

123

2階非線型楕円型方程式に対する

外部境界値問題について

早大 理工 草野 尚

以前, 或る種の非線型2階楕円型方程式に対する外部境界値問題の *solvability* に関する結果を発表した. ([3] 参照) ここでは, その結果をより精密にし, 発展させることも目標にする.

Ω を或る単連結有界領域 $D \subset \mathbb{R}^n$ の *open exterior*, S を Ω の *finite boundary* ∂D とする. $\phi(x)$ を S 上で与えられた連続関数として, 次の二つの外部 *Dirichlet* 問題を考える.

$$(A) \quad \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = \phi(x), & x \in S \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^n b_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, u)u = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = \phi(x), & x \in S \end{cases}$$

外部境界値問題では, 普通解 $u(x)$ の無限遠における行動を制限する. 例えば, 無限遠において予め指定された値をと

ることを要求する問題, 無限遠で単に有界であることを要求する問題, が典型的なものである. 前者は data の間に強い compatibility が必要で取り扱いが難かしい (Osolkov [8] 参照) ので, 我々は後者を考察することにする.

§1 では線型問題に関する結果を述べる. §2 では半線型問題 (A) を逐次近似法で解く. §3 では準線型問題 (B) も Leray-Schauder の定理を用いて解く.

§1. 線型問題

Theorem 1 (最大値原理)

$u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ は下に有界で, 不等式

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \geq 0, & x \in \Omega \\ u \geq 0, & x \in S \end{cases}$$

を満たすとする. $a_{ij}(x), b_i(x)$ は有界, $c(x) \geq \gamma > 0$, かつ

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \quad \alpha > 0, \quad \text{とする.} \quad \text{このとき } u(x) \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

証明は Kusano [3] 参照. 又 Oddson [7] もみよ.

Theorem 2 (線型 Dirichlet 問題の solvability)

下記の条件が満たされるならば, 問題

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), & x \in \Omega \\ u = \phi(x), & x \in S \end{cases}$$

$$I) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \quad \alpha > 0; \quad c(x) \geq \gamma > 0$$

II) $a_{ij}(x), b_i(x), c(x), f(x)$ は $\bar{\Omega}$ で有界連続かつ Ω で Hölder 連続

III) Ω は exterior cone property をもつ

IV) $\phi(x)$ は S 上で連続.

証明は Kusunoki [3] 参照. 要領は有界領域における Dirichlet 問題を取り扱う場合 (例えば Courant-Hilbert [2]) と同様に Miller [6] が作った S 上の各点における strong barrier function が重要な役割を果たす.

§ 2. 半線型問題 (A)

(a) modified Picard iteration による解の構成

Theorem 3. 下記の条件が満たされるものとする.

$$I) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \quad \alpha > 0; \quad c(x) \geq \gamma > 0$$

II) $a_{ij}(x), \partial a_{ij}(x)/\partial x_i, b_i(x), c(x)$ は $\bar{\Omega}$ で有界連続かつ Ω で Hölder 連続

III) $f(x, u)$ は u を固定したとき $\bar{\Omega}$ で有界連続, Ω で Hölder 連続, x を固定したとき $-\infty < u < \infty$ で Hölder 連続

IV) 次の性質をもつ有界な関数 $v(x), V(x) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ が存在する.

$$v(x) \leq V(x), \quad x \in \Omega$$

$$L v(x) \leq f(x, v(x)), \quad x \in \Omega; \quad v(x) \leq \phi(x), \quad x \in S$$

$$L V(x) \geq f(x, V(x)), \quad x \in \Omega; \quad V(x) \geq \phi(x), \quad x \in S$$

$$V) \quad \mathcal{D} = \{ (x, u) \mid x \in \bar{\Omega}, \quad v(x) \leq u \leq V(x) \} \quad \tau$$

$$u \geq v \Rightarrow f(x, u) - f(x, v) \geq l(x)(u - v)$$

$l(x)$ は $\bar{\Omega}$ で有界連続, Ω で Hölder 連続, かつ $\sup_{\bar{\Omega}} l(x) < \gamma$

IV) Ω は exterior cone property を持つ. $\phi(x)$ は S 上で連続.

