

漸縮水路の高速流に関する数値解析

岩佐 義朗・細田 尚

NUMERICAL ANALYSIS OF HIGH VELOCITY FLOWS IN OPEN CHANNELS WITH GRADUALLY CONTRACTED PART

By *Yoshiaki IWASA* and *Takashi HOSODA*

Synopsis

The numerical method of the steady high velocity flows in open channels with gradually contracted part is shown by using the method of characteristics. The basic equations used here are the plane two-dimensional equations of shear flows in the steady state. These equations are transformed into the characteristic form, which are also transformed into the finite difference equations by using the linear interpolation method in the fixed grid system. After describing the treatment of the gradual changes of side walls in Cartesian coordinate system, the numerical analysis is performed with the same hydraulic variables of Ippen's experiment. The comparison of numerical results to the experimental ones of Ippen indicates that it is necessary to involve the effect of vertical acceralation in the basic equations, though the agreement of both results is good along the side wall of the contracted part.

1. 緒 言

本研究は、漸縮部を有する急勾配の開水路流れに対して特性曲線法を用いた数値解析法を示し、数値解析結果を、Ippen¹⁾が行った実験結果と比較・検討したものである。用いる基礎式は定常状態での平面流れの基礎式であり、その特性曲線の表示より、平面流れのFroude数 $Fr = \sqrt{u^2 + w^2} / \sqrt{gh}$ (u, w ; 水深平均流速ベクトルの成分, h ; 水深) が1より大きいとき、基礎式系は双曲型になることが知られている。本研究では、この $Fr > 1$ の流れを高速流と定義している。

高速流では基礎式系に3種の特性曲線が存在し、各々の特性曲線に沿って成立する関係式に変換される。この関係式を適当に離散化して、数値解析を行う。この方法は、湾曲水路を通る高速流に適用され、ほぼ妥当な結果を得ている。^{2,3)} また、Ippen⁴⁾が詳述している図式解法との関係も、幾何学的考察より明らかになっている。

本研究では、この特性曲線法を漸縮部を有する急勾配水路の水面形解析に適用する。とくに、側壁の形状変化を側壁上での境界条件に組み込む方法を詳述し、その後に数値解析結果について考察する。数値解析はIppen¹⁾が行った実験条件に合わせて行われ、その実験結果との比較のみならず、Jimenez・Chaudhry⁵⁾が基礎式を直接差分して行った計算結果とも比較する。

次に、基礎式と解析法について述べよう。

2. 基礎式と特性曲線

2.1 特性曲線

用いる基礎式は、静水圧分布を仮定した定常状態での平面流れの基礎式であり、Fig. 1に示した座標系を用いれば次式となる⁶⁾。

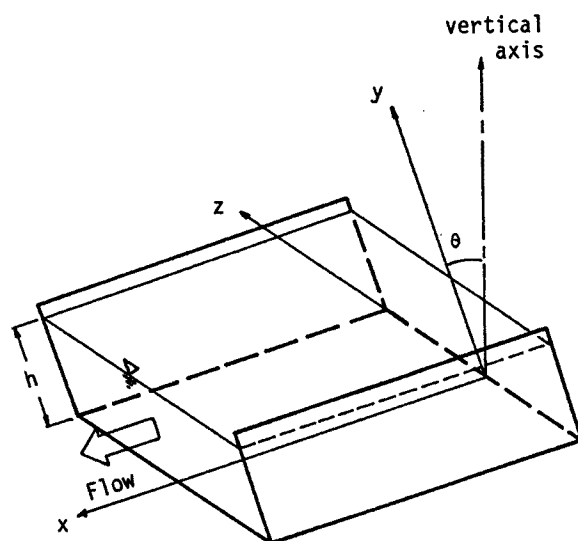


Fig. 1. Coordinate system.

$$\frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(wh)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uwh)}{\partial z} + gh \frac{\partial h}{\partial x} = gh \sin \theta - \frac{\tau_{bx}}{\rho} \quad (2)$$

$$\frac{\partial(uwh)}{\partial x} + \frac{\partial(w^2h)}{\partial z} + gh \frac{\partial h}{\partial z} = -\frac{\tau_{bz}}{\rho} \quad (3)$$

ここに、 (u, w) ；水深平均流速ベクトルの x, z 方向成分、 h ；水深、 (τ_{bx}, τ_{bz}) ；水路床に作用する応力ベクトルの成分、 θ ；水路床勾配、 g ；重力加速度、 ρ ；水の密度、 x, z ；空間座標である。

