

Very Ample Vector Bundles

京大 理数 隅広香康

§ 1. 序

R. Hartshorne [10] による, $\mathbb{P}^n$ の line bundles の ampleness の定義及び性質は, 一般の vector bundles に拡張された。その後, 多くの人々による (例として, Hartshorne [11], Kleiman [8], Hironaka-Matsumura [12], Gieseker [5]) ampleness の幾何学的意味付けが, $\mathbb{P}^n$ の角度から行われ, 1971 年 [12],

- (1) ample vector bundles の Chern classes の numerical positivity.
- (2) normal vector bundles が ample であるとき, closed subscheme の λ の方

によって, 幾何学的意味付けとされている。

- (3) Grassmann variety $\wedge^r \mathbb{P}^n$ の埋め込み

という観点から ample vector bundles を研究することがある。そこで, この観点から Hartshorne の問題を序として取り上げ

とある。

Hartshorne の問題: E は non-singular projective algebraic variety X 上の ample vector bundles とする。各 i は Chern class $c_i(E)$ ($1 \leq i \leq \min(\dim X, \text{rank } E)$) は numerically positive か?

以後、 S schemes は k 上の代数的閉体 k 上の algebraic schemes とし、vector bundles は constant rank の locally free sheaves を意味する。

§ 2 Very ample vector bundles.

X は k -algebraic scheme. E は X 上の global sections が存在する $\text{rank } E = r$, $\dim H^0(E) = t$ の vector bundles とする。次の exact sequence: $0 \rightarrow \text{Ker } \varphi \rightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus t} \xrightarrow{\varphi} E \rightarrow 0$ とする。この morphism $\varphi: X \rightarrow G_{t,r}$ が得られる。

$$\varphi: X \rightarrow X \mapsto \varphi(X) = \text{Ker } \varphi(X) \in G_{t,r}$$

$$G_{t,r} = \{ t\text{-次元 vector space の codim} = r \text{ の subspaces} \}$$

定義 2.1 上の条件の下に、 φ が immersion ならば、 E は very G -ample といい、一般に vector bundle E に対して、適当な正整数 N が存在して、 $\forall n \geq N$ に対して、 $S^n(E)$ が very G -ample ならば、 E は G -ample とする。但し $S^n(E)$ は E の n 次 symmetric

tensor product.

例4. 次の例は very G -ample vector bundles の例.

(1) $X = G/r$, $E = E/r$: classifying vector bundles.

(2) $X = \mathbb{P}^1$, $E = \mathcal{O}_X(m) \oplus \mathcal{O}_X(n)$ m, n は共に正の整数
 同様に $\mathbb{P}^1$ の整数.

定義 2.2 (Grothendieck [5]) $E \in X$ 上の vector bundle. X が $\mathbb{A}^1$ -local closed point x に対して, $\mathcal{M}_{x,x}$ は x の defining ideal とする.
 任意の closed point x に対して, $E \otimes \mathcal{M}_{x,x}$ の global sections が生成するならば, E は strongly ample とする.

注意 (1) X が complete variety ならば, strongly ample vector bundle は ample vector bundle である. (2) strongly ample vector bundles の Chern classes は非常に良い性質を持つ.

定義 2.3 $E \in X$ 上の vector bundle とし, $L_E \in E$ の tautological line bundle とする. ($f: p(E) \rightarrow X$ (E は $p(E)$ 上の line bundle.)) L_E が very ample line bundle ならば, E は very ample vector bundle とする.

2.9 §2 では, 次の 3) の定理を, very ample vector bundle の性質を示す.

定理 2.1 Very ample vector bundle は very G -ample vector bundle である.

