

開水路流れにおける乱れ特性量の普遍関数表示について

今 本 博 健

ON THE TURBULENCE CHARACTERISTICS IN A FREE SURFACE SHEAR FLOW IN TERMS OF A UNIVERSAL FUNCTION

By *Hirotake* IMAMOTO

Synopsis

Using the flow similarity which is known as the Reynolds number similarity, the Eulerian properties of turbulence in a free surface shear flow will be first concerned in terms of a universal function expressed with the flow depth, the shear velocity and the local mean velocity.

Explicit functions for two kinds of basic properties of turbulence are able to determine the functional forms of other turbulent properties in a system of universal functions. The selection of the best system is examined by the Eulerian data of turbulence in open channel flows, such as the turbulence intensity, the integral scale and the ratio of turbulent energy dissipation per unit mass and time.

It will be concluded that the friction coefficient may be treated as an important factor of turbulent shear flow, similarly with the velocity defect law.

1. 概 説

開水路流れにおける乱流現象は流れ自体の本質的特性を形成する基本的要素であると同時に、乱流拡散現象、浮遊砂流の問題など水工学上の諸問題ともきわめて密接な関連をもつ現象であって、乱流現象の解明の重要性についてはすでに多くの研究者によって認識されている。乱流現象を解明するためには、乱れ計測により乱れの実体を把握するということが基本事項として挙げられるが、水流における乱れ計測には多くの技術的困難さが付随し、水流の乱れ特性について十分に把握されたとはいえない状態である。

本研究は、開水路流れにおける乱れ特性について、Reynolds 数が大きい流れの乱流構造の相似性に着目し、いわゆる Reynolds 数相似則を適用することにより、種々の乱れ特性量について巨視的な水理量によって普遍関数表示を行なうとともに、実測データに基づき普遍関数の関数形についても若干の検討を行なおうとするものである。

本研究において対象とされる流れは、開水路流れのなかでももっとも基本的な定常等流状態の2次元開水路流れであって、いわゆる1重構造のせん断乱流に相当する。実際の開水路流れにおいては、乱れエネルギーの生成を特性づけるスケールとして、水深および水路幅のほかに路床面の凹凸あるいは彎曲部などの縦横断形状の特性によって定まるスケールが関与するものと考えられ、多重構造としての取り扱いが必要である。このことは1重構造に基づく理論的取り扱いの実測データによる検討の困難さをもたらす。

乱れ計測による乱れ特性量の解析においては、さらに、計測スケールの効果に関する考慮が必要であって、乱れの多重構造性ととともに乱流現象の把握を困難にしているが、最近の乱れ計測技術の進歩により、開水路流れの乱れ特性についてもかなり明確となりつつあるため、普遍関数表示に関する検討も一部の基本的乱れ特性量については可能である。

2. Reynolds 数相似則

粘性のあまり大きくない流体の流れの構造は、粘性にほとんど関係せず、流れの境界条件のみによって支配される、すなわち、Reynolds 数が大きい場合、幾何的形狀の相似な流れは乱れの構造も相似となるということは Reynolds 数相似則 (Reynolds number similarity) としてよく知られている¹⁾。このような現象は、壁面乱流においては、乱れエネルギーの生成は、大部分が壁面近傍において行なわれ、壁面から十分離れた場所では、乱れエネルギーの逸散および拡散が乱流構造を決定する支配的要素となるということから理解することができる。

定常等流状態の 2 次元開水路流れに対して Reynolds 数相似則を適用するとつぎのようである。すなわち、2 次元開水路流れの基本的水理量として、水路の幾何的形狀を代表する量として水深 H を、また流れの境界条件を代表する量として壁面における摩擦の大きさを表わす摩擦速度 U_f を用いることにすると、流れの平均場の特性、すなわち平均流速分布およびせん断応力分布はこれらの 2 量を用いてつぎのように表わすことができる。まず、平均流速分布は壁面近傍を除いて、

$$\frac{U_H - U}{U_f} = \phi_v\left(\frac{z}{H}\right) \dots\dots\dots (1)$$

と表わされる²⁾。ここに、 U_H は $z=H$ における平均流速を表わし、 $\phi_v(z/H)$ は相対水深 z/H のみの関数であって、壁面の粗さあるいは Reynolds 数の大きさなどに関係しないという意味から平均流速分布に対する普遍関数 (universal function) といわれる。(1) 式の表示は速度欠損則 (velocity defect law) として広く用いられている。また、流体中のせん断応力は流体の粘性にもとづく粘性応力と乱れ運動にもとづく Reynolds 応力の和として表わされるが、一般に、壁面近傍を除いて粘性応力は Reynolds 応力に比し無視できるほど小さいため、せん断応力分布はつぎのように表わすことができる。

$$\frac{\tau}{\rho U_f^2} = -\frac{uw}{U_f^2} = \phi_r\left(\frac{z}{H}\right) \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 ρ は流体の単位体積当りの質量、 u および w はそれぞれ流れ方向および鉛直方向の乱れ成分を表わし、 $\phi_r(z/H)$ はせん断応力分布に対する普遍関数である。

つぎに、乱れ特性量として、乱れの強さ u' , Euler 的および Lagrange 的平均スケール L_E および L_L とその時間的スケール T_E および T_L , Taylor の逸散スケール λ , Kolmogoroff の局所スケール η , エネルギー逸散率 ϵ , ならびに乱流拡散係数 D を取り上げると、これらの量の間にはつぎの関係式が成立する。

まず、Taylor³⁾ の逸散スケールおよび Kolmogoroff⁴⁾ の局所スケールについては、それぞれの定義より、

$$\epsilon = 15\nu \frac{u'^2}{\lambda^2} \dots\dots\dots (3)$$

$$\epsilon = \frac{\nu^3}{\eta^4} \dots\dots\dots (4)$$

が成立する。ここに、 ν は流体の動粘性係数、 u' は流れ方向の乱れ速度の RMS を表わす。

一方、エネルギー逸散率は u'^2 という乱れエネルギーが T_L 時間の間に熱として逸散されることを示しているから

$$\epsilon \sim \frac{u'^2}{T_L} \dots\dots\dots (5)$$

と表わすことができる。Euler 的システムと Lagrange 的システムとの間の関係として Hay および Pasquill⁵⁾ の関係式を用いることにすると、 u' が U に比し小さく Taylor⁶⁾ の凍結乱流の仮定が適用される場合、つぎのように表わすことができる。

$$T_L = \frac{L_L}{U} \sim \frac{U}{u'} T_E = \frac{L_E}{u'} \quad \text{i.e.} \quad \frac{L_L}{L_E} \sim \frac{U}{u'} \dots\dots\dots (6)$$

(6)式の関係は Kolmogoroff の相関関数に関する相似則より得ることもできる⁷⁾。

(6)式を(5)式に用いるとつぎようになる。

$$\epsilon \sim \frac{u'^3}{L_E} \dots\dots\dots (7)$$

また、乱流拡散係数は拡散時間が十分大きい場合、

$$D = u' T_L \dots\dots\dots (8)$$

となるから⁸⁾、(6)式を用いて書き直すと

$$D \sim u' L_E \dots\dots\dots (9)$$

となる。

以上より明らかなように、乱れ特性量、すなわち、乱れの強さ、平均スケール、逸散スケール、エネルギー逸散率、および乱流拡散係数のうち、いずれか2量が与えられると他の量も決定されることになる。

