

dispersing billiard 系の周期軌道と半古典量子化

早大理工 原山卓久

京大基研 首藤 啓

古典力学系の chaos が量子力学系としての性質にどのように反映するかを知りたい。chaos の明確な定義はいつも時間が無限大でしか可能でないから、対応する量子力学系の定常状態を考えるのがよい。2つを結び付ける理論に Gutzwiller の半古典量子化があり、これは非可積分系にも適用できる。

$$\sum_n \delta(E - E_n) = \bar{d}(E) + \frac{1}{\pi\hbar} \text{Re} \sum_{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_{\gamma}}{\sqrt{|2 - \text{Tr} M_{\gamma}^k|}} \exp \left(ik \left(\frac{S_{\gamma}}{\hbar} - \frac{\nu_{\gamma}}{2} \pi \right) \right) \quad (1)$$

$\bar{d}(E)$: 平均状態密度 (Thomas-Fermi 近似 or Weyl formula)

$$\bar{d}(E) = \frac{Am}{2\pi\hbar^2} \quad (2)$$

$S_{\gamma} = \oint_{\gamma} p dq$: γ の action

$T_{\gamma} = \frac{\partial S_{\gamma}}{\partial E}$: γ の周期

ν : Maslov index

これにより量子化できれば 2 つの関係を明らかにできるかも知れない。しかし、非常に強い chaos 系でさえもこの方法で完全に量子化するのに成功していない。そこには大きな 2 つの困難がある。それは、特殊な系でない限り周期軌道について知られていることが少ないことと、周期軌道の数が増大により Gutzwiller formula が収束しないことである。数値的に周期軌道を求め、その性質を調べることでこれらの困難を乗り越えたい。

具体的には図 1 のような dispersing billiard 系を扱う。これは古典力学的に非常に強い chaos を示すことが厳密に証明されている系である。境界は 3 つの円弧から成っており各円弧に番号を付けると、軌道はこの番号の列で記述できる。そこで周期的な列に対応する周期軌道を求めるという方法を用いれば、取りこぼしなく周期軌道を得ることができる。このようにして求めた周期軌道の個数を表 1 に示す。

これらの周期軌道について数値的に調べるにより以下のことがわかった。

$$N(l) = \#\{\text{primitive periodic orbit } \gamma \text{ with length } l_\gamma \leq l\} \quad (3)$$

$$\sim \exp(\alpha l) \quad (4)$$

となる。length spectrum の $N(l)$ を用いて unfolding した最近接間隔分布は Poisson 分布し、spectral rigidity も Poisson に従う。衝突回数 n の素周期軌道の長さの分布は Gauss 分布

$$p_n(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma}} \exp\left(-\frac{(l - \bar{l}_n)^2}{2\sigma^2 n}\right) \quad (5)$$

であり、衝突回数 n の素周期軌道の安定性指数の分布も Gauss 分布

$$p'_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma'}} \exp\left(-\frac{(\lambda - \bar{\lambda}_n)^2}{2\sigma'^2 n}\right) \quad (6)$$

である。これらの結果からは周期軌道の分布は大変 デタラメであるように思われる。

ところで、これらの結果を Gutzwiller formula に入れてみると図 2 の実線のようになる。破線は (1) 式を境界要素法で解いたものである。両者がよく一致し Gutzwiller formula がよく work することが分かる。ここでは各周期軌道はそれぞれ重要な役割を担っておりデタラメであるとは考えられない。したがって、周期軌道の性質の捉え方として上のようなものは荒過ぎるようである。より細かい周期軌道間の相関を見つけることが今後の課題である