定理 2.2 E is ample vector bundle とす。適当な正整数 N が存在し、 $\forall n \geq N$ に對し、 $S^n(E)$ は very ample vector bundle となる。

定理 2.3 Very ample vector bundle は strongly ample vector bundle である。

順を返して証明しよう。

補題 2.1 E は X 上の vector bundle。次の条件は同値である。

(1) E が global sections が生成する。

(2) L_E が global sections が生成する。

(証明) 明らか。

定理 2.1 の証明: E は X 上の rank $r = r$, $\dim H^0(E) = t$, very ample vector bundle とす。 $\{s_1, \dots, s_t\} \in H^0(E)$ が basis とし、 $\{s'_1, \dots, s'_t\} \in H^0(L_E)$ が basis とす。(cf. $\forall n \geq 0$ に對し、 $R^i f_* (f^*(F) \otimes L_E^n)$

$$= \begin{cases} 0 & i > 0 \\ F \otimes S^n(E) & i = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{但し、 } F \text{ は } X \text{ 上の coherent} \\ \text{sheaf.} \end{array} \right\}$$

補題 2.1 より、 $\{s_i\}$ (又、 $\{s'_i\}$) は E (又、 L_E) を生成する。

$\mathcal{U} = (\pi_\alpha) \in X$ の open covering s.t. $E|_{\pi_\alpha} \simeq \mathcal{O}_{\pi_\alpha}^{\oplus r}$ とす。

$s_i|_{\pi_\alpha} = (s'_i, \dots, s'_i) \quad (s'_j \in \Gamma(\pi_\alpha, \mathcal{O}_{\pi_\alpha}))$ 。 π_α 上

closed point x に対して, r 個の vector: $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{A}^r$ のように
 定義する. $v_1 = \sum_{i=1}^r \alpha_i^1(x) e_i, \dots, v_r = \sum_{i=1}^r \alpha_i^r(x) e_i$
 $\{v_1, \dots, v_r\}$ は r 個の vector space ($= \{e_1, \dots, e_r\}$) の basis
 となる. $k \pm r$ 個の vector space) の r 個の vector space: $[v_1,$
 $v_2, \dots, v_r]$ を生成する.

$$\bar{\varphi}^*: X \ni x \longrightarrow \bar{\varphi}^*(x) = [v_1, \dots, v_r] \in G_{r, t-r}$$

と $\bar{\varphi}^*$ を定義する. $\bar{\varphi}^*$ は X の r 個の vector space, $G_{r, t-r}$ の morphism である.

($H^0(\mathbb{P}^1)$ の basis の取り方. $\mathbb{P}^1 = (\mathbb{P}^1)$ の取り方は 12 通りある.)

$\bar{\varphi}^*$ が immersion である: $\bar{\varphi}^*$ は immersion である. ($\bar{\varphi}^*$ は定義 2.1

の morphism $\bar{\varphi}$ の dual morphism である.) $\mathbb{P}^1$ が $\mathbb{P}^1$ 上

very ample である, $\{s_i\}$ は $\mathbb{P}^1$ 上の morphism $\bar{\varphi}^*: \mathbb{P}^1$

$\rightarrow \mathbb{P}^{t-1}$ は immersion. $\mathbb{P}^1$ 上, $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ は morphism

の像である. $f^{-1}(\pi_\alpha) = \pi_\alpha \times \mathbb{P}^{t-1} \ni (x, \{z\}) = (x, \{z_1,$

$z_2, \dots, z_r\}) \longrightarrow \bar{\varphi}^*(x, \{z\}) = (\sum_{j=1}^r \alpha_j^1(x) z_j, \dots, \sum_{j=1}^r \alpha_j^r(x) z_j)$

$\in \mathbb{P}^{t-1}$ が immersion である. - $\bar{\varphi}^* \{ \bar{\varphi}^*(x, \{z\}) \mid \{z\} \in \mathbb{P}^{t-1} \}$

$$\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\bar{\varphi}^*} \mathbb{P}^{t-1}$$

$$\downarrow f$$

$$X$$

$$\xrightarrow{\bar{\varphi}^*}$$

$$G_{r, t-r}$$

12 通り, 2 個の r 個の vector

space の subspace は r 度 r 個の

vector space $\bar{\varphi}^*(x)$ である. 故に

$\bar{\varphi}^*$ は X 上 injective. 又 $\bar{\varphi}^*$ が

immersion である. $\bar{\varphi}^*$ は $\mathbb{P}^1$ 上 $\bar{\varphi}^*$ は immersion である.

故に, $\bar{\varphi}^*$ は X 上 immersion である.

q.e.d.