このとき, 問題

$$\begin{cases} Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = \phi(x), & x \in S \end{cases}$$

の有界な解が次の iteration scheme によって作られる.

$$\begin{cases} Lu_m - l(x)u_m = f(x, u_{m-1}) - l(x)u_{m-1}, & x \in \Omega \\ u_m = \phi(x), & x \in S; \quad m=1, 2, 3, \dots; \quad u_0 = v \text{ or } V \end{cases}$$

$u_0 = V$ ならば, $\{u_m(x)\}$ は単調減少で最大解 $\bar{u}(x)$ に, $u_0 = v$ ならば $\{u_m(x)\}$ は単調増加で最小解 $\underline{u}(x)$ に収束する.

(証明) $u_0 = V$ とする.

$L(V - u_1) - l(V - u_1) \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad V - u_1 \geq 0, \quad x \in S$ であるから Theorem 1 によって $V \geq u_1, \quad x \in \bar{\Omega}$.

$L(u_1 - v) - l(u_1 - v) \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad u_1 - v \geq 0, \quad x \in S$ であるから Theorem 1 によって $u_1 \geq v, \quad x \in \bar{\Omega}$.

一般に, $V(x) \geq u_{m-2}(x) \geq u_{m-1}(x) \geq v(x), \quad x \in \bar{\Omega}$ と仮定すれば

$$L(u_{m-1} - u_m) - l(u_{m-1} - u_m) = f(x, u_{m-2}) - f(x, u_{m-1}) - l(u_{m-2} - u_{m-1}) \geq 0$$

$$L(u_m - v) - l(u_m - v) \geq f(x, u_{m-1}) - f(x, v) - l(u_{m-1} - v) \geq 0$$

が Ω で成り立つから, 再び Theorem 1 によって, すべての m に

対して $v(x) \geq u_{m-1}(x) \geq u_m(x) \geq v(x)$, $x \in \bar{\Omega}$ が得られる.

$\bar{u}(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x)$ が一つの解であることを示す. 近年発展した「不連続係数をもつ楕円型方程式の理論」における解の Hölder 連続性の評価に関する研究から ([5, 10, 11, 12] 参照)

Lemma. $u(x)$ を方程式

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n$$

の有界な解 (weak solution) とする. 係数及び右辺は有界で,
 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2$, $\alpha > 0$, ならば, $u(x)$ は G の各 compact subset F 上で Hölder 連続になる. その exponent 及び coefficients は, 係数, 右辺, 解の上界, α , $\text{diam}(F, \partial G)$ だけで評価される

という事実が成立することに注意する. そうすれば, 上記の近似 scheme によって得られた $\{u_m(x)\}$ は Ω の各 compact subdomain において, m に無関係な exponent と coefficient をもつ Hölder 条件を満足することが分る. この事実を考慮して Schauder の内部評価を適用すると, $u_m(x)$, $\partial u_m(x)/\partial x_i$, $\partial^2 u_m(x)/\partial x_i \partial x_j$ が Ω の各 compact subdomain において一様有界かつ同程度連続になることが従う. よって $\bar{u}(x)$ は問題の解になる.

境界 S の附近での $\{u_m(x)\}$ の収束も同様である. 実際, x^0 を S 上の任意の点とする. 仮定 VI によって, x^0 のある相対近傍 N と

$$Lw - lw \geq 1, \quad x \in N; \quad w(x^0) = 0; \quad w(x) > 0, \quad x \in \bar{N} - \{x^0\}$$

とみたす関数 $w = w_{x^0}(x)$ が存在する. (strong barrier function at x^0)
標準的方法により, m に無関係な正の定数を δ があって

$$|u_m(x) - u_m(x^0)| \leq kw(x) + \sup_{S \cap \{|x-x^0| \leq \delta\}} |\phi(x) - \phi(x^0)|, \quad x \in \bar{\Omega} \cap \{|x-x^0| \leq \delta\}$$

がえられる. これから S の附近における $\{u_m(x)\}$ の同程度連続性の結果する.

