

準位統計の普遍性

—弱磁場量子グラフを用いた解析—

東京大学 理工学科 齊藤圭司

大阪大学 理学部 永尾太郎

1 はじめに

自然界では単振動のような単純な挙動を示す系は、ごく希であり、長時間の振舞は大抵の場合は複雑怪奇である。古典系では初期敏感性に特徴づけられるカオスはその複雑さをよく説明する。量子系ではそのような古典系の力学的特徴が、エネルギーレベルの統計性に反映される。Level の統計性は、その力学系と同じ対称性を持つ Random matrix のそれと等しくなると考えられている。この『普遍的』な対応関係は Bohigas-Giannoni-Schmit らにより予想されて以来、数値的な範囲で良く再現され、現在では確立された概念と言って良い。

しかしながら、これらの関係に対する完全な証明は依然皆無である。Berry は状態密度に対する半古典表式を使い、対角近似と言われる範囲で spectral form factor の leading term を導出した [1]。そして近年非対角項の取扱をめぐって、Hikami Box[2] を形成する非自明な古典軌道が有限な非対角項の寄与を与えるかも知れないと言う提案が Sieber-Richter らによって提案された [3]。

我々は様々な物理量を解析的に厳密に計算できる量子グラフを用い、彼らの idea を採用した計算を行った。とくに弱磁場下で時間反転対称性が破れたとき、はたして form factor が Pandey-Mehta の表式 [4] になるかを中心に議論する。

1.1 モデル

Vertex とそれが Bond で繋がれており、その上での量子力学を考える [5]。グラフの取り方としてはグローバルに結合させるやり方や、星状にグラフを作る Star Graph [6] などが代表例である。Bond 上では粒子は自由粒子として振舞い、境界 (vertex) では境界条件が定められているとする。つまり ℓ 番目の Vertex と m 番目の Vertex を結ぶ Bond 上では、Schrödinger 方程式、

$$\left(-i\frac{d}{dx} - A\right)\Psi(x_{\ell m}) = k^2\Psi(x_{\ell m}), \quad (1)$$

が成立する。それゆえ Bond (ℓm) 上では波動関数 $\Psi(x_{\ell m})$ は

$$\exp(ikx_{\ell m} + iAx_{\ell m}), \quad (2)$$

に比例する。この波動関数の Bond 間の Amplitude は各 Vertex 上の境界条件で決まる。 (ℓ, i) で vertex i に amplitude 1 で来た波はどんな波でも (i, m) に複素振幅 $\sigma_{\ell m}^{(i)}$ の波を作るとする。そのとき Bond (ℓ, m) と Bond (ℓ', m') をつなぐプロパゲーターは $S_{\ell m, \ell' m'}$ は

$$S_{m' \ell', \ell m} = \sigma_{m' m}^{(\ell)} \exp(ikL_{\ell m} + iAL_{\ell m}) \delta_{\ell, \ell'} \quad (3)$$

と表される。

Vertex 及び Bond の数は以下のように定義する。

$$\# \text{Vertex} = N \quad (4)$$

$$\# \text{Bond} = B \quad (5)$$

1.2 form factor

プロパゲーター $S_{m' \ell', \ell m}$ を使えば、Spectral form factor は以下のように書ける [7]。ここで $\tau = \frac{t}{B}$ 。

$$\begin{aligned} K(\tau) &= B^{-1} \langle |\text{Tr} S^t|^2 \rangle \\ &= \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{1}{B\kappa} \sum \int_0^\kappa dk \sigma_{p_t p_2}^{(p_1)} e^{iL_{p_1 p_2}(k+A_{p_1 p_2})} \sigma_{p_1 p_3}^{(p_2)} e^{iL_{p_2 p_3}(k+A_{p_2 p_3})} \dots \\ &\quad \dots \sigma_{p_{t-1} p_1}^{(p_t)} e^{iL_{p_t p_1}(k+A_{p_t p_1})} \sigma_{q_t q_2}^{(q_1)*} e^{-iL_{q_1 q_2}(k+A_{q_1 q_2})} \dots \dots \sigma_{q_{t-1} q_1}^{(q_t)*} e^{-iL_{q_t q_1}(k+A_{q_t q_1})} \\ &= \frac{t}{B} \sum_{P, Q} A_P A_Q^* \exp[i(L_{p_1 p_2} A_{p_1 p_2} + \dots + L_{p_t p_1} A_{p_t p_1} - L_{q_1 q_2} A_{q_1 q_2} - \dots - L_{q_t q_1} A_{q_t q_1})] \end{aligned}$$

ここで

$$A_P := |\sigma_{p_t p_2}^{(p_1)}|^2 \dots |\sigma_{p_{t-1} p_1}^{(p_t)}|^2, \quad (7)$$

$$A_Q := |\sigma_{q_t q_2}^{(q_1)}|^2 \dots |\sigma_{q_{t-1} q_1}^{(q_t)}|^2. \quad (8)$$