補題 2.2 $L \in \text{very ample line bundle}$ である。任意の正整数 $n \geq 1$ に対して、 $L^{\otimes n}$ は very ample vector bundle である。

(証明) $E = L^{\otimes n} \in \mathcal{E}$ 。 $E = (O_X^{\oplus n}) \otimes L$ 。 E は適当な isomorphism $\sigma: P(O_X^{\oplus n}) \xrightarrow{\sim} P(E)$ により、 $\sigma^*(L_E) \cong p_1^*(L) \otimes p_2^*(O_P(1))$ 。 従って、 $p_1: X \times \mathbb{P}^{n-1} \rightarrow X$, $p_2: X \times \mathbb{P}^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ 。 $p_1^*(L) \otimes p_2^*(O_P(1))$ は very ample であることは、 L は very ample であることより、
 p. e. d.

補題 2.3 X は quasi-projective algebraic scheme。 $E \in \mathcal{E}$ である vector bundle。 次の条件は同値。

(1) E は ample vector bundle。

(2) X 上の任意の line bundle H に対して、適当な正整数 N が存在し、 $\forall n \geq N$ に対して、 $f_n^*(H) \otimes L_{S^n(E)}$ が very ample。 従って、 $f_n: P(S^n(E)) \rightarrow X$ 。

(3) X 上の任意の line bundle H に対して、適当な正整数 N が存在し、 $\forall n \geq N$ に対して、 $H \otimes S^n(E)$ が very ample である。

(証明) (2) 及び (3) の (1) の方向は、(2) 及び (3) から (1) へ。

(1) の (2) 及び (3) へ。 $K \in \mathcal{E}$ である very ample line bundle である。 E は ample である、 $\exists N$ により、 $\forall n \geq N$ に対して、 $H \otimes K^{\otimes n} \otimes S^n(E)$ は global sections がある。 従って、

$$K^{\otimes n} \longrightarrow H \otimes S^n(E) \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

$$\begin{array}{ccccc}
 P(S^n(\mathbb{R})) & \xrightarrow[\sigma_n]{\sim} & P(H \otimes S^n(\mathbb{R})) & \xrightarrow{i_n} & P(K^{\otimes n}) \\
 & \searrow f_n & \downarrow f_n' & & \\
 & & X & &
 \end{array}$$

 $\text{Ch} : \text{closed immersion.}$

$M \in K^{\text{ét}}$ a tautological line bundle $\in \mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^1$ is $2, 2$ is, very ample $\mathbb{P}^1$, $in^*(M) = L_{H \otimes S^4(E)}$. Ex 4, $L_{H \otimes S^4(E)}$ is very ample. Ex 4, $\sigma_n: p(S^4(E)) \xrightarrow{\sim} p(H \otimes S^4(E))$ is isomorphism $\mathbb{P}^1$, $\sigma_n^*(L_{H \otimes S^4(E)}) = L_{S^4(E)} \otimes f_n^*(H)$. Ex 4, $f_n^*(H) \otimes L_{S^4(E)}$ is very ample. i.e.d.

故以, 補題 2.3 より, 定理 2.2 は証明された.

補題 2.4 E は X 上の vector bundle, $v = v_{\alpha k} E \in T$.

次の条件は同値である。

- (1) E is strongly ample vector bundle
- (2) X の任意の相異なる 2 つの closed point x, y に対して $H^0(E)$ の元 s が $s|_x = 0$ かつ $s|_y \neq 0$ となる s が存在する.

(証明) (1) $\Leftrightarrow$ (2) $0 \rightarrow m_{X,X} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow k(X) \rightarrow 0$

$$0 \rightarrow \mathbb{F} \otimes m_{X,X} \rightarrow \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F} \otimes k(X) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{F} \otimes m_{X,X}) \rightarrow H^0(\mathbb{F}) \rightarrow H^0(\mathbb{F} \otimes k(X)) \rightarrow \dots \quad (\text{exact})$$

$E \otimes M_{X,X}$ の global sections 2' 全球 2' 4.2 : 2.2, $\forall y \in X$ 2
3.5 : 2,

$$(E \otimes M_{X,X})_y \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{O}_y / \mathfrak{m}_y = \begin{cases} 0 & y = x \\ k(y)^{\oplus r} & y \neq x \end{cases}$$

2' $E \otimes M_{X,X}$ の global sections 2' 全球 2' 4.2 : 2.2 1.5 1.5 1.5

(1.5, 補題)

i.e.d.

