

数理解物理学における二、三の不等式

京大数理解 荒木 不洋 (Huzihiro ARAKI)

§1. 序

統計力学の熱力学的極限やエントロピーに関係して、いくつかの不等式が使われて来た。そのうち有名なものをまず列挙する。

Klein の不等式 トレース有限の正作用素 ρ, σ に対し

$$\mathrm{Tr}(\rho \log \rho - \rho \log \sigma - \rho + \sigma) \geq 0.$$

かなり古くから知られているようであるが、現在では相対エントロピーの正值性としてよく使用される。

Peierls - Bogoliubov の不等式 $A=A^*, B=B^*$ に対し

$$\mathrm{Tr} e^{A+B} / \mathrm{Tr} e^A \geq \exp(\mathrm{Tr}(e^A B) / \mathrm{Tr} e^A)$$

1936年の論文[1,2]にある不等式で、次の不等式と併せて、 $\mathrm{Tr} e^{A+B} / \mathrm{Tr} e^A$ を $\langle e^B \rangle_A$ および $\langle B \rangle_A$ により上下から評価するのに用いられる。ただし

$$\langle X \rangle_A = \mathrm{Tr}(e^A X) / \mathrm{Tr} e^A$$

は e^A を重みとする X の期待値である。($e^A / \mathrm{Tr} e^A$ を密度行列とする状態。)

Golden-Thompsonの不等式 $A=A^*, B=B^*$ に対して

$$\mathrm{Tr}(e^A e^B) \geq \mathrm{Tr} e^{A+B}$$

これは1965年の産([3], [4])である。これを導くために使われた不等式を一般化したものは次の不等式である。

Lieb-Thirringの不等式 $\rho > 0, \sigma > 0, m \geq 1$ に対し

$$\mathrm{Tr}[(\rho\sigma)^m] \leq \mathrm{Tr}(\rho^m \sigma^m)$$

Tr が有限であることを保証されている場合には

$$\mathrm{Tr}[(\rho^{1/2} \sigma \rho^{1/2})^m] \leq \mathrm{Tr}(\rho^{m/2} \sigma^m \rho^{m/2})$$

これは1976年の産([5])である。 $\rho = e^{A/m}, \sigma = e^{B/m}$

と置いて, Trotterの公式を使って $m \rightarrow \infty$ の極限を計算すると, Golden-Thompsonの不等式が得られる。

状態

$$\varphi(X) = \mathrm{Tr} \rho X, \quad \rho \geq 0, \quad \mathrm{Tr} \rho = 1$$

に対して, エントロピー $S(\varphi) = S(\rho)$ を

$$S(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho \log \rho)$$

により定義する。 $S(\rho) \geq 0$ であり, $\rho \rightarrow S(\rho)$ は凹である:

$$\begin{aligned} \lambda S(\rho_1) + (1-\lambda) S(\rho_2) &\leq S(\lambda \rho_1 + (1-\lambda) \rho_2) \\ &\leq \lambda S(\rho_1) + (1-\lambda) S(\rho_2) - \lambda \log \lambda - (1-\lambda) \log(1-\lambda) \end{aligned}$$

ただし $0 \leq \lambda \leq 1$.

ヒルベルト空間のテンソル積 $H_{12} = H_1 \otimes H_2$ で記述される合成系については, H_{12} 上の作用素 ρ_{12} から H_1 あるいは H_2 の

