

208

多重特性根をもつ変数係数単独高階方程式
に対する Cauchy 問題について

阪大, 理, 鹿野 忠良

§ 1. 序

定数係数の方程式

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

に対する Cauchy prob. を考えると, Petrowsky の意味では勿論 Well posed である。今, 初期値として

$$(1.2) \quad u(0, x) = u_0(x) \in \mathcal{D}_L^1, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x) \in L^2$$

を与えると, 解として

$$(1.3) \quad u(t, x) \in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}_L^1) \cap \mathcal{E}_t^1(L^2)$$

は得られない。この事実は (1.1) が 2 重特性根 $\lambda = 0$ を持つことに由来している。

一般に, $B_{x,t}$ に係数をもつ方程式

$$(1.4) \quad Lu = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m u + \sum_{|\nu|+j \leq m, j \leq m-1} a_{\nu,j}(x,t) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u = f$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\nu_n}$$

に対する Cauchy prob. を考えよう。

定義 1.1 次の 1), 2) が成立するとき, (1.4) に対する Cauchy prob. は well posed in L^2 sense である。

1) 初期 data Ψ :

$$(1.5) \quad \Psi = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u(0,x) = u_j(x) \in \mathcal{D}_{L^2}^{m-j-1}, 0 \leq j \leq m-1 \right\}$$

及び $f(x,t) \in \mathcal{E}_t^0(L^2)$ に対して, $Lu = f$ があり, 一意の解

$$(1.6) \quad u(x,t) \in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}_{L^2}^{m-1}) \cap \mathcal{E}_t^1(\mathcal{D}_{L^2}^{m-2}) \cap \cdots \cap \mathcal{E}_t^{m-1}(L^2)$$

が $0 \leq t \leq T$ に存在する。

2) Energy 不等式

$$(1.7) \quad E(t; u) \leq C_T \left(E(0; u) + \int_0^t \|f(s)\| ds \right)$$

が成立する。ここに $E(t; u) = \sum_{j=0}^{m-1} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u(t) \right\|_{m-j-1}^2$ 。

次の定理が成立する。

定理 L の特性方程式

$$(1.8) \quad \lambda^m + \sum_{|\alpha|+j=m, j \leq m-1} a_{\alpha,j}(x,t) \xi^\alpha \lambda^j = 0$$

の根は, 任意の real $\xi \neq 0$ に対し 2 real, かつ重複度が一一定 (x, t, ξ) に関係しない) とする。更に, (1.8) は少くとも 1 の多重根をもつとする。この時, いくつかの低階作用素 B に対しても

$$(1.9) \quad (L_0 + B)u = f$$

に対する Cauchy prob. は not well posed in L^2 sense.

§2. Pseudo-differential operators.

1°. 次の条件 (P.1), (P.2) を満たす symbol

$$(2.1) \quad h(x, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j(x, \xi) |\xi|^{-\frac{j}{p}},$$

を考える。ここに p は正の整数とする。

$$(P.1) \quad h_j(x, \xi) \in C_{\beta}^{2k}, \quad \beta = +\infty, \quad j \geq 0.$$

$$(P.2) \quad M_{H_j} = \sum_{|\alpha| \leq 2k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\xi| \geq 1} \left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\alpha h_j(x, \xi) \right|$$

とある時, $\sum M_{H_j} \varepsilon^{\frac{j}{p}}$ は, 正の収束半径 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(H)$ をもつ。

そこで, $\hat{\gamma}(\xi) \in C^\infty$ を次の様な函数としよう。

$$\hat{\gamma}(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi| \geq R+1 \\ 0 & |\xi| \leq R, \end{cases}$$

かつ, $0 \leq \hat{\gamma}(\xi) \leq 1$. ことに $R > \varepsilon_0(H)^{-1}$.

$\hat{\gamma}(\xi)$ の Fourier 変換 γ は 1) の pseudo-differential operator である。

そこで, H_γ を

$$(2.2) \quad H_\gamma = \sum_{j=0}^{\infty} H_j \gamma \Lambda^{-\frac{j}{p}}$$

$$H_\gamma u = \int e^{2\pi i x \cdot \xi} h(x, \xi) \hat{\gamma}(\xi) \hat{u}(\xi) d\xi$$

で定義しよう。ことに H_j は $h_j(x, \xi)$ の symbol である特異積分作用素である。 H_γ は L^2 の有界作用素を与える。 H_γ を p.d.op. of type P と呼ぼう。

定義 2.1. Pseudo-differential operator H_γ が of order -1 であるとは, 定数 C_r が存在して

$$\|H_\gamma \Lambda^r u\| \leq C_r \|u\|$$

が成立つ時という。

Pseudo-differential operator of type P は, 次の性質をもつ。

(1) $(H_\gamma K_\gamma - (H_0 K)_\gamma) \Lambda$ は of order zero.