(1)～(3)式を行列表示すれば次のようになる。

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x} + A_2 \frac{\partial U}{\partial z} = B \quad (4)$$

ここに、 U, A_1, A_2, B は次のように表せる。

$$U = \begin{bmatrix} h \\ u \\ w \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} u, h, 0 \\ g, u, 0 \\ 0, 0, u \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} w, 0, h \\ 0, w, 0 \\ g, 0, w \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ g \sin \theta - \frac{\tau_{bx}}{\rho h} \\ -\frac{\tau_{bz}}{\rho h} \end{bmatrix}$$

ここで、(4)式の特性曲線を考える。(4)式を (x, z) 系より (ξ, η) 系へ座標変換すれば、次のようになる。(Fig. 2参照)

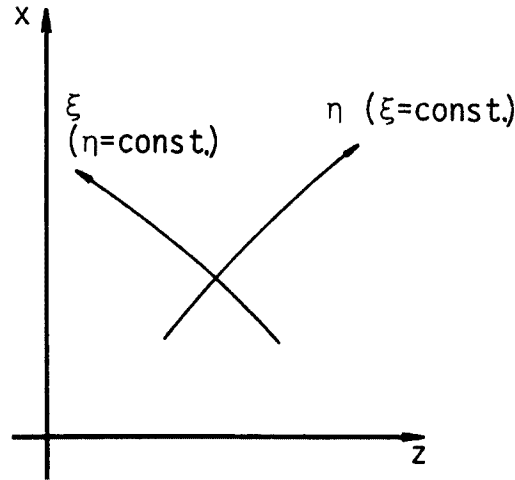


Fig. 2. Coordinate transformation.

$$\left(I \frac{\partial \xi}{\partial x} + A_1^{-1} A_2 \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) \frac{\partial U}{\partial \xi} + \left(I \frac{\partial \eta}{\partial x} + A_1^{-1} A_2 \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) \frac{\partial U}{\partial \eta} = A_1^{-1} B \quad (5)$$

今、 $\xi = \text{const.}$ 線上で U と $\partial U / \partial \eta$ が与えられたとき、この線上で $\partial U / \partial \xi$ が定まらない条件を考える。この条件が特性条件であり⁷⁾、 $\xi(x, z) = \text{const.}$ 線が特性曲線となる。すなわち、特性条件は次式で表せる。

$$\det \left| I \frac{\partial \xi}{\partial x} + A_1^{-1} A_2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right| = 0 \quad (6)$$

(6) 式は、 $\xi(x, z) = \text{const.}$ 線が満たすべき条件式で、展開すれば次のようになる。

$$\left(u \frac{\partial \xi}{\partial x} + w \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) \cdot \left\{ \left(u \frac{\partial \xi}{\partial x} + w \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2 - gh \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 - gh \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2 \right\} = 0 \quad (7)$$

$\xi(x, z) = \text{const.}$ 線の勾配 dz/dx は、陰関数定理より

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{\partial \xi / \partial x}{\partial \xi / \partial z}$$

であるから、(7) 式より、次式で表せる 3 種の特性曲線が導かれる⁸⁾。

$$\lambda_1: \frac{dz}{dx} = \frac{w}{u} \quad (8)$$

$$\lambda_2: \frac{dz}{dx} = \frac{uw + \sqrt{gh(u^2 + w^2 - gh)}}{u^2 - gh} \quad (9)$$

$$\lambda_3: \frac{dz}{dx} = \frac{uw - \sqrt{gh(u^2 + w^2 - gh)}}{u^2 - gh} \quad (10)$$

(9), (10) 式より、次式で定義される平面流れの Froude 数

$$Fr = \frac{\sqrt{u^2 + w^2}}{\sqrt{gh}} \quad (11)$$

が 1 より大きいとき、 dz/dx はすべて実数となり、基礎式系は双曲型に分類される。この $Fr > 1$ が高速流の定義となる。

2.2 特性曲線上の関係式

特性曲線上の関係式は、(4)式に $A_1^{-1}A_2$ の左固有ベクトル μ_i ($i=1\sim 3$)を乗ずることによって得られる。 $A_1^{-1}A_2$ の左固有ベクトルは、 $A_1^{-1}A_2$ の固有値(8)~(10)式に対して、各々、次のようになる。

$$\lambda_1: \mu_1 = \left(1, \frac{u}{g}, \frac{w}{g}\right) \dots\dots\dots (12)$$

$$\lambda_2: \mu_2 = \left(\frac{\sqrt{gh(u^2+w^2-gh)}}{hu}, -\frac{w}{u}, 1\right) \dots\dots\dots (13)$$

$$\lambda_3: \mu_3 = \left(-\frac{\sqrt{gh(u^2+w^2-gh)}}{hu}, -\frac{w}{u}, 1\right) \dots\dots\dots (14)$$