トレースをとることにより、 H_2 あるいは H_1 上の作用素

$$\rho_2 = \text{Tr}_{H_1} \rho_{12}, \quad \rho_1 = \text{Tr}_{H_2} \rho_{12}$$

が得られる。(H_2 上の任意の作用素 x に対し

$$\text{Tr}_{H_{12}} [\rho_{12} (1 \otimes x)] = \text{Tr}_{H_2} (\rho_2 x)$$

をみると ρ_2 が一意に定まる。 ρ_1 についても同様。)

$$\text{エントロピーの劣加法性} \quad S(\rho_{12}) \geq S(\rho_1) + S(\rho_2)$$

可換系(確率測度)については、さらに強い形の強劣加法性が成立するので、非可換系でも成立するのではないかという予想が1967年に出され、1973年に証明された。[6]

$$\text{エントロピーの強劣加法性} \quad H_{123} = H_1 \otimes H_2 \otimes H_3 \text{ について}$$

$$S(\rho_{123}) - S(\rho_{12}) - S(\rho_{13}) + S(\rho_1) \geq 0$$

この証明の基礎となったのは[7]

$$\text{Liebの凹性} \quad \rho \rightarrow \text{Tr} \exp(A + \log \rho) \text{ は凹。} (A=A^* \text{ は任意})$$

これと似た形式が証明が簡単な形の凸性は古くから知られていた： $A \rightarrow \log \text{Tr} e^A$ は凸。

エントロピーの強劣加法性は、相対エントロピーの単調性から導くこともできる。

また以上の不等式の大部分は、富田・竹崎理論を使って一般の von Neumann環の状態へ一般化ができる。

ここでは Peierls-Bogoliubov および Golden-Thompson の不等式に話を限定する。

§2 Peierls-Bogoliubov の不等式の証明

ふたつの証明法を紹介する。ひとつは

Klein の不等式の証明 から始める。この不等式の古くから知られている初等的証明法は、次のようである。

ρ の固有値と固有ベクトルを ρ_i, ξ_i とし、 σ のそれらを σ_j, η_j とする。 $(\xi_i, \eta_j) = u_{ij}$ とおく。

$$\begin{aligned} ((\rho \log \rho - \rho \log \sigma) \xi_i, \xi_i) &= \rho_i \log \rho_i - \rho_i \sum_j |u_{ij}|^2 \log \sigma_j \\ &\geq \rho_i \log \rho_i - \rho_i \log \sum_j |u_{ij}|^2 \sigma_j = -\rho_i \log \left[\sum_j |u_{ij}|^2 \sigma_j / \rho_i \right] \\ &\geq -\rho_i \left(\left[\sum_j |u_{ij}|^2 \sigma_j / \rho_i \right] - 1 \right) = \rho_i - \sum_j |u_{ij}|^2 \sigma_j \\ &= (\xi_i, (\rho - \sigma) \xi_i) \end{aligned}$$

により証明される。ここで最初の不等式は $\sum |u_{ij}|^2 = 1$ なので $x \mapsto -\log x$ が凸関数であることを使ったもので、第2の不等式は $\log(1+y) \leq y$ が $y \geq 0$ で成立することを使った。 $\rho_i \neq 0$ の i を考えれば十分であり、 $\rho_i \neq 0, u_{ij} \neq 0, \sigma_j = 0$ のような j があれば、左辺が $+\infty$ になって不等式は成立する。従って $\log \rho_i \neq -\infty, \log \sigma_j \neq -\infty$ の場合の上記証明で OK である。以上により、トレース類に属する正值作用素 ρ, σ について、Klein の不等式が証明されたことになる。

注意 $\text{Tr } \rho = \text{Tr } \sigma = 1$ の場合、Klein の不等式は

$$S(\sigma, \rho) \equiv \text{Tr}(\rho \log \rho - \rho \log \sigma) \geq 0$$

となる。これは相対エントロピーの正值性として知られてい

る。逆にこの正値性がわかると、一般の ρ, σ に対しては

$$\rho' = \rho / \text{Tr } \rho, \quad \sigma' = \sigma / \text{Tr } \sigma$$

に正値性を適用することにより

$$0 \leq (\text{Tr } \rho) S(\sigma', \rho') = \text{Tr}(\rho \log \rho - \rho \log \sigma) + (\text{Tr } \rho) \log \frac{\text{Tr } \sigma}{\text{Tr } \rho}$$