である。ここに P は Q 同じ長さを持つあらゆる周期軌道を表す。したがって $K(\tau)$ をいかに計算するかという問題は、無限個の周期軌道をいかに足し合わせるかと等価になる。

1.3 Vertex での散乱行列

Vertex の散乱行列は Unitary 行列であるという条件のもとに作られる。何をとりかは任意性があるが、極端な場合を除いて何をとりかで Form factor の結果は変わらない。今は Global coupling で Discrete Fourier Transform (DFT) の境界条件をとる。DFT は

$$\sigma_{mn}^{(\ell)} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i m n / N} \quad (9)$$

と定義される。このとき以下の sum rule が自然になりたつ。

$$M_{\alpha a, b \alpha}^{\ell'-2} = \sum_{p_3, \dots, p_{\ell'}} |\sigma_{\alpha p_3}^{(a)}|^2 |\sigma_{a p_4}^{(p_3)}|^2 \dots |\sigma_{p_{\ell'-2} \alpha}^{(b)}|^2 = \sum_{p_3, \dots, p_{\ell'-2}} \left(\frac{1}{N}\right)^{\ell'-2} = \frac{1}{B} \quad (10)$$

2 Global coupling model で form factor の計算

以下では Global coupling の計算を行う。したがって $B = N^2$ であり、またゲージ $A_{\ell,k}$ の大きさはすべて一定 A をとるものとする。

2.1 1 次（対角項）

対角項は $P = Q$ および $\bar{P} = Q$ のみを取ることを意味する。ここに $\bar{P}$ は軌道 P の時間反転した軌道を意味する。そのとき form factor の 1 次の項 $K_1(\tau)$ は

$$K_1(\tau) = \frac{t}{B} \sum_P |A_P|^2 \left[e^{2i \sum_{\ell} L_{p\ell p_{\ell+1}} A_{\ell p_{\ell+1}}} + 1 \right] \quad (11)$$

と書ける。さらに計算すると容易に以下が示される。

$$K_1(\tau) = \frac{t}{B} \frac{1}{N^t} \left[N^t + \text{Tr} g^t \right] = \frac{t}{B} \left[1 + \left(\frac{1}{N} + \left(1 - \frac{1}{N} \cos A \right) \right)^t \right] \quad (12)$$

ここで 転送行列 g を以下のように定義して用いた。

$$g_{k,\ell} = e^{iA_{k,\ell}} \quad (13)$$

2.2 2 次

2 次の計算では Hikami box [2] を形成する軌道ペアを足しこむ。Hikami box とは、軌道がいったん交わり、反発する軌道と交差する軌道の 2 種類を生成するような点のことである。ここで 2 種類の軌道は軌道の形は同じだが、Hikami box により向きが部分的に変わっている。Hikami Box は一般には周期軌道に複数個入ってもかまわないが、2 次に寄与するのは簡単な考察から 1 個の場合のみである。つまり、 P, Q の軌道は Hikami box をはさんで 2 つのループから形成され、そのうち 1 つのループの向きが互いに異なる。軌道 P と Q が Hikami box を形成しても Hikami Box を介した 2 つのループのうち 1 つが self-retracing 軌道のときは、1 次の計算に含まれていることに注意しなければならない。その寄与を除かないと以下のように寄与が消える。以下では Hikami Box は Vertex α で表している。

$$\begin{aligned} K_2(\tau) + K_2^{\text{srt}}(\tau) &= \frac{t}{B} \sum_{t'=4}^{t-2} N^{t'-4} \left(\frac{1}{N} \right)^{t-2} \\ &\quad \sum_{p_{t'+2}, \dots, p_{t-1}} \sum_{\alpha abcd} (1 - \delta_{cd}) \sigma_{da}^{(\alpha)} \sigma_{bc}^{(\alpha)} \sigma_{ca}^{(\alpha)*} \sigma_{bd}^{(\alpha)*} \exp \left[2i \sum_{\ell=t'}^t L_{p\ell p_{\ell+1}} A_{\ell p_{\ell+1}} \right] \\ &= \frac{t}{B} \sum_{t'=4}^{t-2} N^{t'-t-2} \left[-N^3 \text{Tr} g^{t-t'-1} + N^2 \sum_{\alpha cd} \delta_{cd} g_{\alpha c} \left[g^{t-t'-1} \right]_{c,d} g_{d\alpha} \right] = 0 \quad (14) \end{aligned}$$