3. 乱れ特性量の普遍関数表示

前述のように2種の乱れ特性量より残りの特性量は決定されることになるが、以下においては、乱れ特性量として乱れの強さ、平均スケール、およびエネルギー逸散率の3量を基本的乱れ特性量として取り上げ、それぞれの普遍関数表示について考察するとともに、いずれか2種の基本的乱れ特性量を用いて他の乱れ特性量に対する普遍関数表示について明らかにしようとするものである。

まず、大気乱流に関する Monin-Obukhov の相似則⁷⁾によると、乱れの鉛直成分の強さ w' はつぎのように表わされる。

$$\frac{w'}{U_f} = F\left(\frac{z}{L_{Mo}}\right) \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $F(z/L_{Mo})$ は普遍関数を表わし、 z は地表面からの高さである。また、 L_{Mo} は Monin-Obukhov の長さといわれるものであって、大気の安定度などの関数である。(10)式と同じ表示を2次元開水路流れにおける流れ方向の乱れ成分の強さ u' に適用するとつぎようになる。

$$\frac{u'}{U_f} = \phi_{u'}\left(\frac{z}{H}\right) \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $\phi_{u'}(z/H)$ は乱れの強さに関する普遍関数であって、(10)式と(11)式とを比較すればわかるように、(10)式における w' および L_{Mo} は(11)式においてそれぞれ u' および H に置き換えられている。

つぎに、Euler 的平均スケールについては、Engelund⁹⁾ によりつぎのような普遍関数表示が提案されている。すなわち、乱流場を特性づける基本的水理量として、すでに述べた水深 H および摩擦速度 U_f を用いることにすると、次元解析の考察より、これらの2量より時間の次元をもつ量は H/U_f であることがわかる。したがって、Euler 的平均時間スケール T_E を H/U_f で割った量は相対水深 z/H の普遍関数になると予測され、Euler 的平均スケール L_E に対してつぎの普遍関数表示が可能となる。

$$\frac{T_E}{H/U_f} = \frac{L_E}{H(U/U_f)} = \phi_{LE}\left(\frac{z}{H}\right) \dots\dots\dots (12)$$

また、エネルギー逸散率については、乱れのエネルギー式よりつぎのような普遍関数表示が行なわれる。すなわち、Laufer¹⁰⁾ の乱れエネルギーの平衡状態に関する実験結果より明らかなように、壁面近傍を除いてつぎのように表わすことができる¹¹⁾。

$$(\text{production}) = (\text{diffusion}) + (\text{dissipation}) \dots\dots\dots (13)$$

2次元開水路流れの場合、Reynolds 応力は自由表面での0から路床に向かって直線的に増加し、平均流速分布は対数則で表わされると仮定すると、生成項はつぎようになる。

$$(\text{production}) = -\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} = U_f^2 \left(1 - \frac{z}{H}\right) \frac{U_f}{\kappa z} \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 κ は Kármán 定数である。したがって、乱れエネルギーの生成量を U_f^3/H で割った量は z/H の

みの関数となることがわかる。これより類推して、エネルギー逸散率を U_f^3/H で割った量も z/H のみの関数となるとすると、エネルギー逸散率に対する普遍関数表示として次式が得られる¹²⁾。

$$\frac{\epsilon}{U_f^3/H} = \phi_\epsilon\left(\frac{z}{H}\right) \quad \dots\dots\dots (15)$$

以上のように、乱れの強さ、Euler 的平均スケール、およびエネルギー逸散率に対する普遍関数表示として、(11), (12), (15) 式が得られるが、これらの 3 式を (7) 式に用いると、

$$\frac{U_f^3}{H} \phi_\epsilon \sim \frac{U_f^3 \phi_{u'}^3}{H \frac{U}{U_f} \phi_L} \quad \text{i.e.} \quad \phi_\epsilon \sim \frac{\phi_{u'}^3}{\left(\frac{U}{U_f}\right) \phi_L} \quad \dots\dots\dots (16)$$

となり、 U/U_f は z/H のみの関数とならないため、いずれかの普遍関数表示は正しくないものと考えられる。

2 で述べたように、乱れ特性量は 2 種の基本的乱れ特性量によって代表されるため、乱れの強さ、Euler 的平均スケール、およびエネルギー逸散率のうちの 2 量に対する普遍関数表示を用いて、他の乱れ特性量に対する普遍関数表示を行なうとつぎのようになる。すなわち、

A: エネルギー逸散率および Euler 的平均スケールに対する普遍関数表示 (15) 式および (12) 式を用いる場合、

B: エネルギー逸散率および乱れの強さに対する普遍関数表示 (15) 式および (11) 式を用いる場合

C: 乱れの強さおよび Euler 的平均スケールに対する普遍関数表示 (11) 式および (12) 式を用いる場合
の 3 ケースに分け、それぞれの場合について他の乱れ特性量に対する普遍関数表示を行ない、表にまとめると Table 1 のようになる。

Table 1 Turbulence properties in Eulerian and Lagrangian descriptions given by universal function.

TURBULENCE PROPERTIES	CASE A	CASE B	CASE C
TURBULENCE INTENSITY	$\frac{u'}{U_f(U/U_f)^{1/3}} = \phi_{u'}^a\left(\frac{z}{H}\right)$	$\frac{u'}{U_f} = \phi_{u'}^b\left(\frac{z}{H}\right)$	$\frac{u'}{U_f} = \phi_{u'}^c\left(\frac{z}{H}\right)$
EULERIAN MEAN SCALE	$\frac{L_E}{H(U/U_f)} = \phi_{L_E}^a\left(\frac{z}{H}\right)$	$\frac{L_E}{H} = \phi_{L_E}^b\left(\frac{z}{H}\right)$	$\frac{L_E}{H(U/U_f)} = \phi_{L_E}^c\left(\frac{z}{H}\right)$
ENERGY DISSIPATION RATIO	$\frac{\epsilon}{U_f^3/H} = \phi_\epsilon^a\left(\frac{z}{H}\right)$	$\frac{\epsilon}{U_f^3/H} = \phi_\epsilon^b\left(\frac{z}{H}\right)$	$\frac{\epsilon}{U_f^3/H(U/U_f)} = \phi_\epsilon^c\left(\frac{z}{H}\right)$
TAYLOR'S DISSIPATION SCALE	$\frac{\lambda}{H(U_f H/\nu)^{-1/2}(U/U_f)^{1/2}} = \phi_\lambda^a\left(\frac{z}{H}\right)$	$\frac{\lambda}{H(U_f H/\nu)^{-1/2}} = \phi_\lambda^b\left(\frac{z}{H}\right)$	$\frac{\lambda}{H(U_f H/\nu)^{-1/2}(U/U_f)^{1/2}} = \phi_\lambda^c\left(\frac{z}{H}\right)$
KOLMOGOROFF'S LOCAL SCALE	$\frac{\eta}{H(U_f H/\nu)^{-3/4}} = \phi_\eta^a\left(\frac{z}{H}\right)$	$\frac{\eta}{H(U_f H/\nu)^{-3/4}} = \phi_\eta^b\left(\frac{z}{H}\right)$	$\frac{\eta}{H(U_f H/\nu)^{-3/4}(U/U_f)^{1/4}} = \phi_\eta^c\left(\frac{z}{H}\right)$
RELATION BETWEEN LAGRANGIAN AND EULERIAN SYSTEM	$T_L = \frac{L_L}{U} \sim \frac{U}{u'}, T_E = \frac{L_E}{u'}$		
LAGRANGIAN MEAN SCALE	$\frac{L_L}{H(U/U_f)^{5/3}} = \phi_{L_L}^a\left(\frac{z}{H}\right)$	$\frac{L_L}{H(U/U_f)} = \phi_{L_L}^b\left(\frac{z}{H}\right)$	$\frac{L_L}{H(U/U_f)^2} = \phi_{L_L}^c\left(\frac{z}{H}\right)$
LAGRANGIAN DIFFUSION COEFFICIENT	$\frac{D}{U_f H(U/U_f)^{4/3}} = \phi_D^a\left(\frac{z}{H}\right)$	$\frac{D}{U_f H} = \phi_D^b\left(\frac{z}{H}\right)$	$\frac{D}{U_f H(U/U_f)} = \phi_D^c\left(\frac{z}{H}\right)$