(4)式に左より A_1^{-1} を乗じ、さらに左より μ_i を乗ずれば、特性曲線上の関係式

$$\mu_i \left(\frac{\partial U}{\partial x} + A_1^{-1}A_2 \frac{\partial U}{\partial Z} \right) = \mu_i \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \lambda_i \frac{\partial U}{\partial Z} \right) = \mu_i A_1^{-1}B \dots\dots\dots (15)$$

($i=1\sim 3$)

が得られる。

λ_1 上の関係式は、(15)式において $i=1$ として得られ、次式となる。

$$\begin{aligned} \left(1, \frac{u}{g}, \frac{w}{g}\right) \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{w}{u} \frac{\partial U}{\partial Z}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{u^2+w^2}{2g}\right) + \frac{w}{u} \frac{\partial}{\partial z} \left(h + \frac{u^2+w^2}{2g}\right) \\ &= \sin\theta - \frac{\tau_{bx}}{\rho gh} - \frac{\tau_{bz}}{\rho gh} \cdot \frac{w}{u} \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

一方、 λ_2 上の関係式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{gh(u^2+w^2-gh)}}{hu} \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{uw + \sqrt{gh(u^2+w^2-gh)}}{u^2-gh} \frac{\partial h}{\partial z}\right) \\ - \frac{w}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{uw + \sqrt{gh(u^2+w^2-gh)}}{u^2-gh} \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{uw + \sqrt{gh(u^2+w^2-gh)}}{u^2-gh} \frac{\partial w}{\partial z}\right) \dots\dots (17) \\ = \left(g \sin\theta - \frac{\tau_{bx}}{\rho h}\right) \frac{uw + \sqrt{gh(u^2+w^2-gh)}}{u(gh-u^2)} - \frac{\tau_{bz}}{\rho hu} \end{aligned}$$

λ_3 上の関係式も同様に導かれ、3種の特性曲線上の関係式を離散化した後に数値解析を行う。数値解析法について述べる前に、上に示した基礎式と従来の研究との関係を簡単に考察しておこう。

2.3 従来の研究との関係

本研究で用いられる特性曲線上の関係式と、Ippenの研究⁴⁾に詳述されている方法との関係は、幾何学的考察より明らかになっている²⁾。ここでは変数変換を用いて、より簡単にこの関係を示す。

水路床勾配、底面せん断応力を無視するとき、微小な不連続の伝播する線に垂直な方向の質量保存則と運動量保存の関係式より、次式が導かれている⁴⁾。

$$\frac{Vd\theta}{\cos\beta} = \frac{gdh}{V \sin\beta}, \quad \sin\beta = \frac{\sqrt{gh}}{V} \dots\dots\dots (18)$$

上式の記号の説明をFig. 3に示す。

(18)式と、 $h + V^2/2g = H_0$ (=const.) より

$$\frac{dh}{d\theta} = \frac{2(H_0 - h)\sqrt{h}}{\sqrt{2H_0 - 3h}} \quad (19)$$

が導かれ、図式解法の基礎式となっている⁴⁾。

一方、水路床勾配、底面せん断応力を無視するとき、本研究で用いる基礎式 (16), (17) を変数変換することにより、(19) 式を導くことができる。Fig. 3 に示した微小な不連続の伝播する線は特性曲線 λ_3 であり、 λ_3 で分けられる二つの領域の関係を示すものが λ_2 上の関係式 (17) である。(17) 式を、 λ_2 に沿った微係数を表す

$$\frac{D_2}{Dx} \equiv \frac{\partial}{\partial x} + \frac{uw + \sqrt{gh(u^2 + w^2 - gh)}}{u^2 - gh} \frac{\partial}{\partial z}$$