を得る。第2項に $\log(1+y) \leq y$ ($y \geq 0$) を適用すると Klein の不等式が得られる。

Peierls-Bogoliubov の不等式の証明 — 第1法

Klein の不等式において

$$\rho = e^A / \text{Tr } e^A, \quad \sigma = e^{A+B} / \text{Tr } e^{A+B}$$

とかくと、 $\text{Tr } \rho = \text{Tr } \sigma = 1$ なので

$$\text{Tr } \rho (\log [\text{Tr } e^{A+B} / \text{Tr } e^A] - B) \geq 0$$

を得る。これを書きなおすと、求める不等式になる。

注意 Peierls-Bogoliubov の不等式から逆に Klein の不等式を次のように導くことができる。

$$A = \log \rho, \quad B = \log \sigma - \log \rho$$

とかくと、Peierls-Bogoliubov の不等式により

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho \log \rho - \rho \log \sigma) &= -\text{Tr } e^A B \\ &\geq -(\text{Tr } e^A) \log(\text{Tr } e^{A+B} / \text{Tr } e^A) = -\text{tr } \rho \log(\text{Tr } \sigma / \text{Tr } \rho) \\ &\geq -(\text{Tr } \rho) ([\text{Tr } \sigma / \text{Tr } \rho] - 1) = \text{Tr } \rho - \text{Tr } \sigma \end{aligned}$$

ここで第2の不等式は $\log(1+y) \leq y$ ($y \geq 0$) による。

第2の証明法は

$A \rightarrow \log \text{Tr } e^A$ の凸性の証明 から始める。

いま $H = A - B$ とおき,

$$f(\lambda) \equiv \log \text{Tr } e^{(1-\lambda)A + \lambda B} = \log \text{Tr } e^{A + \lambda H}$$

が $f''(\lambda) \geq 0$ をみたら ことを示せば, $f(\lambda)$ は凸関数で

$$f(\lambda) \leq \lambda f(0) + (1-\lambda)f(1)$$

が成立し, 求める凸性が得られる。 $\underline{f}(\mu) = f(\lambda + \mu)$ とおくと, $\underline{f}''(0) \geq 0$ を示せばよいが, $A + \lambda H$ を A とみなせば, $f''(0) \geq 0$

を示せばよいことになる。 f の微分を計算するため

$$F(s) = e^{s(X+Y)} e^{-sY}$$

とおくと,

$$F'(s) = F(s)Y(s), \quad Y(s) \equiv e^{sX} Y e^{-sX}$$

を得るので

$$F(t) = F(0) + \int_0^t F(s)Y(s)ds = 1 + \int_0^t e^{s(X+Y)} Y e^{-sX} ds$$

となる。 $t=1$ とおいて, Y に μY を代入すると

$$e^{X+\mu Y} = 1 + \mu \int_0^1 e^{s(X+\mu Y)} Y e^{(1-s)X} ds.$$

この公式を用いて $\mu=0$ における微分を求めると

$$(d/d\mu) e^{X+\mu Y} \Big|_{\mu=0} = \int_0^1 e^{sX} Y e^{(1-s)X} ds.$$

$X = A + \lambda H$, $Y = H$ とおくことにより

$$(d/d\lambda) e^{X+\lambda H} = \int_0^1 e^{s(A+\lambda H)} H e^{(1-s)(A+\lambda H)} ds.$$

よって f の微分が次のように求まる。

$$f'(\lambda) = \text{Tr } (d/d\lambda) e^{A+\lambda H} / \text{Tr } e^{A+\lambda H}$$

$$= \int_0^1 \text{Tr} e^{s(A+\lambda H)} H e^{(1-s)(A+\lambda H)} ds / \text{Tr} e^{A+\lambda H}$$

$$= \text{Tr} e^{A+\lambda H} H / \text{Tr} e^{A+\lambda H} \equiv \langle H \rangle_\lambda.$$

$$f''(\lambda) = \text{Tr} (d/d\lambda) e^{A+\lambda H} H / \text{Tr} e^{A+\lambda H} - (\langle H \rangle_\lambda)^2.$$