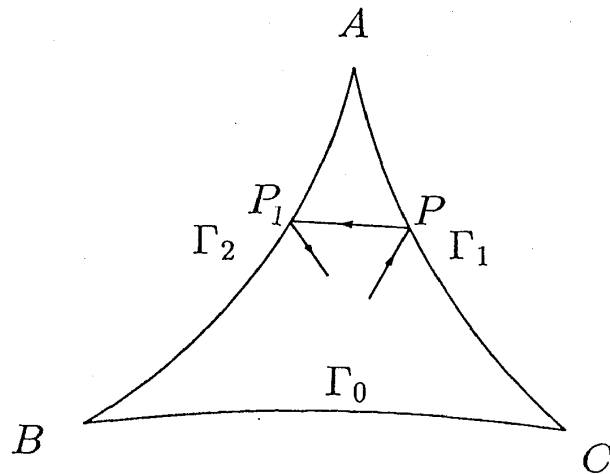


図 1

表 1

n	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7
3	2	2	2	2	2	2	2
4	3	3	3	3	3	3	3
5	6	6	6	6	6	6	6
6	1	4	5	7	8	8	8
7	6	10	10	10	14	16	16
8	11	13	17	17	18	20	22
9	20	22	26	36	36	38	38
10	25	36	46	60	61	62	68
11	50	66	82	92	100	110	122
12	82	102	135	151	167	192	205
13	136	188	248	280	318	350	378
14	228	311	406	492	569	613	676
15	368	528	706	862	1014	1118	1208
16	601	895	1223	1498	1780	1992	2186
17	1022	1568	2158	2698	3176	3606	3998
18	1710	2701	3751	4819	5685	6477	7236
19	2888	4638	6592	8598	10294	11782	13040
20	4850	7984	11605	15226	18525	21365	23683
	12009	19077	27021	34857	41776	47760	52895

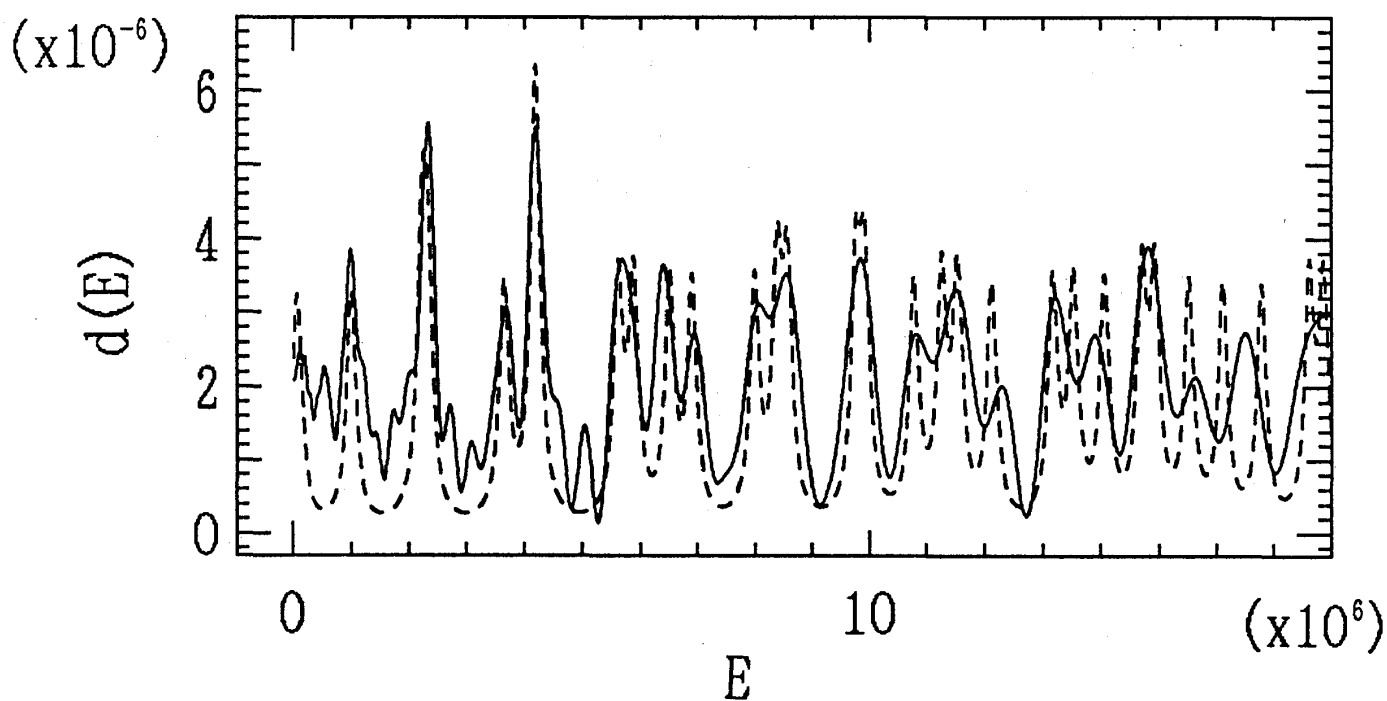


図 2