を用いて、次のように書き換える。

$$\frac{\sqrt{gh(u^2 + w^2 - gh)}}{hu} \frac{D_2 h}{Dx} - \frac{w}{u} \frac{D_2 u}{Dx} + \frac{D_2 w}{Dx} = 0 \quad (20)$$

流線上の関係式 (16) より、流線に沿って $h + (u^2 + w^2) / 2g = H_0 (= \text{const.})$ が得られ、この関係式より h を消去する。さらに、Fig. 4 を参照して、 $V = \sqrt{u^2 + w^2}$, $u = V \sin \theta$, $w = V \cos \theta$ より u , w を V , θ に変数変換して、

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{d\theta} = - \frac{\sqrt{H_0 - \frac{V^2}{2g}}}{\sqrt{\frac{3V^2}{2g} - H_0}} \quad (21)$$

が得られる。 $V^2 = 2g(H_0 - h)$ を用いて h の関係式に直せば (19) 式となる。このように、従来の図式解法と本研究で用いる解析法が原理的に同一であることを、簡単にみることができる。

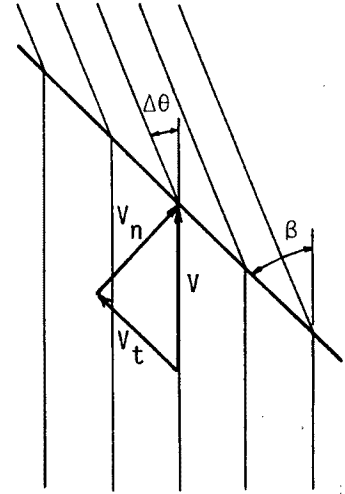


Fig. 3. Explanation of symbols.

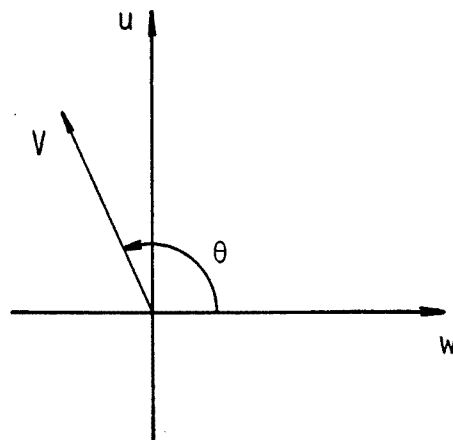


Fig. 4. Relation between (u, w) and (V, θ) .

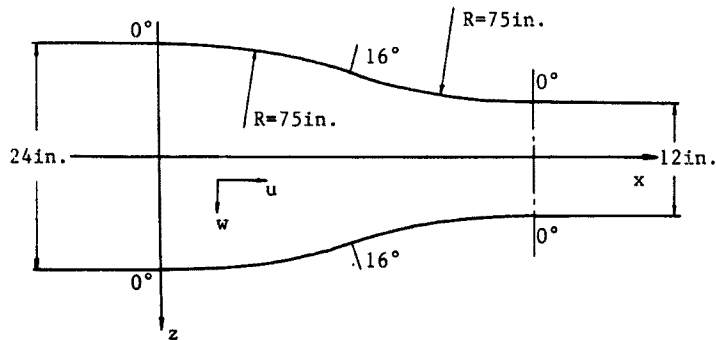


Fig. 5. Plan view of open channel with contraction composed of circular arcs.

3. 数値解析法

3.1 計算対象領域

計算に用いた水路は、Fig. 5に示すように Ippen¹⁾が実験に用いたものと同一である。すなわち、左右対称であり、円弧による漸縮部をもつ水路である。

3.2 基礎式の離散化

基礎式 (15) を、Fig. 6に示すような固定格子点を用いて離散化する。離散化の手法は、開水路非定常流に対して用いられているものと同様であり⁹⁾、高速湾曲流への適用も試みられている^{2), 3)}。すなわち、 λ_1 , λ_2 , λ_3 に対して、各々、次のように表される。

$$\lambda_1: \mu_{1j}^i \cdot \left(\frac{U_j^{i+1} - U_j^i}{\Delta x} + \lambda_{1j}^i \frac{U_{j+1}^i - U_{j-1}^i}{2\Delta z} \right) = \mu_{1j}^i \cdot (A_2^{-1}B)_j^i \quad \dots\dots\dots (22-a)$$

$$\lambda_2: \mu_{2j}^i \cdot \left(\frac{U_j^{i+1} - U_j^i}{\Delta x} + \lambda_{2j}^i \frac{U_j^i - U_{j-1}^i}{\Delta z} \right) = \mu_{2j}^i \cdot (A_2^{-1}B)_j^i \quad \dots\dots\dots (22-b)$$

$$\lambda_3: \mu_{3j}^i \cdot \left(\frac{U_j^{i+1} - U_j^i}{\Delta x} + \lambda_{3j}^i \frac{U_{j+1}^i - U_j^i}{\Delta z} \right) = \mu_{3j}^i \cdot (A_2^{-1}B)_j^i \quad \dots\dots\dots (22-c)$$