Table 1 より明らかなように、各ケースを分離する要素は局所平均流速と摩擦速度との比 U/U_f である。相対水深 z/H と U/U_f との関係は、(1)より明らかなように、 U_H/U_f あるいは U_m/U_f が与えられると決定されるから、 U/U_f は z/H と U_m/U_f すなわちまさつ抵抗係数の関数となることがわかる。とくに室内実験の場合、まさつ抵抗係数は壁面の粗度によってもっとも大きく支配されるため、粗度が一定の水路における実験においては、まさつ抵抗係数は顕著に変化せず、**Table 1** に示されるケースごとの差異もまたそれほど大きくはならない。したがって、各ケースの優劣性を論ずるためには、ケースごとの差異が顕著となるように水理条件を大きく変化した実験が必要である。

4. 開水路流れにおける普遍関数関数形

3 において取り上げられた乱れの基本的特性量のうち、エネルギー逸散率は Kolmogoroff の相似則よりも明らかなように、高波数（小スケール）の乱れ特性を規定するもっとも重要な特性量であると同時に、乱れの計測スケールにほとんど関係しない絶対的な特性量とみなされるため、エネルギー逸散率の特性を解明することは、開水路流れにおける乱れ特性を取り扱ううえでの基本的事項となる。しかしながら、エネルギー逸散率に関する測定値は現在まであまり得られていず、今後の実験的研究に待つところが大きい。

一方、乱れの強さおよび Euler 的平均スケールは、乱れの計測スケールに応じて定まる相対的な特性量ではあるが、乱れ計測における基本的な段階における解析対象として、これまでにかなり多くのデータが発表されている。しかしながら、乱れの強さおよび Euler 的平均スケールは、いずれも主として低波数（大スケール）の乱れの特性によって大きく支配されることから類推できるように、とくに平均値評価時間によって大きく変化するため、平均値評価時間の異なったデータより解析された量間の比較は無意味となる。このことは Euler 的平均スケールについてとくに著しい。これに対し、乱れの強さは、もちろん計測スケールによって変化する相対的な特性量ではあるが、Euler 的平均スケールに対するほど平均値評価時間の効果は顕著ではなく、実測データももっとも多く発表されている。

以下においては、**3** において取り扱った乱れ特性量に対する普遍関数表示のうち、理論的根拠に富みもっとも確からしいと考えられるエネルギー逸散率の普遍関数表示に着目し、定常等流状態の2次元開水路流れを対象とした場合における、ケースAおよびBの種々の乱れ特性量に対する普遍関数の関数形について考察することにする。

ケースAの場合：**Table 1** に示されるように、乱れの強さ、Euler 的平均スケール、およびエネルギー逸散率に対する普遍関数表示はつぎのようである。

$$\frac{u'}{u_f(U/U_f)^{1/3}} = \phi_{u'}^a\left(\frac{z}{H}\right) \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{L_E}{H(U/U_f)} = \phi_{L_E}^a\left(\frac{z}{H}\right) \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{\epsilon}{U_f^3/H} = \phi_{\epsilon}^a\left(\frac{z}{H}\right) \dots\dots\dots (19)$$

以上の普遍関数表示のうち、乱れの強さに関する(17)式の表示は、従来の研究においてはほとんど取り扱われておらず、著者により提案されたものであるが¹²⁾、 $\phi_{u'}^a(z/H)$ の関数形についてはまだ明らかにされていない。したがって、ここでは Euler 的平均スケールおよびエネルギー逸散率に対する普遍関数に基礎を置くことにする。

Euler 的平均スケールに対する普遍関数表示(18)式は、すでに述べたように、Engelund⁹⁾ による次元解析の考察より得られたものであるが、 $\phi_{L_E}^a(z/H)$ の関数形については $\phi_{u'}^a(z/H)$ に対すると同様、ほとんど不明である。また、Euler 的平均スケールを実測データより算定する場合、計測スケールとくに平均値評価時間によって大きく影響されるとともに、相関関数を用いるかスペクトルを用いるかという評価法によっても異なり、信頼性の高いデータはきわめて少ない。このため、ここではつぎのような乱流場のモデルによ

って Euler 的平均スケールに対する普遍関数形を求めることにする。すなわち、開水路流れにおける乱れエネルギーの供給は主として路床近傍における間欠的な上昇流（余越¹³⁾）による Π 管モデルによってその機構が明らかにされる可能性がある）によってもたらされると考えられるが、間欠的な周期はかなり長くそれによって形成される乱れのスケールもまたかなり大きいものと予測される。したがって、このようなスケールが水深より大きいものとする、鉛直方向の変化はほとんど無視でき水平方向のみの特性によって把握することができるから、このようなスケールの乱れが水深方向の任意の 1 点を通過する時間的間隔は路床からの高さには関係しないと考えられる。いま、このような時間的間隔を基本的水理量 H および U_f より形成される時間の次元をもつ量 H/U_f によって無次元化したものが普遍関数となるとすると、その関数形はつぎのように表わされる。すなわち、

$$\phi_{LE}^a\left(\frac{z}{H}\right) = \frac{L_E}{H(U/U_f)} \sim \text{const.} \quad (20)$$

(20) 式は後述の Velikanov による Strouhal 数一定という考え方にきわめてよく似ているが、Velikanov のモデルは、流れ方向に一定の長さをもった乱塊を対象としているのに対し、(20) 式は乱塊の発生周波数が一定となることを意味しており、その物理的意義はかなり異なる。

一方、エネルギー逸散率に対する (19) 式の関数形についても不明の点が多いが、エネルギー生成率に対する (14) 式より類推すると、

$$\phi_\epsilon^a\left(\frac{z}{H}\right) = \frac{\epsilon}{U_f^3/H} = \frac{(1-z/H)}{\kappa z/H} \quad (21)$$

