

留数理論と超函数

— Local cohomology 理論よりみた

留数理論 —

名大 理 浪川 幸彦

留数は一変数解析函数論で良く知られるが、この多変数への拡張は Poincaré, Picard, Leray, Norquét によってなされた。([5] の文献参照) 特^に Leray の仕事([3])は決定的である。こゝでは、この理論を category of "holomorphy" に於て、local cohomology を用いてみることを目標にする。ただし初等的部分に註を限る。

§ 0. 記号

次の記号は、最後まで断わりなしに用いる。

X : (複素) n -次元 複素解析多様体。

$\mathcal{O}_X$: X 上の正則函数の芽の層。

注) (や^に、例^えば Cauchy - Fantapié の公式なども、書^き直^すことができる。

Ω_X^p : X 上の正則 p -形式の芽の層。

— $\hookrightarrow$ —

Y : X の余次元 d , 次元 m の局部分 (解析) 多様体。

$$U = X - Y$$

$j: U \rightarrow X$ 自然な単射。

§ 1. Fundamental quasi-isomorphism.

次のようにして, 自然な単射: $\Omega_Y^p \rightarrow \mathcal{H}_Y^d(\Omega_X^{d+p})$ が与えられる。任意に $0 \in Y$ をとるとし, 0 を中心とする X の局所座標 $(x^1, \dots, x^n)$ で, さらに $Y = \{(x); x^{m+1} = \dots = x^n = 0\}$ となっているものを選ぶ。このとき写像を

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{Y,0}^p & \longrightarrow & \mathcal{H}_Y^d(\Omega_X^{p+d}) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \\ \omega_0 & \longmapsto & \omega_0 \wedge \left(\frac{dx^{m+1}}{x^{m+1}} \right)_0 \wedge \dots \wedge \left(\frac{dx^n}{x^n} \right)_0 \end{array}$$

によって定まる。これが座標のとりかえはらず, 層の単射を与えることがわかる。別な intrinsic な定義の仕方もある。
(cf. [2] p. 151 ~)

定理 (相対的 Poincaré 補題): 上に定義した,

$$\Omega_Y^p \longrightarrow \mathcal{H}_Y^d(\Omega_X^{d+p}) \quad (p=0, \dots, m)$$

は、外微分 d を微分作用素とする複体の射で、しかもその cohomology はひとこい。とくに、

$$(*) \quad \mathcal{H}^i(\mathcal{H}_Y^d(\Omega_X)) = \begin{cases} \mathbb{C}_Y & i=d \\ 0 & i \neq d \end{cases}$$

($\mathbb{C}_Y$ は Y 上の fibre $\in \mathbb{C}$ とする定数層)。

証明： 複体の射であることは、

$$d(\omega \wedge \frac{dx}{x}) = d\omega \wedge \frac{dx}{x} + (-1)^p \omega \wedge \underbrace{d(\frac{dx}{x})}_{=0}$$

よりあきらか。

後半については、導来関手の一般的手法から、(具体的には超曲面で cut してや (論法により) $d=1$ の場合に帰着される。Poincaré 補題から、

$$\mathcal{H}^i(\Omega_Y^*) = \begin{cases} \mathbb{C}_Y & i=0 \\ 0 & i>0 \end{cases}$$

は分っているから、(*) を証明すれば足りる。

話は局所的であるから、

$$X = \{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{C}^n ; |x^1| < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0) \}$$

$$Y = \{ (x) ; x^n = 0 \} \subset X$$

としてよい。

$$0 \longrightarrow \Omega_X^p \longrightarrow j_* \Omega_U^p \longrightarrow \mathcal{H}_Y^1(\Omega_X^p) \longrightarrow 0$$

(完全)

だから、 X についての Poincaré 補題と併せれば、(4) はこの補題から従う。

補題 (Atiyah - Hodge)

$$H^i(J^*\Omega^i) = \begin{cases} \mathbb{C}_X & i=0 \\ \mathbb{C}_Y & i=1 \\ 0 & i>1 \end{cases}.$$

Atiyah - Hodge の [1] に於ける証明が、そのまゝ用いられる。仲々おもしろいが、少々長くなるので省略する。

$$\text{系: } H^i(Y, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H_{Y}^{i+2d}(X, \mathbb{C}).$$

:

この同型を homology にうつした

$$H_i^c(Y, \mathbb{C}) \longrightarrow H_{i+2d-1}^c(X, \mathbb{C})$$

は、 Y の cycle を、 Y の管状近傍の境界に射影する写像である。

§2. $H_Y^d(\Omega_X^n)$ の積分。

抽象的な一般論はこゝで述べるのはやめるとして、ともかく X 上の積分の理論から、そのような積分が定義される。

1) Y 上の大域的積分。

$$\int_Y : H_Y^n(\Omega_X^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

2) とく n X が Y に retract できる

とき。

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & Y \\ \downarrow & \searrow \text{id} & \\ Y & & \end{array}$$

$$\text{Res} : H_Y^d(\Omega_X^n) \longrightarrow \Omega_Y^m$$

が定義され、§1 で定義した $\Omega_Y^m \longrightarrow H_Y^d(\Omega_X^n)$ はその右逆写像である。これを留数写像とよむ。Res. はまた、fibre 方向の d -次微分形式の芽の層 $\Omega_{X/Y}^d$ を用いて、

$$\text{Res}' : H_Y^d(\Omega_{X/Y}^d) \longrightarrow \mathcal{O}_Y$$

ともかける。

さて、このように強い条件を加えないと留数写像が定義できないのが holomorphic な場合の特徴である。 C^∞ なら、 X を Y に十分近い近傍でおきかえてやれば retract が存在するのだから、holomorphic には、局所的には無論あるが、大域的 (Y について) には必ずしも存在しない。

§3. 幾つかの応用。

1) $\Delta : X \longrightarrow X \times X$ を対角線写像 (i.e. $x \mapsto (x, x)$)

$p : X \times X \longrightarrow X$ を第一成分への射影とする。これは Δ

の retract である。よって

$$\mathcal{H}_{\Delta(X)}^n(\Omega_{X \times X/X}^n) \text{ には } \mathcal{O}_{X \times X/\Delta(X)}$$

が作用しているから、

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xleftarrow{\Delta} & X \\ p \downarrow & \swarrow \text{id} & \\ X & & \end{array}$$

$$\mathcal{O}_{X \times X/\Delta(X)} \times \mathcal{H}_{\Delta(X)}^n(\Omega_{X \times X/X}^n) \longrightarrow \mathcal{H}_{\Delta(X)}^n(\Omega_{X \times X/X}^n) \\ \xrightarrow{\text{Res}'} \mathcal{O}_X$$

なる写像の合成により、自然な写像

$$(**) \quad \mathcal{H}_{\Delta(X)}^n(\Omega_{X \times X/X}^n) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X \times X/\Delta(X)}, \mathcal{O}_X)$$

が定義される。これは容易に分るように単射であるが、全射ではない。しかし、 $\mathcal{O}_{X \times X/\Delta(X)}$, $\mathcal{O}_X$ を適当な意味で位相環層とみれば、その連続射の全体と、上の(**)の像とが一致すると思われる。 $\Delta(X)$ の決める ideal 層を $\mathcal{I}$ とするとき、

$$\mathcal{P} = \varprojlim_{k \geq 0} \mathcal{O}_{X \times X} / \mathcal{I}^{k+1}$$

に離散空間の射影的極限の位相をいれて、その意味で連続な射の全体、($\mathcal{O}_X$ は離散位相)

$$\text{Diff} = \text{Hom. cont.}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}, \mathcal{O}_X)$$

が、ふつうの微分作用素であることとを考えると(**)は local operator の層のより具体的な意味付けとみられる。

2) たかたか-次の極の特異性をもつ形式の層 (全次元 1 の場合)

§1 で定義した $\Omega_Y^{p-1} \rightarrow \mathcal{H}_Y^1(\Omega_X^p)$ の像の, 自然な写像 $j_* \Omega_U^p \rightarrow \mathcal{H}_Y^1(\Omega_X^p)$ による逆像を $\Omega_X^p \langle Y \rangle$ とおき, Y にたかたか-次の極の特異性をもつ p -形式の層とよび, 自然な射 $\text{res} : \Omega_X^p \langle Y \rangle \rightarrow \Omega_Y^{p-1}$ を留数写像とよぶ. 定義よりあきらか, 次の可換図式がなりたつ.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \Omega_X^p & \longrightarrow & \Omega_X^p \langle Y \rangle & \longrightarrow & \Omega_Y^{p-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \quad (\text{完全}) \\
 0 & \longrightarrow & \Omega_X^p & \longrightarrow & j_* \Omega_U^p & \longrightarrow & \mathcal{H}_Y^1(\Omega_X^p) \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & (\text{完全})
 \end{array}$$