$$f''(0) = \int_0^1 \text{Tr} (e^{sA} H e^{(1-s)A} H) ds / \text{Tr} e^A - (\langle H \rangle_0)^2$$

$$= \int_0^1 \text{Tr} (e^{sA} (H - \langle H \rangle_0) e^{(1-s)A} (H - \langle H \rangle_0) ds / \text{Tr} e^A$$

$$= \int_0^1 \text{Tr} (e^{sA/2} (H - \langle H \rangle_0) e^{(1-s)A} (H - \langle H \rangle_0) e^{sA/2}) ds / \text{Tr} e^A$$

$$\geq 0$$

以上の計算によりホールの凸性が得られた。

Peierls-Bogoliubov の不等式の証明 — 第2法

$f(\lambda)$ の凸性から

$$f(1) \geq f(0) + f'(0)$$

が得られる。ここで

$$f'(0) = \text{Tr} e^A H / \text{Tr} e^A$$

などを代入すると

$$\text{Tr} e^A H / \text{Tr} e^A \leq \log [\text{Tr} e^{A+H} / \text{Tr} e^A]$$

が得られる。H を B と書き換え、両辺の指数をとるとする不等式になる。

§3 Golden-Thompson の不等式の証明

有限次行列 a, b に対する Golden の証明は次のとおりである。

補助定理 $a \geq 0, b \geq 0$ のとき, 任意の自然数 p に対し

$$\text{Tr}[(ab)^{2^p}] \leq \text{Tr}[(a^2 b^2)^{2^{p-1}}]$$

証明 は帰納法による。行列 A, B に対し内積を

$$\langle A, B \rangle \equiv \text{Tr}(AB^*)$$

により定義すると, Cauchy-Schwartz の不等式

$$|\langle A, B \rangle|^2 \leq \langle A, A \rangle \langle B, B \rangle$$

が成立する。これを用いると, $p=1$ について

$$\text{Tr}(ab)^2 = \langle ab, ba \rangle \leq (\langle ab, ab \rangle \langle ba, ba \rangle)^{1/2} = \text{Tr}(a^2 b^2)。$$

次に $m \geq 2, 1 \leq p \leq m-1$ について不等式が成立したと仮定して

$p=m$ の場合を示す。 $m \geq n \geq 0$ を与えた整数 n に対し

$$\begin{aligned} \alpha_n &\equiv (ab)^{2^{m-n}} (ba)^{2^{m-n}} (= \alpha_n^* \geq 0) \\ \beta_n &\equiv (ba)^{2^{m-n}} (ab)^{2^{m-n}} (= \beta_n^* \geq 0) \end{aligned}$$

とおくと,

$$\text{Tr} \alpha_n^N = \text{Tr} \beta_n^N \quad (n \text{ 任意}), \quad \text{Tr}(\alpha_{n+1} \beta_{n+1})^N = \text{Tr} \alpha_n^N \quad (m > n)$$

が $N=0, 1, 2, \dots$ について成立する。 $m \geq n$ として

$$\begin{aligned} \text{Tr} \alpha_n^{2^{n-1}} &= \text{Tr}(\alpha_{n+1} \beta_{n+1})^{2^{n-1}} \leq \text{Tr}(\alpha_{n+1}^2 \beta_{n+1}^2)^{2^{n-2}} \\ &\leq \text{Tr}(\alpha_{n+1}^{2^2} \beta_{n+1}^{2^2})^{2^{n-3}} \leq \dots \leq \text{Tr}(\alpha_{n+1}^{2^{n-1}} \beta_{n+1}^{2^{n-1}}) \\ &\leq (\text{Tr} \alpha_{n+1}^{2^n} \text{Tr} \beta_{n+1}^{2^n})^{1/2} = \text{Tr}(\alpha_{n+1})^{2^n}。 \end{aligned}$$