3.3 境界条件

流れが全域にわたって $Fr > 1$ の流れを対象としており、計算は上流より下流へ進められる。すなわち、

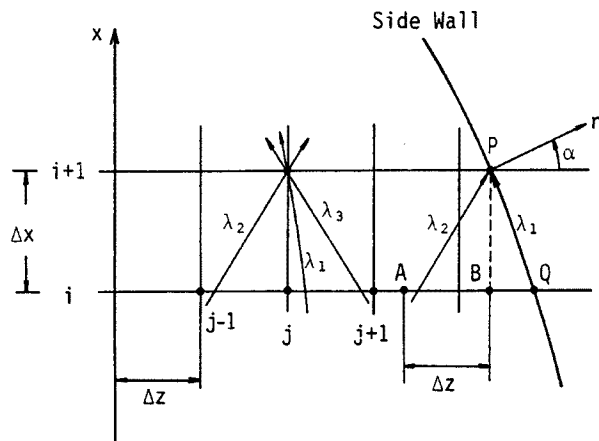


Fig. 6. Difference scheme by characteristics method.

計算領域の上流端において水深・流速を与えなければならない。Ippen の実験において、上流端では水深・流速ともに水路幅方向に一様と考えられるので、 $h=h_0$, $u=U_0$, $w=0$ とした。

水路は左右対称であり、計算では水路右半分のみを取り扱えばよい。そこで、水路側壁と中心線において境界条件を与えることが必要である。漸縮部において水路側壁は除々に変化し、この効果を計算に組み込まねばならない。本研究では、側壁上での境界条件を次のように取り扱っている。

側壁は流線であり、側壁に沿って流線上の関係式 (16) が成立する。すなわち、Fig. 6 に示した側壁上の 2 点 P , Q を考えると、側壁が流線であるための幾何学的条件 $\Delta z / \Delta x = w / u$ を用いて

$$\begin{aligned} \frac{U_P - U_Q}{\Delta x} &= \frac{U_Q + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_Q \Delta x + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_Q \Delta z + \cdots - U_Q}{\Delta x} \\ &\approx \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_Q + \frac{w}{u} \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_Q \end{aligned}$$

が得られる。よって、側壁上の関係式は次式となる。

$$\mu_{1Q} \cdot \frac{U_P - U_Q}{\Delta x} = \mu_{1Q} \cdot (A_2^{-1} B)_Q \cdots \cdots (23)$$

Fig. 6 に示したように、(23) 式と、 P 点より下した λ_2 上の関係式

$$\mu_{2B} \left(\frac{U_P - U_B}{\Delta x} + \lambda_{2B} \frac{U_B - U_A}{\Delta z} \right) = \mu_{2B} \cdot (A_2^{-1} B)_B \cdots \cdots (24)$$

さらに、幾何学的関係

$$w_p = -u_p \tan \alpha_p \cdots \cdots (25)$$

を連立することにより、 P 点での U の値が求められる。ただし、Fig. 6 の A, B 点の U の値は、線形補間によって求めた。

水路中心線上の U の値は、左右対称性より中心線上で $w=0$ となることから、流線上の関係式と λ_3 上の関係式の 2 つを連立することにより求められる。

3.3 計算条件

計算条件は、Ippen の行った実験条件に合わせている。水路の形状は Fig. 5 に示した通りであり、その他の条件を Table 1 に示した。底面せん断応力は、摩擦係数 f を用いて

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = f \sqrt{u^2 + w^2} \cdot u, \quad \frac{\tau_{bz}}{\rho} = f \sqrt{u^2 + w^2} \cdot w$$