これらの hypercohomology をとり, §1 の定理を用いれば,

命題:
$$H^p(\Omega_X^p \langle Y \rangle) \simeq H^p(U, \mathbb{C})$$

注意: $\Omega_X^p(Y) = \{ \omega \in j_* \Omega_U^p : \omega \text{ は } Y \text{ でたかたか-次の極をもつ } p\text{-形式} \}$ とすれば, 一般に $\Omega_X^p \langle Y \rangle \subsetneq \Omega_X^p(Y)$ である. しかし容易にわかるように, $\Omega_X^p(Y)$ の所有形式は $\Omega_X^p \langle Y \rangle$ に含まれる. よって $p=n$ ならば $\Omega_X^n \langle Y \rangle = \Omega_X^n(Y)$ であり, このときの留数写像

$$\text{res} : \Omega_X^n(Y) \longrightarrow \Omega_Y^{n-1}$$

17. Poincaré residue map とよばれる。

3) Cauchy - Weil 積分。

$\mathbb{C}^1$ での $\pi: \Omega_Y^p \rightarrow \mathcal{H}_Y^d(\Omega_X^{d+p})$ が座標 n 次元
 なることと、積分論とをあわせれば、たゞちにいわく
 Cauchy - Weil 積分のすゝめがえされる。つまり、 $Y = \{0\} (0 \in X)$
 とし、 0 を中心とすると n 次元の局所座標を $(x^1, \dots, x^n), (y^1, \dots, y^n)$
 とすれば、 0 の近傍で正則な函数連 g^i_j ($i, j = 1, \dots, n$) が存在
 して、

$$y^i = \sum_j g^i_j x^j$$

と可 $>$ ぬ。 $g = \det(g^i_j)$ は 0 の近傍で 0 にならない。

$\varphi(x)$ を 0 の近傍で正則な函数とすれば、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \oint_{|y^i|=1} \frac{\varphi(y) g dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n}{y^1 \dots y^n} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \oint_{|y^i|=1} \frac{\varphi(y) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n}{y^1 \dots y^n} \\ &= \varphi(0) \end{aligned}$$

(こゝでは最も単純な場合をとりあつた。cf [6])

4) Cauchy - Martinelli 積分

Y が必ず一般の場合を考へる。 X 上の $(n-p)$ -級 (p, q) -形

式の芽の作正層を $\mathcal{O}^{(p,q)}$ とすれば、これは fine sheaf であるから

$$H_Y^i(\mathcal{O}^{(p,q)}) = 0 \quad (i \neq 1).$$

従って

$$0 \longrightarrow \Omega^p \longrightarrow \mathcal{O}^{(p,\dots)}$$

が resolution である (Grothendieck 補題) ことを併せて

$$(***) \quad H_Y^q(X, \Omega^p) = \mathcal{H}^{q-1}(H_Y^1(\mathcal{O}^{(p,\dots)}))$$

を得る。

さて、 $Y = \{0\}$ ($0 \in X$) の場合にも成り立つ。 $0 \in X$ 心とする局所座標を $(x^1, \dots, x^n)$ とする。このとき $p = q = n$ での (***) の対応を具体的に求めてやる。

$$\frac{dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n}{x^1 \dots x^n} \longmapsto \frac{(n-1)! \sum_i (-1)^i \bar{x}^i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge d\bar{x}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}^n}{(r^2)^n}$$

$$(r^2 = \sum_i x^i \bar{x}^i)$$

となる。これは

定理: (Cauchy - Martinelli [4])

$$D = \{x\}; \quad \sum x^i \bar{x}^i = \varepsilon^2 \quad (\varepsilon > 0)\}$$

とし、 $\varphi(x)$ を D 及びその内部で正則な函数とする。このとき、

$$\varphi(0) = \frac{(n-1)!}{(2\sqrt{-1}\pi)^n} \int_S \varphi(x) \frac{\sum_i (-1)^i \bar{x}^i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge d\bar{x}^1 \wedge \dots \wedge d\hat{\bar{x}}^i \wedge \dots \wedge d\bar{x}^n}{(r^2)^n}$$

References

- [1] Atiyah, M.F. and Hodge, W.V.D. : Integrals of the second kind on an algebraic variety, Ann. of Math., Vol.62(1955), pp56-91.
- [2] Hartshorne, R. : Ample subvarieties of algebraic varieties, Lect. Notes in Math. 156, Springer, Berlin, (1970).
- [3] Leray, J. : Le problème de Cauchy, III, Bull. Soc. Math. France, Vol.87(1959), pp81-180.
- [4] Martinelli, E. : Sur l'extension des théorèmes de Cauchy aux fonctions de plusieurs variables complexes, Colloques sur les fonctions de plusieurs variables, Georges Thone, Liège, (1953)
- [5] Norguet, F. : Dérivées partielles et résidus de formes différentielles sur une variété analytique complexe, Sémin. Lelong, 1958/59.
- [6] Weil, A. : L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, Math. Ann. Vol.111(1935), pp178-182.