$\bar{u}(x)$ が maximal であること. $u(x)$ を $v(x) \leq u(x) \leq V(x)$ なる任意の解とする. $\{u_m(x)\}$ の単調性を証明したときには $v(x)$ の果たした役割をこの $u(x)$ が果せることに気を付けると, $u(x) \leq u_m(x)$ 従って $u(x) \leq \bar{u}(x)$ が得られる. (証明終)

Corollary 1. $f(x, u)$ がすべての (x, u) に対して有界, かつ u について Lipschitz 条件をみたす

$$|f(x, u)| \leq M, \quad |f(x, u) - f(x, v)| \leq l|u - v|$$

ならば, 問題 (A) は少なくとも一つ有界な解をもつ. 問題 (A) のすべての解 $u(x)$ は不等式 $|u(x)| \leq V(x)$, $x \in \bar{\Omega}$ を満たす. (且し $V(x)$ は $L \nabla V(x) = M$, $x \in \Omega$; $V(x) = \sup_S |\phi|$, $x \in S$ の有界な解.

Corollary 2. $f_1(x, u)$ は Corollary 1 の $f(x, u)$ と同じ条件を満たす関数, $f_2(x, u)$ は $\partial f_2(x, u) / \partial u$ と共に x の有界な関数で, $\partial f_2(x, u) / \partial u \leq 0$ とする. $f(x, u) = f_1(x, u) + f_2(x, u)$ ならば, 問題 (A) は少なくとも一つ有界な解をもつ.

Corollary 3. $f(x, u)$ は x の有界な関数で $f(x, 0) \geq 0$, $\neq 0$ とする. $x \in \Omega$, $u \geq 0$ で Theorem 3 の条件 V をみたすと仮定する.

$\phi(x) \equiv 0$ とする. $u_0(x) \equiv 0$ から出発して Theorem 3 の scheme で関数列 $\{u_n(x)\}$ を作る. これが non-negative な解に収束するための条件は, これが一様有界であることである.

Corollary 4. $f(x, u)$, $\phi(x)$ は Corollary 3 の条件をみたすとする.

このとき, 境界値問題

$$Lu = \lambda f(x, u), \quad x \in \Omega; \quad u = 0, \quad x \in S$$

は (i) $f(x, u)$ が任意のとき, 十分小さい $\lambda > 0$ に対して少くとも一つの有界な解をもち, (ii) $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(x, u)}{u} = 0$ (x について一様) のとき, 任意の $\lambda > 0$ に対して少くとも一つ有界な解をもつ.

(b) Quasilinearization による解法

$f(x, u)$ は $x \in \bar{\Omega}$, $u \geq 0$ で定義された関数で, $f(x, 0) \geq 0$, $\neq 0$ かつ $u > 0$ に対して $f_u(x, u) > 0$, $f_{uu}(x, u) > 0$ 又は $f_u(x, u) > 0$, $f_{uu}(x, u) < 0$ を満たすものと仮定する. 有界領域の場合 (Cohen [1], Kusano [4]) と同様に, 我々の外部境界値問題

$$Lu = \lambda f(x, u), \quad x \in \Omega; \quad u = 0, \quad x \in S$$

も quasilinearization によって解かれることを示す.