ここで, 不等式は順に $p=n-1, n-2, \dots, 1$ の帰納仮定を使った

もので, 最後の不等式は Cauchy-Schwartz の不等式による。

この不等式を逐次使用することにより

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(ab)^{2^m} &= \langle (ab)^{2^{m-1}}, (ba)^{2^{m-1}} \rangle \\
&\leq \left(\langle (ab)^{2^{m-1}}, (ab)^{2^{m-1}} \rangle \langle (ba)^{2^{m-1}}, (ba)^{2^{m-1}} \rangle \right)^{1/2} \\
&= \text{Tr} \alpha_1 = \text{Tr} \alpha_1^{2^0} \leq \text{Tr} \alpha_2^{2^1} \leq \text{Tr} \alpha_3^{2^2} \leq \cdots \leq \text{Tr} \alpha_m^{2^{m-1}} \\
&= \text{Tr} (ab^2 a)^{2^{m-1}} = \text{Tr} (a^2 b^2)^{2^{m-1}}
\end{aligned}$$

ただし、最初の不等式は Cauchy-Schwartz の不等式である。

かくして $p=m$ の場合が示せたので、証明が完了した。

Golden-Thompson の不等式の証明 — Golden の方法

補助定理をくり返し使うと

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(ab)^{2^p} &\leq \text{Tr}(a^2 b^2)^{2^{p-1}} \leq \text{Tr}(a^{2^2} b^{2^2})^{2^{p-2}} \leq \cdots \\
&\leq \text{Tr}(a^{2^p} b^{2^p})
\end{aligned}$$

を得る。(これは Lieb-Thirring の不等式の $m=2^p$ の場合。)

$$a = \exp(2^{-p} A), \quad b = \exp(2^{-p} B)$$

とおくと

$$\text{Tr}(e^{2^{-p} A} e^{2^{-p} B})^{2^p} \leq \text{Tr}(e^A e^B)$$

となる。ここで $p \rightarrow \infty$ の極限をとり、Trotter の公式を使うと

Golden-Thompson の不等式を得る。

次に Thompson の証明法を説明する。

Polya の不等式 a_i, b_i ($i=1, \dots, m$) は実数で

$$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_m, \quad b_1 + \cdots + b_g \leq a_1 + \cdots + a_g \quad (1 \leq g \leq m)$$

をみたすものとする。このとき単調増大凸関数 ω に対し

$$\omega(b_1) + \cdots + \omega(b_m) \leq \omega(a_1) + \cdots + \omega(a_m)$$

証明は [8] を参照。

Weyl の不等式 n 行 n 列の行列 A について,

$$\det(zE - A) = 0$$

の根を絶対値の大きい方から並べたものを $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とする。

$\lambda_i = |\alpha_i|^2$ とおくと, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ である。また

$$\det(zE - A^*A) = 0$$

の根を大きい方から並べたものを $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_n$ とする。

$[0, \infty)$ で定義された単調増大関数 φ で, $\xi \rightarrow \varphi(e^\xi)$ が凸関数であるものに対して,

$$\varphi(\lambda_1) + \dots + \varphi(\lambda_m) \leq \varphi(\kappa_1) + \dots + \varphi(\kappa_m) \quad (1 \leq m \leq n)$$

証明 $A\xi = \alpha_1\xi$, $\xi \neq 0$ とすれば,

$$|\alpha_1|^2 \|\xi\|^2 = \|A\xi\|^2 \leq \|A^*A\| \|\xi\|^2 = \kappa_1 \|\xi\|^2$$

より $\lambda_1 \leq \kappa_1$ を得る。同じことを完全反対称な重テレンソル積の空間で $A^{\otimes k}$ を考えると,

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m \leq \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_m$$