(2) $\inf_{x, \xi} |h_0(x, \xi)| = \delta > 0$ である。今 $\hat{u}(\xi) \in L^2$ だ $|\xi| \leq R (> \varepsilon_0(H)^{-1})$ の外に support をもたないとする。

$$(2.3) \quad \|H_\gamma u\| \geq \left(\frac{\delta}{2} - c_1 R^{-1} - c_2 \sum_{j=1}^{\infty} M_{H_j} \bar{R}^{-\frac{j}{p}} \right) \|u\|$$

が成立つ。

証明 $\|H_\gamma u\| \geq \|H_0 \gamma u\| - \sum_{j=1}^{\infty} \|H_j \gamma \Lambda^{-\frac{j}{p}} u\|.$

一方, H_0 は Calderón-Zygmund の特異積分作用素であるから,

$$\begin{aligned} \|H_0 \gamma u\| &= \|H_0 \Lambda(\gamma \Lambda^{-1}) u\| \\ &\geq \frac{\delta}{2} \|\Lambda(\gamma \Lambda^{-1}) u\| - c \|\gamma \Lambda^{-1} u\| \\ &\geq \frac{\delta}{2} \|u\| - c R^{-1} \|u\|. \end{aligned}$$

(3) $p \geq 2$ の時. $\operatorname{Re} h_0(x, \xi) = 0$, $\inf \operatorname{Re} h_1(x, \xi) = \delta > 0$ である。 $\{\hat{u}_n(\xi)\} \in$, $|\xi| = c_1 n$, $|\xi| = c_2 n$ ($c_1 < c_2$) なる球面を囲む領域に support をもち L^2 列である。十分大きな n に対し 2 次の式が成立つ。

$$(2.4) \quad \operatorname{Re}(H_\gamma \Lambda u_n, u_n) \geq c n^{1-\frac{1}{p}} \|u_n\|^2.$$

証明. $\operatorname{Re}(H_\gamma \Lambda u_n, u_n) \geq \operatorname{Re}(H_1 (\gamma \Lambda^{\frac{1}{p}}) \Lambda u_n, u_n) - \sum_{j=2}^{\infty} |(H_j \gamma \Lambda^{1-\frac{j}{p}} u_n, u_n)|.$

$$- \gamma (H_1 \gamma \Lambda^{1-\frac{1}{p}} u_n, u_n) = ([H_1, \Lambda^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}] \gamma \Lambda^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} u_n, u_n) + \\ + (H_1 \gamma \Lambda^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} u_n, \Lambda^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} u_n).$$

$$\operatorname{Re}(H_1 \gamma \Lambda^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} u_n, \Lambda^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} u_n) \geq \frac{\delta}{2} \|\Lambda^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} u_n\|^2.$$

従って, $[H_1, \Lambda^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}] \gamma \Lambda^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}$ は order zero の
ある意味で注意すれば,

$$\operatorname{Re}(H_\gamma \Lambda u_n, u_n) \geq c n^{\frac{1}{p}} \|u_n\|^2 - \sum_{j=2}^{\infty} |(H_j \gamma \Lambda^{1-\frac{j}{p}} u_n, u_n)|$$

を得る。右辺第2項は $c' n^{\frac{2}{p}} \|u_n\|^2$ で評価される
から, n を十分大きくすれば (2.4) が成り立つ。

2°. Pseudo-differential operator $\alpha_n(D)$.

$\hat{\alpha}(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_\xi^k)$ は, $\xi_0 \neq 0$ の近傍で恒等的に
1 であるとする。ただし $\operatorname{supp}[\hat{\alpha}(\xi)] \not\ni (\xi=0)$.