と表わされる。Hinze¹⁴⁾ による乱れのエネルギーバランスに関する考察によると、エネルギー生成率による近似法は路床よりかなり離れたところで成立するものと考えられる。また、Laufer¹⁰⁾ らの実験結果より明らかのように、(21) 式は自由表面近傍においては過小評価となることより、

$$\phi_\epsilon\left(\frac{z}{H}\right) \sim \frac{1}{\kappa(z/H)} \quad (22)$$

とすることが考えられる。(21) 式と (22) 式とは z/H が 0 に近づくにつれ同じ値を示すようになるが、エネルギー式より推測されるように、いずれも路床近傍に対しては過大評価となる。

以上の Euler 的平均スケールおよびエネルギー逸散率に対する普遍関数を用いて他の乱れ特性量に対する普遍関数を求めると **Table 2** のようになる。

ケース B の場合：この場合、**Table 1** に示されるように、乱れの強さ、Euler 的平均スケール、エネルギー逸散率に対する普遍関数表示はつぎのようである。

$$\frac{u'}{U_f} = \phi_{u'}^b\left(\frac{z}{H}\right) \quad (23)$$

$$\frac{L_E}{H} = \phi_{LE}^b\left(\frac{z}{H}\right) \quad (24)$$

$$\frac{\epsilon}{U_f^3/H} = \phi_\epsilon^b\left(\frac{z}{H}\right) \quad (25)$$

従来の乱れ特性量に対する取り扱いにおいては、乱れの強さおよび Euler 的平均スケールについて、それぞれ、(23) 式および (24) 式の表示が多く用いられ、開水路流れの場合についてもいくつかの実験式が提案されている。以下にその代表的なものについて述べる。

大気乱流における乱れの強さに対して Monin および Obukhov⁷⁾ により提案された (23) 式の関数形について、Panofsky および McCormick¹⁵⁾ は乱れの強さが Reynolds 応力に比例するとしているが、開水路流れにおける Reynolds 応力の分布として自由表面における 0 から路床に向って直線的な増加を仮定すると、つぎのようになる。

$$\frac{u'}{U_f} \sim \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

Table 2 Explicit formulations of turbulence properties.

	BASIC PROPERTIES	TURBULENCE INTENSITY	EULERIAN MEAN SCALE	ENERGY DISSIPATION RATIO
A - 1	L_E and ϵ	$\frac{u'}{U_f(U/U_f)^{1/3}}$ $\sim \left(\frac{z}{H}\right)^{-1/3} \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{1/3}$	$\frac{L_E}{H(U/U_f)} \sim \text{const.}$	$\frac{\epsilon}{U_f^3/H}$ $= \left(\kappa \frac{z}{H}\right)^{-1} \left(1 - \frac{z}{H}\right)$
A - 2	L_E and ϵ	$\frac{u'}{U_f(U/U_f)^{1/3}} \sim \left(\frac{z}{H}\right)^{-1/3}$	$\frac{L_E}{H(U/U_f)} \sim \text{const.}$	$\frac{\epsilon}{U_f^3/H} \sim \left(\frac{z}{H}\right)^{-1}$
B - 1	u' and L_E	$\frac{u'}{U_f} \sim \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{1/2}$	$\frac{L_E}{H} \sim \text{const.}$	$\frac{\epsilon}{U_f^3/H} \sim \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{3/2}$
B - 2	u' and L_E	$\frac{u'}{U_f} \sim \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{1/2}$	$\frac{L_E}{H} \sim \left(\frac{z}{H}\right)$	$\frac{\epsilon}{U_f^3/H}$ $\sim \left(\frac{z}{H}\right)^{-1} \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{3/2}$
B - 3	u' and ϵ	$\frac{u'}{U_f} \sim \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{1/2}$	$\frac{L_E}{H} \sim \left(\frac{z}{H}\right) \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{1/2}$	$\frac{\epsilon}{U_f^3/H}$ $= \left(\kappa \frac{z}{H}\right)^{-1} \left(1 - \frac{z}{H}\right)$
B - 4	u' and ϵ	$\frac{u'}{U_f} \sim \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{1/2}$	$\frac{L_E}{H} \sim \left(\frac{z}{H}\right) \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{3/2}$	$\frac{\epsilon}{U_f^3/H} \sim \left(\frac{z}{H}\right)^{-1}$
B - 5	u' and L_E	$\frac{u'}{U_f} = 2 - 1.3 \frac{z}{H}$	$\frac{L_E}{H} \sim \text{const.}$	$\frac{\epsilon}{U_f^3/H} \sim \left(2 - 1.3 \frac{z}{H}\right)^3$
B - 6	u' and L_E	$\frac{u'}{U_f} = 2 - 1.3 \frac{z}{H}$	$\frac{L_E}{H} \sim \frac{z}{H}$	$\frac{\epsilon}{U_f^3/H}$ $\sim \left(\frac{z}{H}\right)^{-1} \left(2 - 1.3 \frac{z}{H}\right)^3$
B - 7	u' and ϵ	$\frac{u'}{U_f} = 2 - 1.3 \frac{z}{H}$	$\frac{L_E}{H} \sim$ $\left(\frac{z}{H}\right) \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{-1} \left(2 - 1.3 \frac{z}{H}\right)^3$	$\frac{\epsilon}{U_f^3/H}$ $= \left(\kappa \frac{z}{H}\right)^{-1} \left(1 - \frac{z}{H}\right)$
B - 8	u' and ϵ	$\frac{u'}{U_f} = 2 - 1.3 \frac{z}{H}$	$\frac{L_E}{H} \sim \left(\frac{z}{H}\right) \left(2 - 1.3 \frac{z}{H}\right)^3$	$\frac{\epsilon}{U_f^3/H} \sim \left(\frac{z}{H}\right)^{-1}$
B - 9	L_E and ϵ	$\frac{u'}{U_f} \sim \left(\frac{z}{H}\right)^{-1/3} \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{1/3}$	$\frac{L_E}{H} \sim \text{const.}$	$\frac{\epsilon}{U_f^3/H}$ $= \left(\kappa \frac{z}{H}\right)^{-1} \left(1 - \frac{z}{H}\right)$
B - 10	L_E and ϵ	$\frac{u'}{U_f} \sim \left(\frac{z}{H}\right)^{-1/3}$	$\frac{L_E}{H} \sim \text{const.}$	$\frac{\epsilon}{U_f^3/H} \sim \left(\frac{z}{H}\right)^{-1}$
B - 11	L_E and ϵ	$\frac{u'}{U_f} \sim \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{1/3}$	$\frac{L_E}{H} \sim \frac{z}{H}$	$\frac{\epsilon}{U_f^3/H}$ $= \left(\kappa \frac{z}{H}\right)^{-1} \left(1 - \frac{z}{H}\right)$
B - 12	L_E and ϵ	$\frac{u'}{U_f} \sim \text{const.}$	$\frac{L_E}{H} \sim \frac{z}{H}$	$\frac{\epsilon}{U_f^3/H} \sim \left(\frac{z}{H}\right)^{-1}$