が得られる。Polya の不等式で $b_i = \log \lambda_i$, $a_i = \log \kappa_i$, $\omega(b) = \varphi(e^b)$ とおけば Weyl の不等式を得る。 $\kappa_j = 0$ ($j \geq l$) となれば上の不等式から $\lambda_j = 0$ ($j \geq l$) となり, $\lambda_j = 0$ ならば κ の如何によらず $\varphi(\lambda_l) = \varphi(0) \leq \varphi(\kappa_l)$ ($l \geq j$) となるので, $\lambda_m \neq 0$, $\kappa_m \neq 0$ の m について Polya の不等式を使えば十分である。

Weyl の証明 [9] も参照。

系 $|\operatorname{Tr}(A^{2m})| \leq \operatorname{Tr}[(A^*A)^m] = \operatorname{Tr}[(AA^*)^m]$

証明 $|\operatorname{Tr}(A^{2m})| = |\sum \alpha_i^{2m}| \leq \sum \lambda_i^m \leq \sum \kappa_i^m = \operatorname{Tr}(A^*A)^m$

ここで2番目の不等式はWeylの不等式で $\varphi(x) = x^m$ としたものである。

Golden-Thompson の不等式の証明 — Thompsonの方法

上記系で $A = ab$ とおくと $X^*X = ba^2b$ なので

$$\operatorname{Tr}(ab)^{2m} \leq \operatorname{Tr}(ba^2b)^{2m-1} = \operatorname{Tr}(a^2b^2)^{2m-1}$$

を得る。このあとGoldenの証明と同じである。

Liebの凹性を使うと第3の証明法ができる。[10]

Golden-Thompson の不等式の証明 — Lieb凹性の応用

正線形汎関数

$$\psi(X) = \operatorname{Tr}(e^AX)$$

について、摂動を受けた汎関数 ψ^B を

$$\psi^B(X) = \operatorname{Tr}(e^{A+B}X)$$

で定義する。Liebの凹性は $\rho = e^B (>0)$ について、

$$\rho \rightarrow \psi^B(1) \equiv f(\rho)$$

が凹であることを云う。そこで

$$g(\lambda) = f((1-\lambda) + \lambda\rho)$$

は λ の凹関数である。ここで

$$g(0) = \psi(1), \quad g(1) = \psi^B(1) = \operatorname{Tr} e^{A+B},$$

また

$$B = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{p+t} \right) dt$$

により, $p(\lambda) = \lambda(p-1)$ に對し

$$\begin{aligned} (d/d\lambda) \log(1+p(\lambda)) &= \int_0^\infty (1+p(\lambda)+t)^{-2} p'(\lambda) dt \\ &= (1+p(\lambda))^{-1} (p-1). \end{aligned}$$

したがって

$$g'(0) = \text{Tr } e^A (p-1) = \psi(p-1).$$

g が凹関数なので

$$\text{Tr } e^{A+B} = g(1) \leq g(0) + g'(0) = \psi(p) = \text{Tr } e^A e^B$$

ゆゑに Golden-Thompson の不等式を得る。

Lieb の凹性の証明は [17] 参照。この結果 [11] による別証もある。

Epstein の凹性 単位元 1 をもつ C^* 環 $\mathcal{A}$ において, 領域

$$D \equiv \bigcup_{\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \bigcup_{0 < \varepsilon \in \mathbb{R}} \{A \in \mathcal{A}; \text{Re } e^{-i\theta} A \geq \varepsilon\}$$

で定義された複素数値関数 f が

(i) D 上正則: $\text{Sp } A$ のまわりの正方向のループ γ に対し

$$f(A) = (2\pi i) \int_\gamma f(z) (z-A)^{-1} dz,$$

(ii) $\text{Im } A > 0$ ならば $\text{Im } f(A) \geq 0$,

$\text{Im } A < 0$ ならば $\text{Im } f(A) \leq 0$.