これは $K_2(\tau) = -K_2^{\text{srt}}(\tau)$ を意味する。したがって

$$K_2(\tau) = -K_2^{\text{srt}}(\tau) = \frac{t^2}{B} \left[N^{1-t} \text{Tr} \left(g^{t-3} \right) + N^{2-t} \text{Tr} \left(g^{t-4} \right) \right] \quad (15)$$

を得ることができる。以上から $N \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty, \frac{A^2 t}{2} = \text{一定}$ なるスケーリングを用いると、

$$\begin{aligned}
 K_1 + K_2 &= \frac{t}{B} \left[1 + \left(\frac{1}{N} + \left(1 - \frac{1}{N} \cos A \right) \right)^t \right] \\
 &\quad - \frac{t^2}{B^2} \left[\left(1 - \frac{1}{N} \cos A \right)^{t-3} + \left(1 - \frac{1}{N} \cos A \right)^{t-4} \right] \\
 &\rightarrow \tau \left[1 + e^{-A^2 t/2} - 2\tau e^{-A^2 t/2} \right]
 \end{aligned} \tag{16}$$

を得る。

2.3 3次までの結果

3次への寄与は Hikami box が2つでループが3つの場合と、Hikami box が1つでループ状の軌跡が3つの場合である。詳細な計算を省略すると、3次への寄与は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 K_3 &= K_{Tr3b}^{PQ} + K_{Tr3b}^{P\bar{Q}} + K_{Tr3c}^{PQ} + K_{Tr3c}^{P\bar{Q}} \\
 K_{Tr3b}^{PQ}(\tau) &= 2\tau^3 e^{-bt} \\
 K_{Tr3b}^{P\bar{Q}}(\tau) &= \frac{t^2}{2B^3} \sum \delta(t - \sum t_i) \\
 &\quad \times \left[\left(N^{-(t_3-2)} \text{Tr}(g^{t_3-2}) - N^{-t_3} \text{Tr}(g^{t_3}) \right) - N^{3-t_3+\lfloor \frac{t_3-2}{2} \rfloor} \right] \\
 &\quad \times \left[\left(N^{-(t_1-2)} \text{Tr}(g^{t_1-2}) - N^{-t_1} \text{Tr}(g^{t_1}) \right) - N^{3-t_1+\lfloor \frac{t_1-2}{2} \rfloor} \right], \\
 K_{Tr3c}^{PQ}(\tau) &= -\frac{t^2}{2B} \sum \delta(t - t_1 - t_2 - t_3) N^{-t_1-t_2-1+\lfloor \frac{t_1-2}{2} \rfloor} \text{Tr}(g^{t_2}) \\
 K_{Tr3c}^{P\bar{Q}}(\tau) &= \frac{t^2}{B} \sum \delta(t - t_1 - t_2 - t_3) N^{-t+3} N^{t_2-3} \left[\text{Tr}(g^{t_3-2}) \left(\text{Tr}(g^{t_1-2}) - N^{-2} \text{Tr}(g^{t_1}) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} N^{-2} \text{Tr}(g^{t_1-2}) \text{Tr}(g^{t_3}) + \frac{1}{2} N^{-3} \sum_{\alpha} [g^{t_1}]_{\alpha, \alpha} [g^{t_3}]_{\alpha, \alpha} \right] \\
 &\quad - \frac{t^2}{B} \sum \delta(t - t_1 - t_2 - t_3) N^{-t+3} N^{t_2-3} N^{\lfloor \frac{t_3-2}{2} \rfloor} \left[N \text{Tr}(g^{t_1-2}) - N^{-1} \text{Tr}(g^{t_1}) \right] \\
 &\quad - \frac{t^2}{B} \sum \delta(t - t_1 - t_2 - t_3) N^{-t+3} N^{t_2-3} N^{\lfloor \frac{t_1-2}{2} \rfloor} \left[N \text{Tr}(g^{t_3-2}) - \frac{1}{2} N^{-1} \text{Tr}(g^{t_3}) \right]
 \end{aligned}$$

これから、 $b = \frac{A^2}{2}$ とすると、3次までで form factor は以下のようにあらわされることになる。

$$K(\tau) = \tau(1 + e^{-bt/2}) - 2\tau^2 e^{-bt/2} + \tau^3 \left[-2e^{-bt} - e^{-bt} f(t) \right] + O(\tau^4) \tag{17}$$

ここで

$$f(t) = \frac{bt}{2} + \frac{(bt)^2}{6} \dots \tag{18}$$

3 Random Matrix の結果との比較

ここでは Fourier 変換をして random matrix からの $K(\tau)$ の表式を求める。 $Y(r; \rho)$ の Fourier 変換を $Y(k; \rho)$ とすると、 $K(k)$ は

$$K(k) = 1 - Y(k; \rho) \quad (19)$$

と書かれる。

$$Y(r; \rho) = \left(\frac{\sin \pi r}{\pi r} \right)^2 - 1/\pi^2 \int_0^\pi dk_1 \int_\pi^\infty dk_2 \left(\frac{k_1}{k_2} \right) \sin(k_1 r) \sin(k_2 r) e^{2\rho^2(k_1 - k_2)(k_1 + k_2)} \quad (20)$$