(26)式は自由表面では乱れの強さが0となり実際と合わない。一方, Jonsson¹⁶⁾ は気流に関する Reichardt¹⁷⁾, Laufer^{10), 18)}, Klebanoff¹⁹⁾ らの実験結果を用いて, 相対水深 z/H が0.1以上の領域についてつぎの関数形を提案している。

$$\frac{u'}{U_f} = 2.0 - 1.3 \frac{z}{H} \dots\dots\dots (27)$$

Euler 的平均スケールについては, ケースAのところで述べたように, 実測値のデータに対する信頼度はかなり低下するが, (24)式の普遍関数表示を用いたものとしてつぎのものがある。まず, Velikanov²⁰⁾ は, Euler 的平均時間スケール T_E の逆数, 水深 H , および局所平均流速 U によって形成される Strouhal 数 S_h が z/H に関係なく一定になるとし, その値として0.73を提案している。すなわち,

$$S_h = \frac{T_E^{-1} H}{U} = 0.73 \dots\dots\dots (28)$$

したがって, (28)式を書き変えると,

$$\frac{L}{H} = 1.4 \dots\dots\dots (29)$$

となり, Euler 的平均スケールは相対水深に関係なく一定となる。一方, Rudiš および Smutěk²¹⁾ は, Strouhal 数は Froude 数 $F_r = U/\sqrt{gH}$ によって変化するとし,

$$\frac{1}{\sqrt{S_h}} \sim F_r \dots\dots\dots (30)$$

という関係式を提案しているが, これを書き直すと,

$$\frac{L}{H} \sim \left(\frac{U}{U_f}\right)^2 I_e \quad (U_f = \sqrt{gHI_e}) \dots\dots\dots (31)$$

ただし, I_e はエネルギーこう配, となり, L/H は z/H のみの関数とは見せなくなる。大気乱流の実測結果によると, 低周波数領域におけるスペクトルは周波数として, 地面よりの高さ z および流速 U によって無次元化したものを用いると, z に関係なく1つの関数形で表わせることが示されているが¹⁵⁾, このことは T_E が z/U に比例することを意味している。すなわち,

$$\frac{L}{H} \sim \frac{z}{H} \dots\dots\dots (32)$$

となることを示している。(32)式の開水路流れへの適用性については不明であるが, 余越²²⁾ は Velikanov の理論(28)式における H を z に置き換え, (32)式と同じ表示を用いている。

以上のようにケースBの普遍関数表示を行なう場合の乱れの強さおよび Euler 的平均スケールについては種々の関数形が提案されているが, これらの関数形を組み合わせることにより他の乱れ特性量に対する普遍関数を求めると Table 2 のようになる。なお, エネルギー逸散率についてはケースAの場合と同様であるから, エネルギー逸散率として(21)式および(22)式を用いた場合についても Table 2 に示しておく。

5. 実測値による検討

定常等流状態の2次元開水路流れに Reynolds 数相似則を適用することにより導かれた乱れ特性量に関する普遍関数を実験的に検討するためには実験条件としてつぎの条件が必要である。

- 1) Reynolds 数が十分に大きい。
- 2) 水路幅水深比が十分に大きい。

1)の条件は, 完全に発達した乱流を対象とするということであって, Reynolds 数相似則そのものの適用条件と考えられる。2)の条件は, 流れの2次元性を規定するものであって, 壁面せん断応力分布ならびに水路中央部における鉛直(水深)方向の平均流速分布特性に関する Rajaratnam および Muralidhar²³⁾ の実験結果より類推すると, 2次元流れとしての取り扱いが十分に可能な水路幅水深比の限界は10程度と考えられ, 実用上においても少なくとも5以上であることが望まれる。このことは開水路流れにおける Lagrange 的乱

Table 3 Hydraulics conditions in turbulence measurements.

Name	Exp. No.	B/H	U_m/U_f	Re	Fr	Techniques
Ippen-Raichlen ²⁵⁾	fig. 10	37.7	22.4	5.20×10^4	3.199	total head tube flowmeter
	fig. 11	44.0	22.5	5.43×10^4	4.222	
Jonsson ¹⁶⁾	SR	7.7	10.7	1.12×10^5	0.582	propeller flowmeter
	BR	7.6	7.2	8.50×10^4	0.435	
Raichlen ²⁶⁾	H-2	2.5	23.1	6.62×10^4	0.248	hot-film flowmeter
	H-5	2.7	29.3	9.11×10^4	0.385	
McQuivey-Richardson ²⁷⁾	rough	6.0	11.7	1.19×10^4	0.538	hot-film flowmeter
	smooth	6.4	19.5	6.80×10^3	0.355	
Engelund ⁹⁾	A	40.4	8.3	1.64×10^4	0.410	propeller and hot-film flowmeter
	B	12.7	19.1	5.29×10^4	0.235	
Imamoto ²⁸⁾	9×22	11.4	19.0	1.52×10^6	0.279	propeller flowmeter
	9×23	19.6	18.0	1.10×10^6	0.458	
	9×24	36.7	20.7	6.50×10^5	0.371	

B : channel width, H : water depth, U_m : mean velocity in vertical section, U_f : friction velocity, Re: Reynolds number ($= U_m H / \nu$), ν : kinematic viscosity, Fr: Froude number ($= U_m / \sqrt{gH}$), g : acceleration of gravity.

れ計測結果によっても確かめられている²⁴⁾。

以上の2条件を考慮することにより、本研究においては、開水路流れにおける乱れ計測として、Ippen および Raichlen²⁵⁾, Jonsson¹⁶⁾, Raichlen²⁶⁾, McQuivey および Richardson²⁷⁾, Engelund⁹⁾, および著者²⁸⁾ によるものを対象とするが、それぞれの実験における水理条件は **Table 3** に示す通りである。**Table 3** より明らかなように、Raichlen の実験条件は水路幅水深比がかなり小さく、2次元流れとしての取り扱いには問題がある。また、McQuivey および Richardson の実験条件は Reynolds 数が他の場合に比しかなり小さいが、開水路流れにおける層流から乱流への遷移 Reynolds 数 (約 500) と比較すると、許容範囲にあると考えられる。

なお、著者によるものは木曾川濃尾用水における野外観測によるものであるが、その他はすべて室内実験水路における計測結果である。

5.1 乱れの強さ

流れ方向の乱れ速度の RMS 値 (乱れの強さ) u' についてのケース A および B の普遍関数表示を比較するため、 u' をそれぞれ $u'/U_f(U/U_f)^{1/3}$ および u'/U_f によって無次元化し、相対水深 z/H との関係を示すと **Fig. 1** のようである。両者における乱れ速度の測定値のバラバラの程度を比較するため、乱れ速度の無次元量については対数表示がなされている。**Fig. 1a** および **1b** の比較より明らかなように、**Fig. 1a** は **1b** に比しバラバラはかなり小さく、ケース A の普遍関数表示が秀れていると考えられる。