更に $0 \leq \hat{\alpha}(\xi) \leq 1$ である。 $\hat{\alpha}_n(\xi) = \hat{\alpha}(\xi/n)$

は, $n \xi_0$ の近傍で 1 である C_0^∞ -函数である。

pseudo-differential operator $\alpha_n(D)$ は,

$$\alpha_n(D)u \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{\alpha}_n(\xi) \hat{u}(\xi), \quad u \in L^2.$$

を定義する。 α_n は次の性質をもつ：

$$(1) \quad (2.5) \quad \|x^\nu \alpha_n u\| \leq \frac{c}{n^{|\nu|}} \|u\|.$$

$$(2) \quad h(x) \in B(R^k) \text{ に対し}$$

$$(2.6) \quad [h, \alpha_n] = \sum_{|\nu|=1}^{s-1} (-1)^{|\nu|+1} \frac{h^{(\nu)}(x)}{\nu!} (x^\nu \alpha_n) + B_0,$$

ここに $\|B_0\|$ は $O(n^{-s})$, $n \rightarrow \infty$, である。

§ 3. 定理の証明.

1°. (1.8) の多重根を λ_1 とし, 簡単のため λ_1 は全て単純根としよう。 λ_1 の重複度を $p(>1)$ とする。 (1.8) は, 次のようにかける。

$$(3.1) \quad (\lambda - \lambda_1)^p \prod_{j=2}^{m-p+1} (\lambda - \lambda_j) = 0.$$

2°. 定理を証明するには, (1.9) に対する Cauchy prob. が not well posed in L^2 sense であるような低階作用素 B が, 1) 存在することを示せばよい。実際, ある低階作用素 B' に対して, $(L_0 + B')$ に対する Cauchy prob. が well posed in L^2 sense であ

ると、 u は任意の低階作用素に対しても同様であることを示されるからである。

3°. u を実定数として、低階作用素

$$(3.2) \quad B = u \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{m-1}$$

をとる。 u をどのように選ぶかは

$$(3.3) \quad (L_0 + B)u = 0$$

に対する Cauchy prob. は not well posed in L^2 sense であることを示そう。

4°. そのために少し準備をする。まず (3.3) を system にする。

$$(3.4) \quad \frac{\partial}{\partial t} U = A(x, t, \frac{\partial}{\partial x}) U,$$

$$U = {}^t \left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}} \right),$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 \\ -a_m - u \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{m-1} & -a_{m-1} & \dots & & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$a_j = \sum_{|\nu|=j} a_{\nu, m-j}(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\nu}.$$

次に (3.4) の localization を行う。 $\beta(x) \in C_0^\infty$
 は $x=0$ の近傍で恒等的に 1 である函数とする。
 (3.4) の左から $\beta(x)$ をかけ、更に β に代わって p. d. op.
 α_n を左から作用させる：

$$(3.5) \quad \frac{\partial}{\partial t} \alpha_n(\beta U) = A [\alpha_n(\beta U)] + \\ + [\alpha_n, A](\beta U) + \alpha_n([\beta, A]U).$$

(3.5) に p. d. op. $E_m(\Lambda)$

$$E_m(\Lambda) = \begin{bmatrix} \{\dot{\lambda}(\Lambda+1)\}^{m-1} & & 0 \\ & \{\dot{\lambda}(\Lambda+1)\}^{m-2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

を作用させて、1階System になる：

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_m(\Lambda) \alpha_n(\beta U) &= \\ &= E_m(\Lambda) A E_m(\Lambda)^{-1} (E_m \alpha_n(\beta U)) + \\ &+ [\alpha_n, A E_m^{-1}] E_m(\beta U) + \\ &+ \alpha_n([\beta, A E_m^{-1}] E_m U). \end{aligned}$$

Lemma 3.1. $[\alpha_n, A E_m^{-1}]$, $[\beta, A E_m^{-1}]$ は, p. d. op. of order zero. 特 F_n に関係しない定数 C が存在して

$$(3.7) \quad \| [\alpha_n, A E_m^{-1}] \| < C.$$

5°. さて (3.6) を pseudo-differential operator を用いて表すことも考える。

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0, i & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & i \\ h_m, h_{m-1}, \dots, h_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{is,} \quad \sigma(h_j) = -i a_j(x, x; \xi) |\xi|^{-j}$$

is symbol. is the Calderón-Zygmund の特異積分作用素とする。次に

$$H_1 = \begin{bmatrix} & 0 \\ b_0, 0, \dots, 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{is} \quad \sigma(b_0) = -b_0 \xi_1^{m-1} / |\xi|^m$$

is symbol is the p. d. op. of type I is the.