(iii) 任意の $p > 0$, $A \in D$ に対し $f(pA) = p^s f(A)$ となる p ,

A による $0 < s \leq 1$ となる s がある。

の3条件をみたすとき, f は $\{A \in \mathcal{O}_L : A = A^* > 0\}$ で凹であり, 任意の $A_1 = A_1^*, A_2 = A_2^* > 0$ に対し, 十分小さな実数 t で

$$(d^{2n}/dt^{2n}) f(A_2 + tA_1) \leq 0$$

である。

ここで $A > 0$ はある $\varepsilon > 0$ に対し $A > \varepsilon 1$ を意味し,

$$\operatorname{Re} C = (C + C^*)/2, \quad \operatorname{Im} C = (C - C^*)/(2i)$$

である。

§4 関連する話題

Epstein の凹性の応用として

$$C \geq 0 \rightarrow g(C) \equiv \operatorname{Tr}(B C^{1/m} B)^m \quad (B = B^*)$$

の凹性がでる。これを使うと Lieb-Thirring の不等式が証明できる。[5]

Lieb-Thirring の不等式は次のように一般化できる。[12]

Lieb-Thirring の不等式の一般化 $a \geq 0, b \geq 0, p \geq q \geq 1$

$$\operatorname{Tr}(b^{1/2} a b^{1/2})^p \leq \operatorname{Tr}(b^{q/2} a^q b^{q/2})^{p/q}$$

この不等式で p を自然数とし, $q=2$ とおくと Thompson の証明に出てくる不等式 (系) になる。また同じく $q=p$ とおくと Lieb-Thirring の不等式になる。

この不等式は Weyl の不等式の証明の技法を使うと次の不等式から導くことができる。

Heinz の不等式 $a \geq 0, b \geq 0, q \geq 1$ のとき

$$\|ab\|^q \leq \|a^q b^q\|$$

上記の Lieb-Thirring の不等式の一般化は、研究会の段階ではこの Heinz の不等式と同等なことがわかったので予想として述べたが、古田氏に Heinz の不等式の文献を教えて頂いたものである。(Heinz の不等式 [13] については [14], その中の文献, なり古田の論文 [15] 等を参照)。

先に述べた $\log \operatorname{Tr} e^A$ の凸性は, Federbush 等による次の結果からも導かれた。[16]

FTY 凸性 行列 $A=A^*$ の固有値を $\lambda_i, i=1, \dots, n$ とし, f は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への対称関数とする。 f に対応する A の関数 F を

$$F(A) = f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

と定義すれば, $F(A)$ の凸性と f の凸性は同値である。

この結果の応用として次の関数の凸性あるいは凹性ができる。

g が凸のとき, $A \rightarrow \operatorname{Tr}(g(A))$ の凸性

$A \rightarrow \log \operatorname{Tr} e^A$ の凸性

$A \rightarrow (\operatorname{Det} A)^{1/n}$ の凹性. (A は n 行 n 列の行列)

§5 一般の von Neumann 環の枠組への書き換え.

M が I 型因子の場合, M の正規正線形汎関数 φ に対し, 次式をみたす M の正元 P が一意に対応する。

$$\varphi(A) = \text{tr}_M(\rho A) \quad (A \in M)$$

ただし, tr_M は M 上の半有限正規トレースである。 ρ は φ の密度行列とよばれる。 逆に M の正元 ρ で $\text{tr}_M \rho < \infty$ とするものは, 上式により M の正規正線形汎関数 φ を与える。 そこで ρ に対する不等式を φ に対する不等式と解釈して, 一般の von Neumann 環に拡張する。 簡単のため, ρ が固有値 0 を持たない場合, あるいは φ が忠実な場合に限定して話を進めるが, φ が忠実でない場合も適当な修正をして話を進めることができる。