ケース A における乱れの強さに関する普遍関数表示を用いた場合の関数形について明らかにするため、**Table 2** に示された2種の関数形、すなわち、

$$\frac{u'}{U_f(U/U_f)^{1/3}} \sim \left(\frac{z}{H}\right)^{-1/3} \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{-1/3} \dots\dots\dots (33)$$

$$\frac{u'}{U_f(U/U_f)^{1/3}} \sim \left(\frac{z}{H}\right)^{-1/3} \dots\dots\dots (34)$$

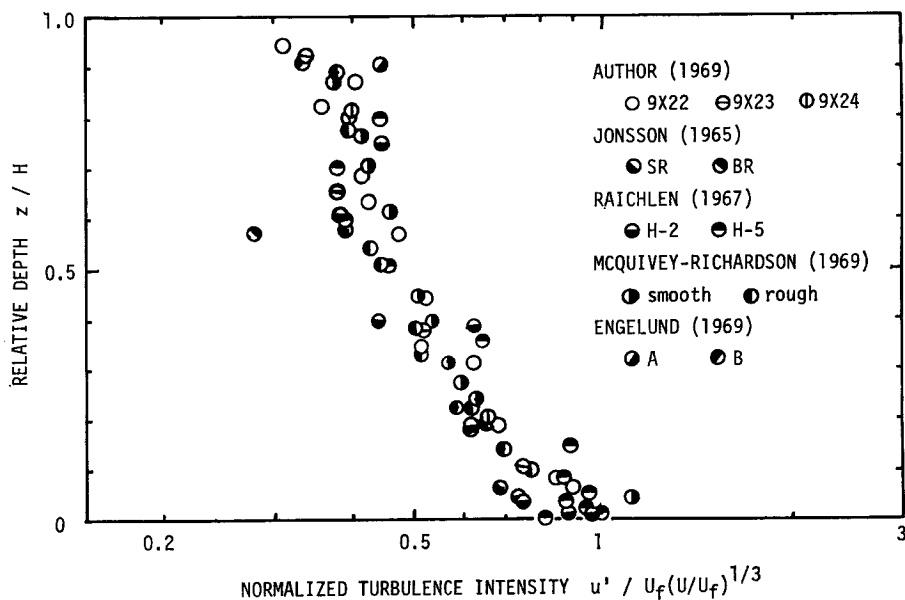


Fig. 1 a Turbulence intensity in free surface shear flows in form of universal function in case A.

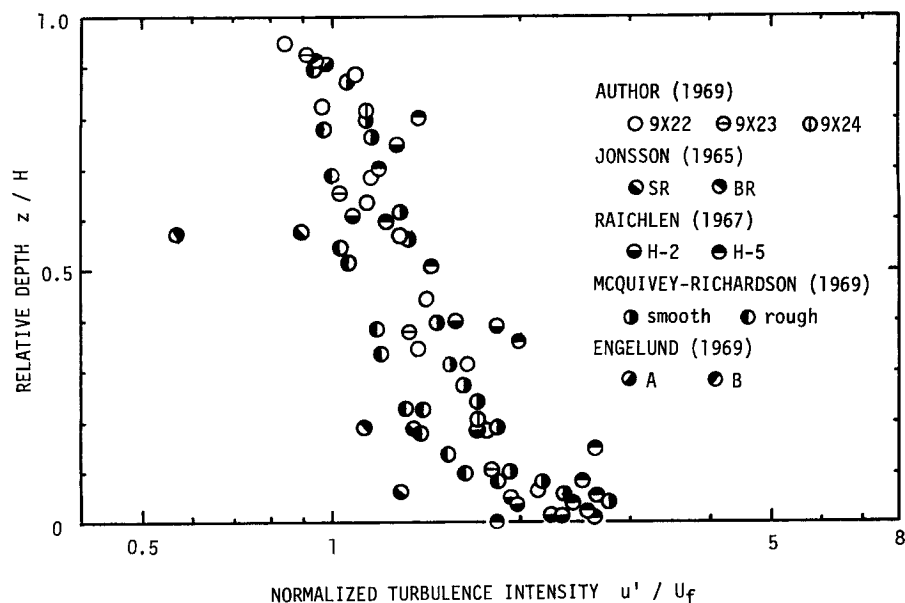


Fig. 1 b Turbulence intensity in free surface shear flows in form of universal function in case B.

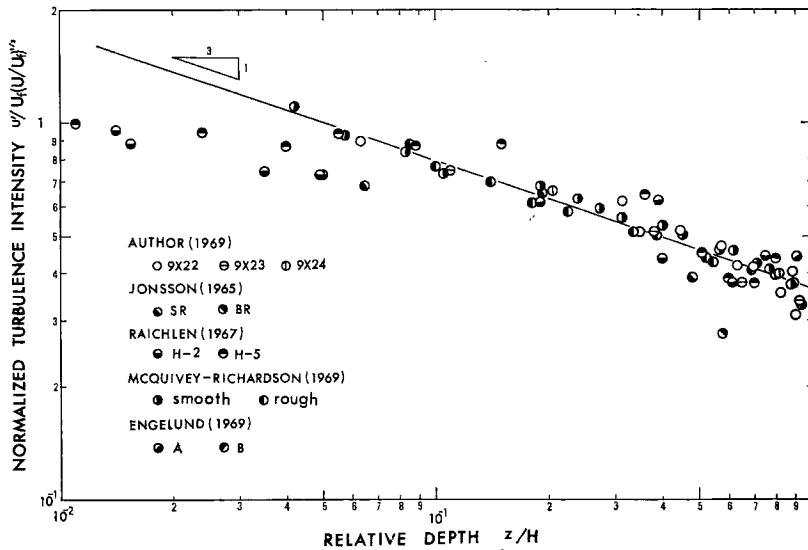


Fig. 2 Turbulence intensity in free surface shear flows.

と実測値とを比較するため、Fig. 1 に示された乱れ速度の実測値を両対数紙上に書き直したのが Fig. 2 である。Fig. 2 に見られるように、(34) 式の普遍関数は路床近傍を除いて実測値とかなりよく一致している。

5.2 Euler 的平均スケール

平均スケールの定義は、通常、相関係数の無限距離にわたる積分値として与えられる。すなわち、

$$L = \int_0^{\infty} R(r) dr \quad (35)$$

実用上においては無限時間にわたる相関係数を得ることは不可能であるため、(35) 式の定義によって平均スケールを算定することはできず、(35) 式の積分上限値を適当な有限値に置き換えるか、適当な関数形を相関係数に当てはめその関数形の特性量を相関係数の実測値より決定するという方法が採られる。たとえば Panofsky によるセミスケールの方法は後者の方法の一例であって、実際の平均スケールの算定においてはきわめて便利な方法であるが、相関係数の関数形そのものが未解明であるため、つねにうまく適用されるとはいえず検討を要する点が多い。本研究においては、実測された相関係数がかなりよく指数関数形で表わされるということおよび他の研究者による平均スケールの測定値と比較に用いるため解析法もできるだけ共通にするという観点から、主としてずれ時間の小さな領域の相関係数に指数関数を当てはめることにより平均スケールを算定するという方法を用いた。したがって、計測された相関係数が指数関数形より大きく離反する場合には平均スケールの測定値から除外されているが、この点については今後の検討を要する。