これらを用いて (3.6) は次のように表せる:

$$(3.8) \quad \frac{d}{dt} V_n = (H_0 + H_1) \wedge V_n + B_1 V_n + F_n.$$

ここに, B_1 は L^2 の有界作用素であり, 更に

$$V_n = E_m(\lambda) \alpha_n(\beta U),$$

$$F_n = [\alpha_n, A E_m^{-1}] E_m(\beta U) + \alpha_n([\beta, A E_m^{-1}] E_m U).$$

Lemma 3.2. n に 関係しない定数 C が存在して,

$$(3.9) \quad \|B_1 V_n + F_n\| \leq C \|E_m U\|.$$

6°. 次に, $H = H_0 + H_1$ を 対角化 しよう。

symbol $\sigma(H)$ の characteristic roots を計算する。

$$\det(\lambda I - \sigma(H)) = \lambda^m + a_1(x, t; i\xi') \lambda^{m-1} + \dots$$

$$\dots + a_m(x, t; i\xi') + b \left(\frac{i\xi_1}{|\xi|} \right)^{m-1} \varepsilon = 0$$

の根を求める。ここに $\xi' = \xi/|\xi|$, $\varepsilon = |\xi|^{-1}$.

$b \neq 0$ であるから, Lagrange の反転法によつて,

$$(3.10) \quad \lambda_{r,\varepsilon} = \lambda_1(x,t;\xi') + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{2\pi i}{p}(r-1)n} c_n(x,t;\xi') \varepsilon^{\frac{n}{p}}$$

$$(r=1, 2, \dots, p)$$

を得る。ここに, $\delta > 0$ が存在して,

$$(3.11) \quad |c_1(x,t;\xi')| \geq \delta > 0.$$

全く同様に $\lambda_2, \dots, \lambda_{m-p+1}$ の perturbed roots

$$(3.12) \quad \lambda_{q,\varepsilon} = \lambda_{q-p+1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(q)}(x,t;\xi') \varepsilon^n$$

$$(q = p+1, p+2, \dots, m)$$

を得る。実は (3.10), (3.12) は §2 に述べた (P.1)

(P.2) を満たし, pseudo-differential operator of type I を定義するのである。

さて

$$\sigma(N_1) = \begin{bmatrix} 1 & , & \dots & 1 \\ \lambda_{1,\varepsilon} & & & \lambda_{m,\varepsilon} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{1,\varepsilon}^{m-1} & , & \dots & , & \lambda_{m,\varepsilon}^{m-1} \end{bmatrix}$$

は, $|\xi| < +\infty$ で regular である。従って $|\xi| < +\infty$ で, $\sigma(N_1)^{-1}$ は $\sigma(H)$ の diagonalizer である。

与える。今 $\sigma(N_1)^{-1}$ の $|\mathcal{E}|$ に関する true order を考慮して,

$$\sigma(N) = |\mathcal{E}|^{\frac{1-p}{p}} \sigma(N_1)^{-1}$$

とおく, $\sigma(N) \in \text{symbol}$ とする p.d. op. of type I とし

$$\sigma(N)\sigma(H) = \sigma(D)\sigma(N)$$

を得る N を得る。ここに

$$D = \begin{bmatrix} R_{1,\varepsilon} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R_{m,\varepsilon} \end{bmatrix}$$

であり, $R_{j,\varepsilon}$ は $\sigma(R_{j,\varepsilon}) = \lambda_{j,\varepsilon}(x,t;\varepsilon) \in \text{symbol}$ とする p.d. op. of type I である。

§2 に定義したような γ (ただし ε_0 とし、今は勿論 (3.10), (3.12) の収束半径によつて定まるものとし) を用いて、次の関係に注意しよう。ここに $\equiv$ は, mod. bdd. op.^s in L^2 の等号) を用いて表す。

$$\begin{aligned}
 N_Y H_Y \wedge &\equiv (N_Y \circ H_Y) \wedge \equiv (N \circ H)_Y \wedge = \\
 &= (D \circ N)_Y \wedge \equiv D_Y N_Y \wedge \equiv D_Y \wedge N_Y.
 \end{aligned}$$

これより (3.8) は、次のように表せる。

$$\begin{aligned}
 (3.13) \quad \frac{d}{dt} W_n &= D_Y \wedge W_n + N_Y' V_n + B_2 V_n + \\
 &+ N_Y B_1 V_n + N_Y F_n,
 \end{aligned}$$

ここに $W_n = N_Y V_n$. また B_2 は L^2 の有界作用素, N_Y' は $-\frac{d}{dt} \circ (N_Y)$ によつて定義される p. d. op. である。

7°.

$$c_1(x, t; \xi') = \left(\frac{i^{p-1} \omega \xi_1^{m-1} / |\xi'|^{m-1}}{\prod_{j=2}^{m-p+1} (\lambda_1 - \lambda_j)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 2$$