忠実な φ から GNS 構成法により M の表現 π_φ と, φ の表現ベクトル ξ_φ を構成し, そのモジュラー作用素を Δ とする。 M の任意のエルミート元 $h = h^*$ に対し,

$$\xi_\varphi^h \equiv e^{(h + \log \Delta)/2} \xi_\varphi$$

が存在し (すなわち ξ_φ がその前の作用素の定義域に入り),

$$\varphi^h(A) = (\pi_\varphi(A) \xi_\varphi^h, \xi_\varphi^h) \quad A \in M$$

により定義される M の正規正線形汎関数 φ^h を, h による擾動状態とよぶ。 M が I 型因子で φ の密度行列が

$$\rho = e^A$$

のとき, φ^h の密度行列は

$$\rho^h = e^{A+h}$$

である。 量子統計力学では, ハミルトニアン H の系の平衡状態

態は $\rho = e^{-\beta H}$ が密度行列に比例する。富田竹崎理論では、逆温度を表わす実数は $\beta = -1$ にあくので、 $\rho = e^A$ の A がハミルトニアンの意味をもつ。ハミルトニアンを A から $A+h$ に変更することを通常摂動と呼ぶので、上記の用語を使う。

このような記法を使うと、

$$\varphi(e^h) \geq \varphi^h(1) \geq \varphi(1) e^{\varphi^h(1)/\varphi(1)}$$

が Golden-Thompson の不等式 (前の不等式) と Golden-Thompson の不等式 (後の不等式) を表わす。実際、一般の M で証明されている。[15]

凸性についても

$$h \rightarrow \log \varphi^h(1) \quad \text{が} \quad \square$$

$$\rho \rightarrow \varphi^{\log \rho} \quad \text{が} \quad \square$$

が証明できる。後者は Lieb の不等式の一般化である。

同様にして、相対モジュラー作用量を使って相対エントロピーを定義し、その性質を一般の M で証明することができる。

前節で述べた Lieb-Thirring の不等式の一般化についても、Fack は Weyl の方法を一般化するため特値値の概念を導入して $q=2^k$ の場合を一般の von Neumann 環上のトレースについて証明している。[18] Fack の特値値の理論は、一般化された s -数の理論として Fack-草崎により整備され ([19])、Lieb-Thompson の不等式の一般化も任意の q ($p \geq q \geq 1$) で証明され

ている。[幸崎からの私信]

文 献

- [1] R. Peierls, Proc. Camb. Phil. Soc. 32 (1936), 477-481.
- [2] N.N. Bogoliubov, Phys. Abh. SU. 1 (1962), 1- ; 113- ; 229- .
- [3] S. Golden, Phys. Rev. 137 (1965), B1127-B1128.
- [4] C. J. Thompson, J. Math. Phys. 6 (1965), 1812-1813.
- [5] E. Lieb, W. Thirring, Studies in Mathematical Physics (Lieb, Simon, Wightman 共編, Princeton Press, 1976年), 301-302.
- [6] E. H. Lieb & M. B. Ruskai, J. Math. Phys. 14 (1973), 1938-1941.
- [7] E. Lieb, Adv. Math. 11 (1973), 267-288.
- [8] G. Polya, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. 36 (1950), 49- .
- [9] H. Weyl, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. 35 (1949), 408-411.
- [10] H. Araki, Introduction to Relative Hamiltonian and Relative Entropy, Lecture Notes in Marseille 1975, preprint 75/P. 782. (Proof of Theorem 6.3).
- [11] H. Epstein, Commun. Math. Phys. 31 (1973), 317-325.

- [12] H. Araki, On an inequality of Lieb and Thirring,
Lett. Math. Phys. in press.
- [13] E. Heinz, Math. Ann. 123 (1951), 415-438.
- [14] H. O. Cordes, Spectral Theory of Linear Differential Operators and Comparison Algebras, London Math. Soc. Lecture Notes Series 76, Cambridge Press, 1987. p. 24.
- [15] T. Furuta, Norm inequalities equivalent to Löwner-Heinz theorem, Rev. Math. Phys. in press.
- [16] P. Federbush, B. A. Taylor & W. H. Yang, A convexity theorem for hermitian matrices.
- [17] H. Araki, Comm. Math. Phys. 34 (1973), 167-178.
- [18] T. Fack, J. Operator Theory 7 (1982), 307-333.
- [19] T. Fack and H. Kosaki, Pacific J. Math. 123 (1986), 269-300.