Theorem 4. 十分小さい $\lambda > 0$ に対して関数列 $\{u_m(x, \lambda)\}$ を

$$Lu_1 = \lambda [f(x, 0) + f_u(x, 0)u_1], \quad x \in \Omega; \quad u_1 = 0, \quad x \in S$$

$$Lu_m = \lambda [f(x, u_{m-1}) + f_u(x, u_{m-1})(u_m - u_{m-1})], \quad x \in \Omega; \quad u_m = 0, \quad x \in S$$

$$m = 2, 3, 4, \dots$$

の有界な解として定める. $f_{uu} > 0$ のとき, $\{u_m(x; \lambda)\}$ は単調に増加しながら, $f_{uu} < 0$ のとき, $\{u_m(x; \lambda)\}$ は単調に減少しながら, 問題の唯一つの有界な解に収束する.

(証明) $f_{uu} > 0$ の場合を考える. このとき次式が成立つ.

$$f_u(x, u) > f_u(x, v) \quad (u > v \geq 0)$$

$$f(x, u) \geq f(x, v) + f_u(x, v)(u - v) \quad (u, v \geq 0)$$

$\lambda > 0$ が十分小さいと

$$L V(x) \geq \lambda f(x, V(x)), \quad x \in \Omega; \quad V(x) = 0, \quad x \in S$$

を満たす有界な関数 $V(x) \geq 0$ が存在する.

$$L u_1 - \lambda f_u(x, 0) u_1 = \lambda f(x, 0) \quad \text{から} \quad u_1(x; \lambda) \geq 0$$

$$L(V - u_1) - \lambda f_u(x, 0)(V - u_1) \geq 0 \quad \text{から} \quad V(x) \geq u_1(x; \lambda)$$

一般に $0 \leq u_{m-2}(x) \leq u_{m-1}(x) \leq V(x)$ を仮定する.

$$\begin{cases} L u_{m-1} = \lambda [f(x, u_{m-2}) + f_u(x, u_{m-2})(u_{m-1} - u_{m-2})] \leq \lambda f(x, u_{m-1}) \\ L u_m = \lambda [f(x, u_{m-1}) + f_u(x, u_{m-1})(u_m - u_{m-1})] \end{cases}$$

$$\text{から,} \quad L(u_m - u_{m-1}) - \lambda f_u(x, u_{m-1})(u_m - u_{m-1}) \geq 0.$$

$$\text{また} \quad L(V - u_m) - \lambda f_u(x, u_{m-1})(V - u_m) \geq 0.$$

従って $u_{m-1}(x; \lambda) \leq u_m(x; \lambda) \leq V(x)$. $\{u_m(x; \lambda)\}$ は単調増加

で一様有界である. $u(x; \lambda) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x; \lambda)$ が求める解である:

とは Theorem 3 と同様に証明される.

一意性は Theorem 1 から直ぐに出る. (証明終)

§3. 準線型問題 (B)

形式上より一般な非線型問題

$$(B) \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^n b_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, u)u = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = \phi(x), & x \in S \end{cases}$$

を考える. この問題の solvability を Leray-Schauder の不動点定理の special case である次の Schaefer の定理を用いて示す.

Lemma (Schaefer [9]) E を complete な locally convex Hausdorff space, T を E から E への compact mapping とする. そのとき, すべて $\lambda \in [0, 1]$ に対して $y = \lambda Ty$ なる $y \in E$ が存在するか, そうでなければ集合 $\{y; y = \lambda Ty, 0 \leq \lambda \leq 1\}$ は E において有界でない.

$E = E(\alpha, \Omega)$ は $\bar{\Omega}$ で連続かつ Ω で Hölder 連続 (exponent α) な関数のつくる空間を表す. E は seminorms

$$q_{\Omega'}(u) = \sup_{\bar{\Omega}'} |u(x)| \quad (\Omega' \text{ は } \bar{\Omega} \text{ の compact subsets})$$

$$q_{K, \alpha}(u) = \sup_{x, x' \in K} \frac{|u(x) - u(x')|}{|x - x'|^\alpha} \quad (K \text{ は } \Omega \text{ の compact subsets})$$

によって生成される topology で complete な locally convex topological space になる.