と評価した。用いた Δx , Δz の値は、 $\Delta x = 0.05$ (inch), $\Delta z = 0.1$ (inch) である。

Table 1. Hydraulic variables for numerical analysis

h_0 (inch)	Fr_0	R (inch)	f
1	4	75	0.005

4. 計算結果の考察

Figs. 7, 8 に、水路中心線と側壁に沿った水深の変化を、水路上流端の比エネルギー $H_0 = h_0 + U_0^2 / 2g$ で無次元化して示した。漸縮部での水路側壁に沿った水深の計算結果は、Ippen の実験結果とほぼ適合しているが、漸縮部を過ぎると、計算値は立ち上りが急でなだらかに減少する分布形となり、実験結果と適合しない。同様の結果は、Jimenez・Chaudhry⁵⁾ が基礎式を直接差分法で行った計算結果でも見られ、鉛直加速度を考慮した基礎式を用いる必要性を示している。次に、水面形の3次的形状を Fig. 9 に示した。漸縮部で生成された波が水路直線部に入ると、水路中心線と側壁で反射しながら下流に伝って行く

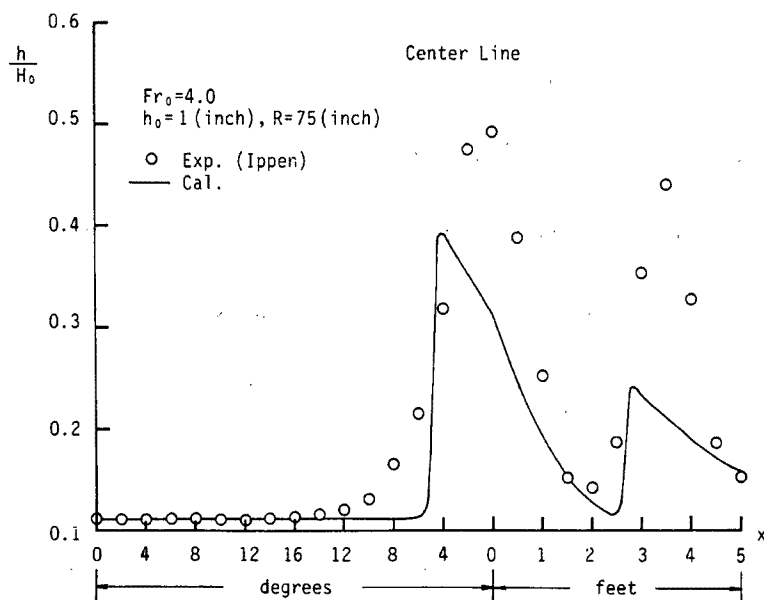


Fig. 7. Water surface profile along center line.

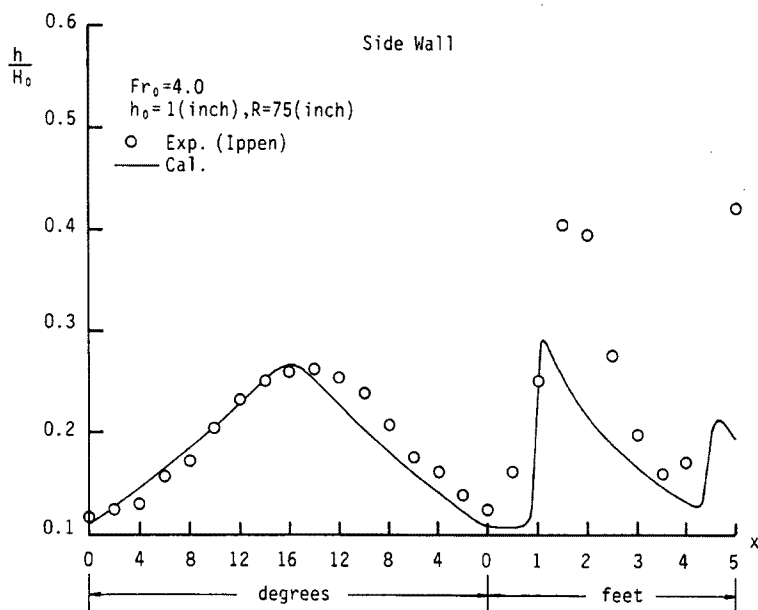


Fig. 8. Water surface profile along side wall.