定理 2.3 の証明 $r = \text{rank } E$, $t = \dim H^0(E)$. $\{s_1, \dots, s_t\}$

を $H^0(E)$ の basis. s_i に対応する $H^0(L_E)$ の basis $\{s'_1, \dots, s'_t\}$

とす. x, y を X の 相異なる 2, 2 closed point とす.

$$V_x = \{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_t) \mid \sum \alpha_i s'_i(x) = 0 \}$$

$$V_y = \{ \beta = (\beta_1, \dots, \beta_t) \mid \sum \beta_i s'_i(y) = 0 \} \quad \text{とす.}$$

L_E が very ample 2, $V_x^* = W_x$, $V_y^* = W_y$ (1.5.1.

* は dual space と取り : 2.2 意味する.) とす. 2,

$$\dim(W_x \cap W_y) = 0. \text{ 故に, } \dim(V_x \cap V_y) = \dim V_x$$

$$- r. \text{ 補題 2.4 4.2, } E \text{ は strongly ample 2.2.}$$

i.e.d.

次に very ample vector bundles の 持ち 2, 2 性質を

示す.

定理 2.4 (1) very ample vector bundle の quotient

vector bundle is very ample.

(2) very ample vector bundles の直和は very ample.

(証明) (1) は明らか. (2) は定理 2.1 を繰り返し用いて示すことができる. p. 2. d.

定理 2.5 E は X 上の very ample vector bundle とする.

$p = \text{char}$.

(1) $p = 0$ のとき: E の任意の positive tensor bundle (cf. Hartshorne [10]) は very ample.

(2) $p > 0$ のとき: 任意の正整数 n に対して, $E^{\otimes n}, S^n(E)$, $\wedge^n E$ ($1 \leq n \leq \text{rank } E$) は very ample.

(証明) 定理 2.4 より (2) は明らか. $p = 0$ のとき, $GL(n)$ は完全可約群であるから, $GL(n)$ の表現の既約成分はすべて直和因子である. 一方, $GL(n)$ の任意の既約表現は, $S^{n_1}(E) \otimes \cdots \otimes S^{n_r}(E)$ の形の既約表現と同値. 故に $p = 0$ のときは, $S^n(E)$ は ^{very} ample, $E \otimes E'$ は ^{very} ample (E, E' が very ample である) であり, 任意の positive tensor bundle は very ample である. p. 2. d.

系 2.1 X は quasi-projective algebraic scheme. L は X 上の very ample invertible sheaf とする. E は X 上の任意の vector bundle とする. 適当な正整数 N が存在し, $\forall n \geq N$ に対して, $E \otimes L^n$ は very ample である.

(証明) 定理 2.4 と Serre の定理

s. e. d.

§2 を 読 了 し た 後 , 今 迄 良 く 解 り 得 た 所 を
問 題 2 に 提 起 し て お け ば .

問 題 1 (中 井 の 判 定 法) X は proper k algebraic scheme
 E は X 上 の vector bundle . 次 の 条 件 は 同 値 か ?

(1) E が $\mathcal{O}_X$ -ample .

(2) X 上 の $\dim \text{Supp } F \geq 1$ 上 に 有 る coherent sheaf F は $\mathcal{O}_X$ 上 ,

$$\chi(F \otimes S^n(E)) = \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i \dim H^i(F \otimes S^n(E)) \rightarrow \infty$$

($n \rightarrow \infty$)

問 題 2 (西 の 定 理) X は k 上 の abelian scheme . E は
 $\text{rank} = r$ の ample vector bundle . 適 当 な 正 整 数 $N = N(r)$
が 存 在 し , $n \geq N$ 上 に 対 し , $S^n(E)$ は very ample か ?

問 題 3 E は very ample vector bundle . k の 標 数 p
周 回 的 かつ , E の positive tensor bundle は very
ample か ?

§ 3 Chern classes と Schubert cycles.