である。これに Fourier 変換を施すと、以下のように表される。

$$Y(k; \rho) = 1 - k + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi dk_1 \int_\pi^\infty dk_2 \left(\frac{k_1}{k_2} \right) e^{2\rho^2(k_1 - k_2)(k_1 + k_2)} \\ \times [\delta(k_1 + k_2 + \bar{k}) + \delta(-k_1 - k_2 + \bar{k}) - \delta(k_1 - k_2 + \bar{k}) - \delta(-k_1 + k_2 + \bar{k})] \quad (21)$$

ここで $\bar{k} = 2\pi k$ である。 $c = \rho^2 \bar{k}$ とおくと、 $Y(k; \rho)$ は小さな $\bar{k}$ に対して

$$Y(k; \rho) = 1 - k - F(\bar{k}) \quad (22)$$

$$F(\bar{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi - \bar{k}}^\pi dk_1 \frac{k_1}{k_1 + \bar{k}} e^{-2c(2k_1 + \bar{k})} \quad (23)$$

を得る。さらに小さな $\bar{k}$ に対しては $F(\bar{k})$ は以下のように展開される。

$$F(\bar{k}) = F(0) + F'(0)\bar{k} + \frac{1}{2}F''(0)\bar{k}^2 + \frac{1}{3!}F'''(0)\bar{k}^3 + \dots, \quad (24)$$

こうして form factor の展開は以下ようになる。

$$K(k) \sim k + ke^{-4\pi c} - 2k^2e^{-4\pi c} + \left(\frac{8\pi^2}{3}c^2e^{-4\pi c} + 2e^{-4\pi c} \right) k^3. \quad (25)$$

τ と bt の言葉では $K(\tau)$ は以下ようになる。

$$K(\tau) = \tau + \tau e^{-bt} - 2\tau^2 e^{-bt} + \left(\frac{(bt)^2}{6} e^{-bt} + 2e^{-bt} \right) \tau^3. \quad (26)$$

ここで以下の関係を使った。

$$\tau = k \quad (27)$$

$$bt = 4\pi c. \quad (28)$$

したがって (17) で $f(t)$ の部分の寄与が食い違ってくる。しかし、 $b \rightarrow 0$ と $b \rightarrow \infty$ の GOE, GUE 極限では両者は一致することが分かる。

4 おわりに

本研究では磁場あり量子グラフを用いて、Form factor の GOE,GUE 両極限を滑らかに 1 つのパラメータでつないで計算した。その際無限個の周期軌道の和をいかに計算するかが課題であったわけであるが、ここでは Hikami box[8] に注目して系統立てて和を計算していった。その結果 3 次までの範囲で GOE,GUE の両極限でランダム行列の結果と一致する結果を得た。今回は Global Coupling の場合を扱ったが 2 次の範囲であれば (Sum rule を満たす範囲において) 任意のグラフに対して同じ結果を導くことができる。 b が有限の範囲において 3 次では Pandey-Mehta と食い違う項がでてくる。この理由の候補は 2 つあり得る。1 つ目は量子系の準位統計は弱磁場のとき本当は厳密には Pandey-Mehta ではないという理由であり、2 つ目は 3 次に寄与するもっと非自明な軌道の足し合わせが見落とされているため本来あうべき Pandey-Mehta に合わないのだという理由だ。我々の知る限り弱磁場のときに Pandey-Mehta がどれくらい精度よく量子系の準位統計を記述しているかを議論した精度よい数値計算の例がない。一方でランダム行列のコミュニティでは当然 Pandey-Mehta は正しいだろう、と思われている。 b が有限のときに果たして本当はどうなのか考察する必要があるだろう。

参考文献

- [1] M. V. Berry, Proc. R. Soc. London A400 229 (1985).
- [2] S. Hikami, Phys. Rev. B, **24** 2671 (1981).
- [3] M. Sieber and K. Richter, Physica Scripta, **T90** 128 (2001).
- [4] A. Pandey and M.L. Mehta, Commun. Math. Phys. **87** 449 (1983).
- [5] T. Kottos and U. Smilansky, Phys. Rev. Lett. **79** 4794 (1997).
- [6] G. Berkolaiko and J. P. Keating, J. Phys. A: Math. Gen. **32** 7827 (1999).
- [7] G. Berkolaiko, H. Schanz, and R. S. Whitney, Phys. Rev. Lett. **88** 104101-1 (2002)
- [8] T. Nagao and K. Saito, Phys. Lett. A311 353 (2003).