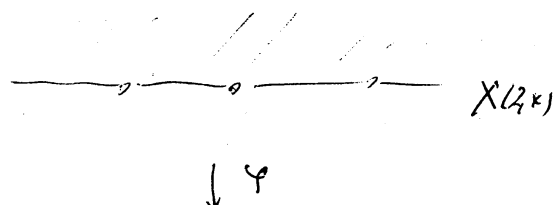
$$E(2, n; \alpha) \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

と書きます.

典型例 1. $E(2, 4; \pi/2)$, $\pi/2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

このとき積分は elliptic curve の periods とも思える. 2つの
 積分によって,

$$X(2, 4) \xrightarrow[\sim]{\varphi} H/\Gamma(2)$$



φ^{-1} を theta 函数で表す話 15 次の

松本氏の話参照.

典型例 2. $E(2, 8; 1/4)$

$$X(2, 8) \xrightarrow[\sim]{\varphi} B_5/\Gamma \quad \Gamma \leftarrow \mathbb{Z}[i]$$

φ^{-1} : M 氏は「自分が本気になるれば表示を得られる」と言っている.

$k \geq 3$ のとき一番簡単なのが $X(3, 6)$. 積分域は 6 つ

$$\begin{array}{c} \varphi : X(3, 6) \ni x \mapsto u_1(x), \dots, u_6(x) \in \mathbb{P}^{6-1} \\ \uparrow \\ \text{4次元} \end{array}$$

$\text{Im } \varphi$ は $\mathbb{P}^5$ の超曲面. これが対称領域になるためには二次超曲面に入っているといけるが, その為には

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_6 = 1/2$$

でないとはいけない。(これは $u_k(x)$ のみたす微分方程式系のある不変量を計算することにより分る). これ一通りしかないのは実に残念だけとしようがない. この場合積分は $K3$ 曲面の periods を与えている. (generic には transcendental cycles は 6 つ). 像は 2 次超曲面 $Q \subset \mathbb{P}^5$ の ^{non} compact dual $D \subset Q$ に open dense に入る. D は IV 型領域. 大事なことを忘れていました. この頁からは 松本圭司氏と佐々木武氏との共同研究 [MSY] の紹介です. 即ち $E(3, 6; 1/2)$ の解を 6 つならべて比をとる写像 φ により

$$X(3, 6) \xrightarrow{\sim} D/\Gamma, \quad D \subset_{\text{open}} Q_{\sharp} \subset \mathbb{P}^5.$$

一方 D は 4 次元 IV 型故 I 型領域

$$H_2 = \{z \in M(2, 2) \mid \frac{z - {}^t \bar{z}}{2i} > 0\}$$

と同型故

$$X(3, 6) \xrightarrow[\sim]{\varphi} H_2/\Gamma \quad \mathbb{Z}[i]$$

φ^{-1} を theta で表す語は次の松本氏の講演.

とも思える。 $X(3,6)$ の元 $l=(l_1, \dots, l_6)$ である conic に接するものの全体は, non-singular conic は $PGL(3)$ を modulo にして一意故, conic ($\simeq \mathbb{P}^1$) 上の 6 点の configuration space 即 $X(2,6)$ とみなせる。上の同型で, それは Siegel [↑]3次元

上平空間 $\mathbb{S}_2 = \{z \in H_2 \mid z = {}^t z\}$ に対応している:
 $\swarrow$ III 型領域

$$\begin{array}{ccc} X(3,6) & \xrightarrow{\sim} & H_2 / \Gamma \quad \cdots U(2,2) \\ \downarrow & 2 & \downarrow \\ X(2,6) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{S}_2 / \Gamma(2) \quad \cdots Sp_2(\mathbb{R}) \end{array}$$

$k \geq 3$ で, $(k,n) = (3,6)$ 以外に超幾何積分を使って, 配置空間 $X(k,n)$ の一意化は, 出来ない ことが, 山口佳三氏により証明されてしまった。そこで使われた微分方程式の理論は興味深いが, 何とも残念である。

文献は松本至司氏のそれを参照して下さい。 以上