次 後 X は k 上 の non-singular quasi-projective algebraic
variety と 考 へ . E は X 上 の $\text{rank } E = r$ の vector bundle と する .

k 上 , $1 \leq i \leq \min(r, \dim X)$ 上 に 対 し , σ_i は Chern

ring 係数の Chern classes $c_i(E)$ を対応させることの結果
 (cf. Grothendieck [6]) E がいample vector bundle ならば
 各 $c_i(E)$ は numerically positive である (cf. Kleiman [9])

補題 3.1 $Y_1, \dots, Y_r \in \mathbb{Z}$ (整数環) 上の r 個の独立変
 数とし, 各 i ($1 \leq i \leq r$) に対して, $S_i(Y)$ を i 次の基本対称
 式とする. このとき, 各 k ($1 \leq k \leq r$) に対して,

$$L_k - s_1 L_{k-1} + \dots + (-1)^k s_k = 0$$

を満足する $Y_1, \dots, Y_r$ に対して訂正項多項式の組 $(L_0, L_1, \dots, L_r)$ が唯一存在する. 且ち $L_0 = 1$ とする.

(証明) r についての帰納法.

故に, 各 L_k は $Y_1, \dots, Y_r$ の基本対称式 $(s_i(Y))$ の多項式
 Φ_k で示す. 即ち, $L_k(Y) = \Phi_k(s_i(Y))$.

定義 3.1 E は X 上の vector bundle.

$$(1) \quad \Phi_k(E) = \Phi_k(c_1(E), \dots, c_r(E)) \quad (1 \leq k \leq r)$$

と定義する.

$$(2) \quad I = (i_1, \dots, i_r) \in \mathbb{Z}^r \text{ の } r \text{ 個の整数とするとき,}$$

$$c^I(E) = c_1^{i_1}(E) \cdots c_r^{i_r}(E) \text{ と定義する.}$$

今述べている結果の中で最も重要なものは次の結果である.

定理 3.1 (Gieseker [5])

- (1) E が X 上 a ample vector bundle ならば, $\int_X c_k$
 $(1 \leq k \leq \min(r, \dim X))$ は $\neq 0$ であり, $\int_X c_k(E)$ は numerically
 positive である.
- (2) E が X 上 a strongly ample vector bundle ならば,
 $c^I(E)$ ($I = (i_1, \dots, i_n)$ 各 i_j は負でない整数) は
 numerically positive である.

注意 Analytic case は 2.4.2 12. p. A. Griffiths の一連の
 仕事があり, 定理 3.1 はその結果の帰結である.

E が X 上 a very $\mathbb{G}_m$ -ample vector bundle ならば, $r =$
 $\text{rank } E$, $c = \dim H^0(E)$. c は ≥ 2 である. $\S 2$ の定義と同様に,
 $\exists \bar{\varphi}: X \rightarrow \mathbb{G}_{c,r}$ morphism が存在する. $\mathbb{G}_{c,r}$ は $\mathbb{G}_m$ 上の
 a classifying vector bundle を表わせば, $E = \bar{\varphi}^*(E_{c,r})$.
 各 Chern classes は, $c_i(E) = \bar{\varphi}^*(c_i(E_{c,r}))$. 故に $c_i(E)$
 が numerically positive であることは, $c_i(E_{c,r})$
 が正であることが必要である. Fogarty and Rim [4] の Serre
 sequence の理論を応用して, c と r , classifying vect-
 or bundle の Chern classes は Schubert cycles: $\Omega_{a_1, \dots, a_{c-r}}$
..., a_{c-r} で書ける (cf. Hodge and Pedoe [13])
 但し, Schubert cycle $\Omega_{a_1, \dots, a_{c-r}}$ は

Schubert condition : $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{t-n} \leq t$

また、2 次項は
$$\sum_{i=1}^{t-n} a_i = \frac{(t-n)(t-n+1)}{2} \cdot G_{t,n}$$

closed irreducible subvariety $2''$ and 3 .

定理 3.2 Grassmann variety $G = G(r, n)$ a classifying
vector bundle $E = E(r, n)$ a Chern classes $c_1, \dots, c_r$ of E are

$$(1) \quad r = t-1 \quad c_i(\mathbb{F}) = \Omega_{t-i} \quad (1 \leq i \leq t-1)$$

$$(2) \quad 1 \leq r \leq t-2 \quad C_i(\bar{P}) = \Omega_{r-i+1, r+2, \dots, r} \quad (1 \leq i \leq r)$$

(証明) Fogarty and Rim [4] を応用して, 実際は, 計算を (2) で行けば良い. (b) は, 計算がほん数分以内で済む. (cf. S. Chern [3])

定理 3.3 定理 3.2 の条件の下で, $\Phi_k(\Gamma)$ を Γ' の λ と次の様になる.