さて, 問題 (B) について次の仮定をおく.

$$I) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \quad \alpha > 0; \quad c(x, u) \geq \gamma > 0.$$

$$II) a_{ij}(x), \partial a_{ij}(x)/\partial x_i \text{ は } \bar{\Omega} \text{ で有界連続かつ } \Omega \text{ で Hölder 連続}$$

(exponent μ)

III) $b_i(x, u)$, $c(x, u)$, $f(x, u)$ は 有界かつ Hölder 連続 (exponent ν)

IV) Ω は exterior cone property をもち, $\phi(x)$ は S 上で連続.

$v(x) \in E$ に 線型問題

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^n b_i(x, v) \frac{\partial w}{\partial x_i} + c(x, v)w = f(x, v), & x \in \Omega \\ w = \phi(x), & x \in S \end{cases}$$

の唯一つの 有界な解 $w(x) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ を対応させると, E

上で operator $T: w = Tv$ が定義される. このとき

(i) T は E を E の中にうつす.

(ii) T は compact である. これは Schauder の内部評価と, (Theorem 3 の証明の途中で指摘したような) strong barrier function を用いて得られる所の境界 S 附近における解の modulus of continuity の評価とを組み合わせてることによって容易に証明される.

(iii) 集合 $\mathcal{U} = \{u; u = \sigma Tu, \sigma \in [0, 1]\}$ は E で bounded である.

operator equation $u = \sigma Tu$ は 外部 Dirichlet 問題

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^n b_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, u)u = \sigma f(x, u), & x \in \Omega \\ u = \sigma \phi(x), & x \in S \end{cases}$$

のことである.

Theorem 1 により, $\forall u \in \mathcal{U}$ に対して

$$|u(x)| \leq \max \{ |\phi|, \sup |f|/\gamma \}, \quad x \in \bar{\Omega}$$

が成り立つゆえ, 任意の compact $\Omega' \subset \bar{\Omega}$ に対して $\{q_{\Omega'}(u); u \in U\}$ は bounded である. 次に Theorem 3 の証明の途中で引用した補題を用いると, 任意の compact $K \subset \Omega$ に対して $\{q_{K,\alpha}(u); u \in U\}$ は bounded であるような $\alpha > 0$ が存在することが分る. 従ってこのような $\alpha > 0$ に対して U は E において bounded になる.

Schaefer の補題を適用すると, 次の定理がえられる.

Theorem 5. 上記の仮定 I) - IV) が満足されるならば, 外部 Dirichlet 問題 (B) は少くとも一つの有界な解 $u(x) \in C^{2,2}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ をもつ. $\eta \leq \min(\mu, \nu)$

Corollary. $f_1(x, u)$ は有界, $\partial f_2(x, u) / \partial u \leq 0$ とする. 問題 (B) の $f(x, u)$ が $f_1(x, u) + f_2(x, u)$ と表わされるとき, 問題 (B) は少くとも一つの有界な解をもつ.

参考文献

- [1] D. S. Cohen, J. Math. Mech. 17 (1967)
- [2] Courant-Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Vol. II.
- [3] T. Kusano, Jap. J. Math. 35 (1965)
- [4] T. Kusano, 近刊
- [5] O. A. Ladyzhenskaya - N. N. Ural'tseva, Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Izd. Nauka, Moscow (1964)

- [6] K. Miller, *Ann. Mat. Pura Appl.* 76 (1967)
- [7] J. K. Oddson, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 26 (1967)
- [8] A. P. Osolkov, *Trudy Mat. Inst. Steklova* 102 (1967)
- [9] H. Schaefer, *Math. Ann.* 129 (1955)
- [10] J. Serrin, *Acta Math.* 111 (1964)
- [11] G. Stampacchia, *Ann. Inst. Fourier* 15 (1965)
- [12] N. S. Trudinger, *Comm. Pure Appl. Math.* 20 (1967)