Euler 的平均スケールをケース A および B の普遍関数表示法にしたがって無次元化し、相対水深の関係として表わすと Fig. 3 のようになる。Fig. 3 a および Fig. 3 b の比較より明らかなように、ケース A の普遍関数表示はケース B のものより秀れていることがわかる。なお、Table 2 の A-2 に示された Euler 的平均スケールに関する普遍関数形の const. を実測値より推定すると約 0.15 となるが、この値については平均スケールの評価法の問題など検討の余地が多分にある。

5.3 エネルギー逸散率

エネルギー逸散率の評価法については、生成率による近似法、等方性近似による Taylor の逸散スケールによる方法、Kolmogoroff の局所的等方性の概念の適用による相似則による方法など各種の方法があるが、本研究においては、計測スケールの効果が除去される相似則による方法を採用し、慣性領域におけるスペク

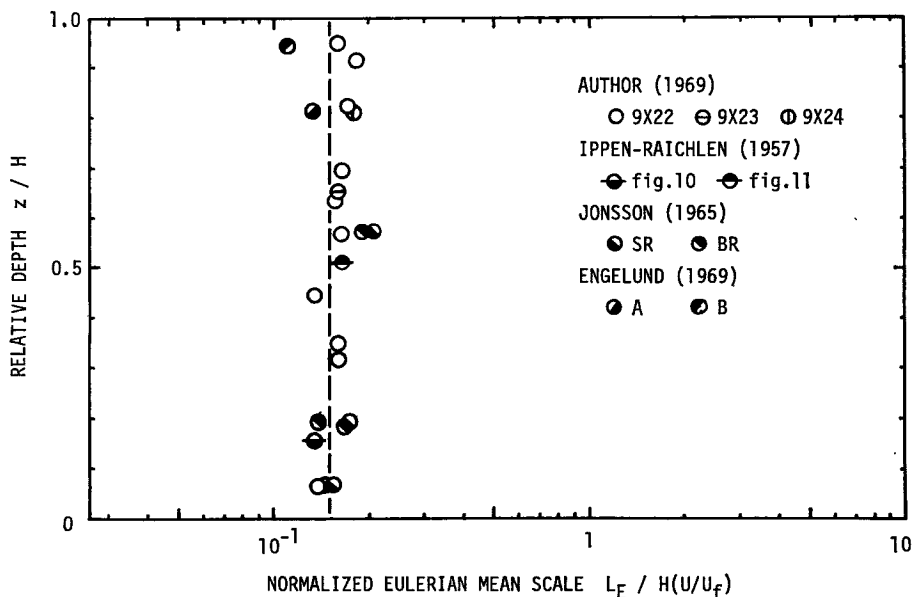


Fig. 3 a Eulerian mean scale in free surface shear flows in form of universal function in case A.

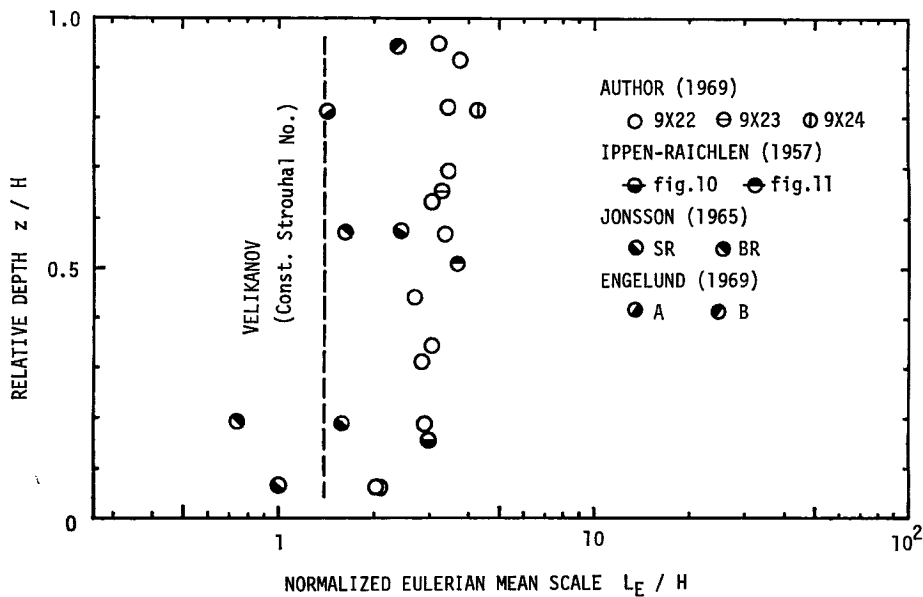


Fig. 3 b Eulerian mean scale in free surface shear flows in form of universal function in case B.

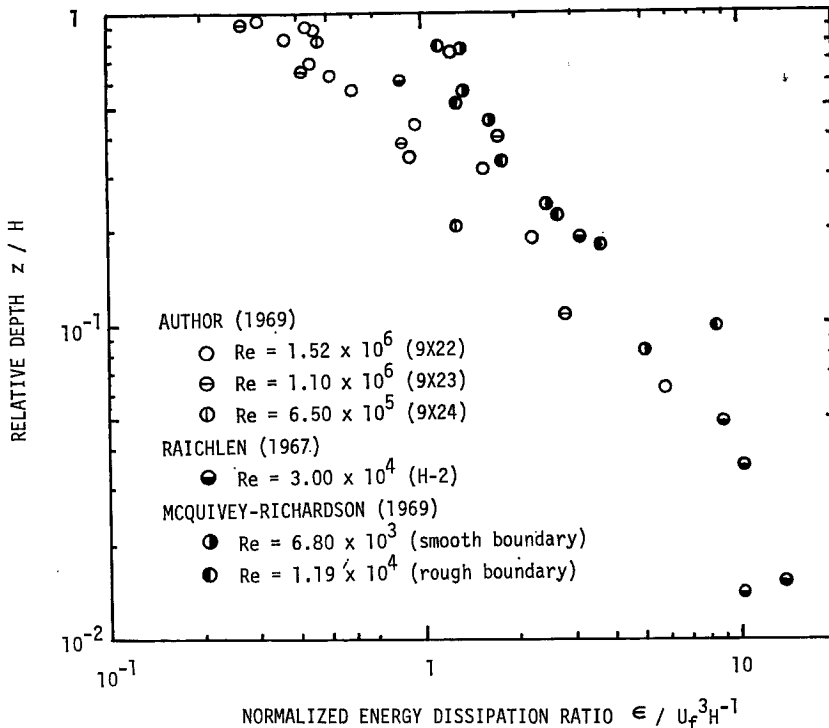


Fig. 4 Turbulence energy dissipation ratio in free surface shear flow.