に注意すると, $\omega \in \mathbb{C}$ であるように選ぶと, ρ_0 が存在して,

$$(3.14) \quad \inf \operatorname{Re} \exp\left(\frac{2\pi i}{p}(\rho_0 - 1)\right) \cdot c_1(x, t; \xi') \geq \delta_1 > 0$$

が成立つ。

便宜上 $\rho_0 = 1$ としよう。

8°.

$$S_n(t) = \|W_n^{(1)}(t)\|^2 \quad \text{としよう。}$$

n に関係しない定数 c_0, c_1 が存在して,

$$(3.15) \quad \frac{d}{dt} S_n(t) \geq c_0 n^{1-\frac{1}{p}} S_n(t) - c_1 \|E_m U\|^2 - O(1)$$

を得る。

低階作用素を

9° さて, 定理の証明に入ろう。今 (3.14) が成立つように b を定めた時, $B = b(\frac{\partial}{\partial x_1})^{m-1}$ として, (3.3) に対する Cauchy prob. が well posed in L^2 sense であると仮定しよう。初期値として

$$u(0) = \dots = \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} u(0) = 0, \quad \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} u(0) = \psi_n(x)$$

と与えよう。ここには $\psi_n(x) = \overline{\mathcal{F}}[\hat{\psi}_n(\xi)]$, $\hat{\psi}_n(\xi) = \hat{\psi}(\xi - (n-1)\xi_0)$. $\hat{\psi}(\xi)$ は, $\xi_2, \dots, \xi_n$ 上 $\hat{\alpha}(\xi)$ に対して, $\text{supp}[\hat{\psi}(\xi)] \subset \{\xi: \hat{\alpha}(\xi) \equiv 1\}$, なる C_0^∞ -函数である。

解は

$$u_n(x, t) \in E_t^0(\mathcal{D}_L^{m-1}) \cap E_t^1(\mathcal{D}_L^{m-2}) \cap \dots \cap E_t^{m-1}(L^2)$$

とし

$$U_n = {}^t(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u_n}{\partial t^{m-1}})$$

と示す。4° ~ 8° の議論によつて U_n に対し

2 (3.15) 同様の不等式がえられる。しかも他方,
Energy 不等式から, n に関係しない定数 C が存在して

$$\|E_m U_n\| < C$$

が成立つ。従って結局

$$(3.16) \quad \frac{d}{dt} S_n(t) \geq c_0 n^{1-\frac{1}{p}} S_n(t) - C_1, \quad n \geq n_0$$

がえられる

また Lemma 3.2 と Energy 不等式から

$$S_n(t) < C \quad (n \text{ に 関係 しない})$$

がわかる。

最後に, ある定数 $\delta_0 > 0$ が存在して

$$S_n(0) \geq \delta_0 > 0$$

がわかる。それは, N_f の $(1, m)$ -entry を $n_{1,m}$ とかくとき,

$$\begin{aligned} S_n(0) &= \|W_n^{(1)}(0)\|^2 = \|n_{1,m} \alpha_n(\beta \psi_n)\|^2 \\ &\geq \left(\frac{\delta'}{2} - c_1 R^{-1} - c' \sum_{j=1}^{\infty} M_{C_{1,m}^{(j)}} R^{-\frac{j}{p}} \right)^2 \|\alpha_n(\beta \psi_n)\|^2 \end{aligned}$$

であり, 更に

$$\begin{aligned}\|\alpha_n(\beta\psi_n)\| &\geq \|\beta(\alpha_n\psi_n)\| - \|\llbracket\alpha_n, \beta\rrbracket\psi_n\| \\ &\geq c - O\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

が §2. (2.6) からわかるから である。

こうして

$$c \geq S_n(t) \geq \delta_0 e^{c_0 n^{\frac{1}{r-1}} t} + \frac{c_1}{c_0 n^{\frac{1}{r-1}}} \left(1 - e^{c_0 n^{\frac{1}{r-1}} t}\right)$$

を得るが, $n \rightarrow \infty$ の時, この式は $t=0$ とな
なければ 矛盾である。

References

- [1] S. Mizohata : J. Math. Kyoto Univ. 1.(1961).
- [2] A. Lax : C. R. A. M. 9.(1956), 135-169.
- [3] H. Yamaguchi : Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ.
Ser. A. 32.(1959), 121-151.
- [4] T. Kano : J. Math. Soc. Japan (to appear).