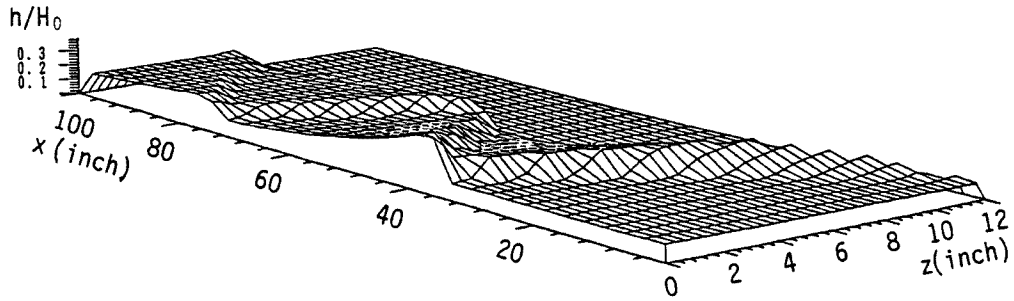


Fig. 9. Bird's-eye view of water surface profile.

様子が理解できる。しかし、上に述べたように、Ippen の実験状況を示した写真（参考文献 1，Fig. 36）のような滑らかな水深変化が再現されていない。

次に、鉛直加速度を考慮する必要性について考察しよう。鉛直加速度を考慮した平面流れの基礎式は、Fig. 1 と同じ座標系を用いて、次のように導かれている¹⁰⁾。

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2h + P) + \frac{\partial}{\partial z}(wuh) = gh \sin \theta - \frac{\tau_{bx}}{\rho} \quad (26-a)$$

$$\frac{\partial(wh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uwh) + \frac{\partial}{\partial z}(w^2h + P) = -\frac{\tau_{bz}}{\rho} \quad (26-b)$$

$$\begin{aligned} P = & \frac{gh^2}{2} + \frac{1}{3}h^2u^2\frac{\partial^2h}{\partial x^2} + \frac{2}{3}h^2u\frac{\partial^2h}{\partial x\partial t} + \frac{1}{3}h^2w^2\frac{\partial^2h}{\partial z^2} + \frac{2}{3}h^2w\frac{\partial^2h}{\partial z\partial t} \\ & + \frac{1}{3}h^2\frac{\partial^2h}{\partial t^2} + \frac{2}{3}uwh^2\frac{\partial^2h}{\partial x\partial z} + \frac{1}{3}h^2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{3}h^2\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial z} \quad (27) \\ & + \frac{1}{3}h^2u\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{3}h^2u\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{1}{3}h^2w\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{3}h^2w\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned}$$

上式において、水路床勾配、底面せん断応力を無視したとき、

$$h = h_1 + \eta' \cos(k_z z) \exp i(k_x x - \omega t)$$

$$u = U_1 + u' \cos(k_z z) \exp i(k_x x - \omega t)$$

$$w = w' \sin(k_z z) \exp i(k_x x - \omega t)$$

において、線形分散関係を求めると次式が得られる¹⁰⁾。

$$c_x = U_1 \pm \sqrt{gh_1} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{k_z}{k_x}\right)^2}}{\sqrt{1 + \frac{h_1^2}{3}(k_x^2 + k_z^2)}} \quad (28)$$

ここに、 k_x 、 k_z ；波の波数であり、 x 、 z 方向の波長 L_x 、 L_z を用いて $k_x = 2\pi/L_x$ 、 $k_z = 2\pi/L_z$ と表せる。また、 c_x ；波の x 方向の位相速度、 h_1 、 U_1 ；各々、流れの平均水深と平均流速である。

(28) 式を、Ippen の実験における水路直線部の定在波に適用してみよう。定在波であるから $c_x = 0$ であり、(28) 式は次のようになる。

$$Fr_1 \equiv \frac{U_1}{\sqrt{gh_1}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{L_x}{L_z}\right)^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi h_0}{L_x}\right)^2 \left\{1 + \left(\frac{L_x}{L_z}\right)^2\right\}}} \quad (29)$$