トルの $-5/3$ 乗則の適用によりエネルギー逸散率を算定した。結果は Fig. 4 に示される通りである。なお、著者によるもの以外は、スペクトルより Dryden の方法によって得られる逸散スケールよりエネルギー逸散率を求めている。

Fig. 4 に見られるように、路床からかなり離れたところでのエネルギー逸散率については、著者によるものが他のものに比較して小さくなっているが、これはエネルギー逸散率の評価法の違い、すなわち、逸散スケールによる方法は計測スケールの効果を受けるということの他に、計測精度の問題などを考慮するとこの程度の差異は現在の時点においては止むを得ないものと考えられる。いずれにしても、自由表面近傍からかなり路床に近いところまで、エネルギー逸散率は路床からの高さに逆比例の関係にあると見なされ、Table 2 の A-2 に示される普遍関数形の妥当性が認められる。なお、路床にきわめて近い領域については若干異なった取り扱いが必要であるが、ここでは省略する。

6. 結 論

本研究は、定常等流状態の 2 次元開水路流れの乱れ特性量に関する普遍関数表示について、Reynolds 数相似則を適用することにより検討するとともに、乱れの強さ、Euler 的平均スケール、およびエネルギー逸散率に関する従来の実測値を用いて普遍関数表示の妥当性について考察したものである。

本研究の結果明らかとなった事項はつぎの通りである。

1. 乱れ特性量、すなわち、乱れの強さ、平均スケール、逸散スケール、エネルギー逸散率、および乱流拡散係数のうち、いずれか 2 量が与えられると他の量も決定される。
2. したがって、上記の乱れ特性量の任意の 2 量に対する普遍関数表示より他の量に対する普遍関数表示

も可能となる。

3. 従来より用いられている乱れの強さ, Euler 的平均スケール, およびエネルギー逸散率に対する普遍関数表示は, これらの乱れ特性量間の関係を規定する関係式を満足しない。
4. 上記の 3 種の乱れ特性量の 2 量に対する普遍関数表示より, 他量の普遍関数表示を行なうことにすると, 3 種の普遍関数表示システムが可能となる。
5. エネルギー逸散率に対する普遍関数表示を基礎として, 2 種の普遍関数システムについて従来の実験値を用いて検討した結果, 路床近傍を除いてつぎの普遍関数形が妥当であることが示された。すなわち,

$$\frac{u'}{U_f(U/U_f)^{1/3}} \sim \left(\frac{z}{H}\right)^{-1/3}, \quad \frac{L_E}{H(U/U_f)} \sim \text{const.}, \quad \frac{\epsilon}{U_f^3/H} \sim \left(\frac{z}{H}\right)^{-1}$$

開水路流れにおける乱れ特性については, 最近の計測技術の進展にとともに, 徐々に明らかにされつつあるが, 乱れ計測スケールの効果, 乱れ特性量の評価法など実験的研究を進めるうえで, 解決されねばならない問題が多く残されている。本研究においてはふれられなかったが, 宇治川水理実験所においては, 従来の超音波式流速計に加えて最新のホットフィルム流速計が完備されるようになり, 現在, 開水路流れにおける乱れの 3 次元の把握ならびに空間的構造の解明などが着々と進められており, 将来さらに詳細な検討が加えられる予定である。

参 考 文 献

- 1) Townsend, A.A.: The Structure of Turbulent Shear Flow, Cambridge at the University Press, 1956.
- 2) Goldstein, S.: Modern Development in Fluid Dynamics, Clarendon Press, Oxford, 1938.
- 3) Taylor, G.I.: Statistical Theory of Turbulence, Parts I-IV, Proc. Roy. Soc., A151, 1935, pp. 421-478.
- 4) Kolmogoroff, A.N.: Dissipation of Energy in the Locally Isotropic Turbulence, Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'U.R.S.S., 30, 1941, pp. 301-305.
- 5) Hay, J.S. and F. Pasquill: Diffusion from a Fixed Source at a Height of a Few Hundred Feet in the Atmosphere, Journal of Fluid Mechanics, 2, 1957.
- 6) Taylor, G.I.: The Spectrum of Turbulence, Proc. Roy. Soc., A164, 1938, pp. 476-490.
- 7) Monin, A.S. and A.M. Yaglom: Statistical Hydromechanics, Nauk Press, 1967.
- 8) Taylor, G.I.: Diffusion by Continuous Movements, Proc. Lond. Math. Soc., 2, 20, 1921, pp. 196-211.
- 9) Engelund, F.: Dispersion of Floating Particles in Uniform Channel Flow, Jour. Hydraulics Div., ASCE, 95, HY4, 1969, pp. 1149-1162.
- 10) Laufer, J.: Investigation of Turbulent Flow in a Two-Dimensional Channel, NACA Rep. 1053, 1950.
- 11) Von Kármán, T.: The Fundamentals of the Statistical Theory of Turbulence, Jour. Aero. Sci., 4, 1937.
- 12) 今本博健: 開水路流れにおける乱れの相似性について, 昭和 45 年度関西支部年次学術講演会講演概要, II-34, 土木学会関西支部, 昭 45.
- 13) 石原安雄・余越正一郎: 河川の乱流構造に関する一考察, 京都大学防災研究所年報, 第 13 号 B, 昭 45, pp. 323-332.
- 14) Hinle, J.O.: Turbulence, An Introduction to Its Mechanics and Theory, McGraw-Hill, New York, 1959.
- 15) Panofsky, H.A. and R.A. McCormick: The Spectrum of Vertical Velocity near the Surface, Quart. Jour. Roy. Meteorol. Soc., 86, 1960.

- 16) Jonsson, I.G.: On Turbulence in Open Channel Flow, ACTA Polytechnica Scandinavica, Ci 31, Copenhagen, 1965.
- 17) Reichardt, H.: Messungen Turbulenter Schwankungen, Naturwissenschaften, 26, 1938, pp. 404-408.
- 18) Laufer, J.: The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow, NACA Rep. 1174, 1955.
- 19) Klebanoff, P.S.: Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient, NACA Rep. 1247, 1958.
- 20) Velikanov, M.A.: Dinamika Ruslovykh Potokov, Moskva, 1954.
- 21) Rudiš, M. and R. Smutek: Relations between Turbulence Characteristics and the Hydraulic Parameters of the Shear Flow, ACTA Technica, 2, 1966, pp. 310-339.
- 22) Yokosi, S.: The Structure of River Turbulence, Bull. Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., Vol. 17, 1967, pp. 1-29.
- 23) Rajaratnam, N. and D. Muralidhar: Boundary Shear Stress Distribution in Rectangular Open Channels, La Houille Blanche, No. 6, 1969, pp. 603-609.
- 24) Iwasa, Y. and H. Imamoto: Dispersive Characteristics of Free Surface Flow in Terms of Lagrangian Descriptions, Proc. IAHR, Paris, 1971 (in Printing).
- 25) Ippen, A.T. and F. Raichlen: Turbulence in Civil Engineering, Measurements in Free Surface Streams, Proc. ASCE, 83, HY 5, 1957, pp. 1392-1-27.
- 26) Raichlen, F.: Some Turbulence Measurements in Water, Jour. Eng. Mech. Div., ASCE, 93, EM 2, 1967, pp. 73-79.
- 27) McQuivey, R.S. and E.V. Richardson: Some Turbulence Measurements in Open-Channel Flow, Jour. Hydr. Div., ASCE, 95, HY1, 1969, pp. 209-223.
- 28) 今本博健・上野鉄男：開水路流れにおける乱れの空間相関特性について，京都大学防災研究所年報，第13号B，昭45，pp. 333-345.