4) $r = t - 1$ $\Phi_1 = c_1 = \Omega_1$, $\Phi_k = 0$ ($2 \leq k \leq t-1$)

(2) (i) $k \geq t-r+1$ $\Phi_k = 0$

(ii) $k = t - r$ $\Phi_k = \Omega_{n, r+1, \dots, t-1}$

(iii) $k \leq t-r-1$ $\Phi_k = \Omega_{r, r+1, \dots, r+(k-1), r+(k+1), \dots, t}$
 $\downarrow$
 k 番目 $(k+1)$ 番目.

(証明) (1) 17 冊より, (2) 9 (11) 12) 42 : $k n$ 42 の
帰納法と Pieri の公式を用. (2) 9 (11) 12) 42,

$k = t - r + i \ (i \geq 1)$ とし、 $i \geq 1$ の場合と Pieri の公式を利用する。 p. e. d.

系 3.1 X は non-singular projective variety, $L = \mathcal{O}_X(1)$ は X 上の very ample line bundle とする。 E は X 上の 任意の vector bundle とし、 $E \otimes L^n = E(n)$ は very ample とする。 任意の n に対して、 $1 \leq k \leq \min(\dim X, \text{rank } E)$ に対し、

$$c_k(E) = X \cdot \left(\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} c_{k-i}(E(n)) \cdot \sum_{i=0}^n n^i \right)$$

但し、 $c = \dim H^0(E(n))$

$\sum$: L の first chern class

$\cdot$: intersection product

$r = \text{rank } E$

つまり、 X 上の 任意の vector bundle の chern classes は Schubert cycles Ω_a 、 $\sum$ 等によって表わされる。

系 3.2 E は X 上の ample かつ、very r -ample な vector bundle とすれば、 $\dim H^0(X, E) \geq \text{rank } E + \dim X$ 。

(証明) 定理 3.1 と 定理 3.3 を利用する。 p. e. d.

定理 3.2, 定理 3.3 を利用して、Hartshorne の 1 問題及 1 の近似を述べたのは、次の一連の 1 問題が解決されたことによる。これは、それだけ? 意味のある 1 問題? である。

問題 4 X を n 次元の $\mathbb{P}^n$ の closed irreducible subvariety.

次の条件は同値か?

(1) $E_{\text{tr}}|_X$ が ample vector bundle.

(2) $X \sim \lambda \Omega_{1,2,\dots,c-r+1,c-r+2,\dots} + \dots$ 但し $\lambda \neq 0$
 $\sim$ は X の 冪 を 表わす $\sim$ は rationally equivalence.

問題 5 X を n 次元 non-singular projective variety,

T_X を X の tangent vector bundle とす. Y を X の closed irreducible subvariety. E は T_X/Y が Y 上 ample vector bundle ならば, Y は X の 中 の E の 横断 形 成 的 であるか? (同 言 語, Hirouaka-Matsumura [12] の § 2 type の 命 題 と 同 様 である.) 更に T_X 自身 が ample ならば, X は $\mathbb{P}^n$ と 同 型 か?

問題 4 の 解 答 は, 最初 に 述 べ た Hartshorne の 問題 4.17 (2), E が ample ならば, E が very $\mathbb{Q}$ -ample ならば, 肯定的 答 案 が 与 え ら れ る. しかし, 今 の 所, 問題 4 と 同 様 である 問題 5 の 横断 形 成 的 である ことが 示 され る.

§ 4 Non-singular complete curves と ample vector bundles ($p = \text{char } k > 0$)

R. Hartshorne が原大? の講義? を書いてゐるに反して,
 $p = \text{char } k > 0$ のとき, complete non-singular curve X 上の
 ample vector bundles の存在法は如何?

X は genus g の non-singular complete curve, $E \in X$ 上の
 vector bundle とする.

定義 4.1 (Barton [2])

$$d_0(E) = \min_L \{ \deg L \mid L \text{ は } E \text{ の quotient line bundle} \}$$

$d_0(E)$ が有限? 有数? である, Atiyah [1] の maximal splitting
 の理論を利用すればよい.