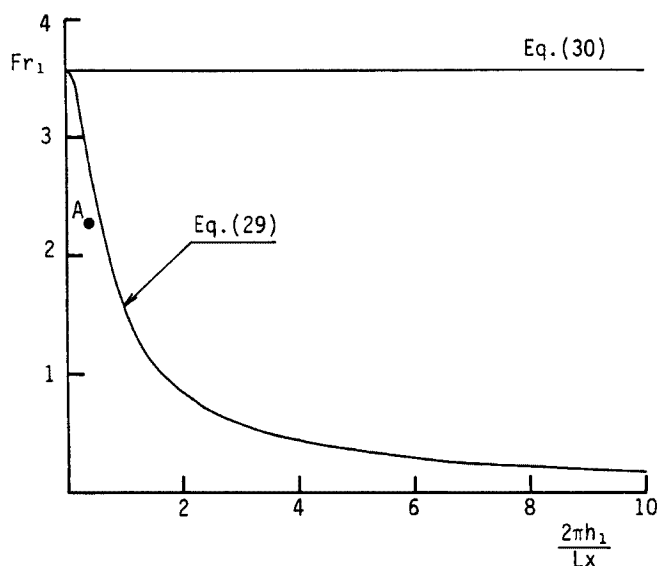


Fig. 10. Relation between Froude number and wave length for stationary wave.

一方、静水圧分布を仮定したときには、(29) 式に対応する関係式は次のようになる。

$$Fr_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{L_x}{L_z}\right)^2} \dots\dots\dots (30)$$

Ippen の実験結果より、本研究で取扱っている $Fr_0 = 4$ の場合の、水路直線部での平均水深 h_1 、定在波の波長 L_x を読み取れば、 $h_1 = 2.32$ (inch), $L_x = 41.1$ (inch) となる。 $L_z = 12$ (inch) であるから、 $L_x/L_z = 3.43$ であり、このときの (29), (30) 式を Fig. 10 に示した。Ippen の実験での水路直線部の値 $Fr_1 = 2.26$, $2\pi h_1/L_x = 0.355$ も図中に点 A として示してある。この図より、実験値は鉛直加速度を考慮した (29) 式に近く、鉛直加速度を考慮する必要性が定量的に示されたことになる。

5. 結 語

本研究では、定常状態での平面流れの基礎式を用いて、漸縮部を有する開水路流れの高速流の再現を試みたものである。得られた結果をまとめれば、次のようになる。

(1) 定常状態での平面流れの基礎式の特性曲線と、その上で成立する関係式を示し、その離散化手法について述べた。特に、水路形状が除々に変化する場合は側壁境界条件の取り扱いについて詳述し、微小な水路形状変化を考慮した解析法を示した。

(2) 特性曲線上の関係式を変数変換することにより、本研究の解析法と Ippen が用いた図式解法との関係が容易に示された。

(3) 計算結果と Ippen の実験結果との比較により、次の結果が得られた。水路漸縮部側壁に沿った水深の増加・減少過程は両者ともよく一致するが、漸縮部を過ぎると、両者は定性的・定量的に一致せず、鉛直加速度を考慮する必要性が確認された。

今後、鉛直加速度を考慮した基礎式を用いて解析を進め、現象の再現を試みて行きたい。

参 考 文 献

- 1) Ippen, A. T. and H. Dawson: Design of Channel Contractions, Trans. ASCE, 116, 1951, pp. 326 - 346.
- 2) 細田 尚・余越正一郎: 高速湾曲流に関する二, 三の検討, 土木学会論文集, 第 387 号 / II-8, 1987, pp. 171 - 178.
- 3) Iwasa, Y. and T. Hosoda: Numerical Simulations of High Velocity Flows through Curved Open Channels, Proc. HYDROCOMP 89, Dubrovnik, Yugoslavia, 1989, pp. 87 - 96.
- 4) Ippen, A. T.: Mechanics of Supercritical Flow, Trans. ASCE, 116, 1951, pp. 265 - 295.
- 5) Jimenez, O. F. and M. H. Chaudhry: Computation of Supercritical Free-Surface Flows, Proc. ASCE, Vol. 114, HY 4, 1988, pp. 377 - 395.
- 6) 岩佐義朗: 開水路流れのモデリング法, 水工学シリーズ, 80-A-3, 土木学会水理委員会, 1980.
- 7) 谷内俊弥・西原功修: 非線形波動, 岩波書店, 1977.
- 8) 例えば Landau, L. D. and E. M. Lifschitz: 竹内均訳 (1971) 流体力学 II, 東京図書.
- 9) 岩佐義朗・井上和也・片山猛: 開水路非定常流の数値計算法について, 京都大学防災研究所年報, 第 19 号 B-2, 1976, pp. 187 - 200.
- 10) 細田 尚・岩佐義朗: 開水路における波動の分散性, 第 26 回水理講演会論文集, 1982, pp. 401 - 407.