定理 4.2 E は X 上の vector bundle. 次の条件は同値

である.

(1) E は ample.

(2) 適当な正整数 N が存在し, $n \geq N$ ならば,

$$d_0(E^{(p^n)}) > \min \{ 0, 2(g-1) \}$$

ただし, $E^{(p^n)}$ は E の n 回の Frobenius endomorphism の
 inverse image.

注意 $g=0$ のときは, 明らか, $d_0(E) > 0$ ならば E は
 ample である. $g=1$ のときは, Atiyah [1] より, $d_0(E) > 0$
 ならば E は ample である.

補題 4.1 $0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_r = E$, $E_i/E_{i-1} = L_i$

$(L_1, \dots, L_r)$ は E の maximal splitting とする.

$n \neq 4$; $\bar{E}^{(p^n)}$ is ample. $\deg \bar{E} = 0$ & $g \geq 2$ & $2 \nmid g$ & $g \neq 7$

$\deg \bar{E} = 0$ & 4 , $g \geq 2$. (Atiyah [1]) $\bar{E}^{(p^n)}/L_1(u) = \bar{E}'(u)$ & $3 \nmid g$, 4 倍 3 的 2 次方 是 $2g$, $\bar{E}'(u)$ is ample. 故 $\deg L_1(u) < 0$. $L_1(u)$ is $\bar{E}^{(p^n)}$ a maximal degree a subline bundle & 4 , $3 \nmid g$ & u is 2 , $H^0(X, \bar{E}^{(p^n)}) = 0$. 故 u , R-R 定理 & 4 , $\dim H^1(X, \bar{E}^{(p^n)}) = 2(g-1)$.

$\dim H^0(X, \bar{E}^{(p^n)} \otimes K_X) > 0$. K_X is X is a canonical line bundle. 故 u 适当 $\bar{E}^{(p^n)} \otimes K_X$ a subline bundle H is, $\deg H \geq 0$ & $3 \nmid g$ & 4 . $\bar{E}' = \bar{E}^{(p^n)} \otimes K_X / H$ & $3 \nmid g$ & 4 ,

$$0 \rightarrow \bar{E}' \otimes K_X \rightarrow \bar{E}^{(p^n)} \rightarrow H \otimes K_X \rightarrow 0$$

故 u , $\deg(\bar{E}^{(p^n)}) \leq \deg K_X - \deg H \leq 2(g-1)$. $3 \nmid g$.

g. e. d.

Bibliography

- [1] F. Atiyah; Vector bundles over an elliptic curve, *Proc. London Math. Soc.* Vol 7. 1957
- [2] E. Barton; Contributions to the theory of ample vector bundles, Thesis (Columbia)
- [3] S. Chern; Characteristic classes of hermitian manifold, *Annals of Math.* Vol 47 1946

- [4] J. Fogarty and D. Rein ; Serre sequences and Chern classes
 , Journal of Algebra 10. 1968.
- [5] D. Giraeker ; Contributions to the theory of positive
 embeddings in algebraic geometry
 , Thesis (Harvard.)
- [6] A. Grothendieck ; La théorie des classes de Chern
 , Bull. Soc. Math. France 86 . 1958
- [7] A. Grothendieck ; E.G.A. I, II, III.
- [8] S. Kleiman ; Ample vector bundles on algebraic
 surfaces , Proc. Amer. Math. Soc.
 Vol. 20 - II . 1969.
- [9] S. Kleiman ; Toward a numerical theory of
 ampleness , Annals of Math., Vol 84
 1966.
- [10] R. Hartshorne ; Ample Vector bundles
 , I.H.E.S. No 29.
- [11] R. Hartshorne ; Cohomological dimension of algebraic
 varieties , Annals of Math. Vol 88
 1968.
- [12] H. Hironeka and H. Matsumura ; Formal functions
 and Formal imbeddings., Jour. of

Jap. Math. Soc. Vol 20. 1968

[13] W. Hodge and D. Pedoe ; Methods of Algebraic
geometry I, II , Cambridge Univ.
press. 1952.

[14] T. Oda ; Vector bundles on an elliptic curve
(to appear.)