

Gaussian process の Markov 性 の定義に関する一つの注意

名市大 教養 井原 俊 輔

Pitt [1] は Gaussian process の Markov 性が、Hilbert 変換によって特徴づけられることを注意した。ここでは Markov 性の定義に関する、河野 [2] の議論との関連を見ながら Pitt の結果を紹介する。

[2] と同様、 $\{X(t), t \in \mathbb{R}^n\}$ を real valued Gaussian random field とする。以下、記号、言葉は [2] と全く同じものを使いますので、その定義については [2] を見て下さい。

以下、集合 $D \in \mathcal{O}$ を fix して考える。 $\mathbb{R}^n$ 上の関数 $u(t)$ に対し、次の様な operator $\hat{H} (= \hat{H}_D)$ を考える。

$$\hat{H} u(t) \equiv \begin{cases} u(t), & t \in D \\ -u(t), & t \notin D \end{cases} \quad (1)$$

関数 $u(t)$ に対し、 $\bar{u}(t)$, $u^+(t)$ を次の様に定義する。

$$\bar{u}(t) \equiv \begin{cases} u(t), & t \in D \\ 0, & t \notin D \end{cases} \quad u^+(t) \equiv \begin{cases} 0, & t \in D \\ u(t), & t \notin D. \end{cases}$$

この記号を使えば

$$\hat{H}u(t) = u^-(t) - u^+(t), \quad t \in \mathbb{R}^n \quad (1')$$

である。

次に $\mathcal{H}$ の subspace $\mathcal{H}_0$ を次式で定義する。

$$\mathcal{H}_0 \equiv \overline{\bigcup_{\emptyset \neq G \subset \partial D} \mathcal{H}_0(G)} \quad (2)$$

($\overline{\cdot}$ は $\mathcal{H}$ における closure) $\mathbb{R}^n \supset F$ closed set に対し

$$\bigcup_{\substack{G \supset F \\ G: \text{open}}} \mathcal{H}_0(G) = \{u \in \mathcal{H}; \text{car. } u \subset F^c\} \quad \text{が成り立つことに}$$

注意すると, 次のことが容易にわかる。

$$\mathcal{H}_0 = \overline{\{u \in \mathcal{H}; \text{car. } u \subset (\partial D)^c\}} \quad (2')$$

Markov 性を上の operator $\hat{H}$ によって特徴づけることが目的である。以下のことが証明できる。

Proposition 1 $\hat{H}(\mathcal{H}_0) \subset \mathcal{H}_0 \Rightarrow \mathcal{H}$ は strictly D -local.

(strictly D -local の定義は [2] の Def. 4 を見よ)

証明 $u \in \mathcal{H}$, $\text{car. } u \subset (\partial D)^c$ とすると, (2') より $u \in \mathcal{H}_0$.
 よって $u = u^- + u^+ \in \mathcal{H}_0$, かつ仮定より $\hat{H}u = u^- - u^+ \in \mathcal{H}_0$.
 $\therefore u^- = \frac{1}{2}(u + \hat{H}u) \in \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$.

Proposition 2 $\mathcal{H}$ が D -regular のとき, $u, \hat{H}u \in \mathcal{H}_0$ なるすべての u に対し, $\|\hat{H}u\| = \|u\| \Rightarrow \mathcal{H}$ は D -local.

(ここに, $\|\cdot\|$ は $\mathcal{H}$ のノルム). 又, D -regular,

A が D -local の定義は [2] の Def. 6, 8 を見よ.)

証明 $u \in \mathcal{H}_0(D)$, $v \in \mathcal{H}$ $\text{car } v \subset D$ とする. A が D -local ということは, $(u, v) = 0$ をいえばよい. (ここで, $(\cdot, \cdot)$ は $\mathcal{H}$ での内積) $u \in \mathcal{H}_0(D)$ より $u \perp \mathcal{H}(D)$ ([2] の Lemma 1). $\mathcal{H}$ が D -regular だから $u \perp \mathcal{H}^-(D)$.

$$\begin{aligned} \therefore u \in (\mathcal{H}^-(D))^{\perp} &= (\bigcap_{\sigma \ni \mathbb{Q} \supset D} \mathcal{H}(\mathbb{Q}))^{\perp} = \overline{\left(\bigcup_{\sigma \ni \mathbb{Q} \supset D} \mathcal{H}(\mathbb{Q})^{\perp} \right)} \\ &= \overline{\bigcup_{\sigma \ni \mathbb{Q} \supset D} \mathcal{H}_0(\mathbb{Q})} \subset \mathcal{H}_0. \end{aligned}$$

$$\therefore u \in \mathcal{H}_0.$$

又, (2') より $v \in \mathcal{H}_0$, 故に $u+v \in \mathcal{H}_0$.

一方, $u=0$ on D , $v=0$ on $\bar{D}$ に注意すると,

$$\hat{H}(u+v) = u-v \in \mathcal{H}_0.$$

従って, 仮定より.

$$\|u+v\| = \|\hat{H}(u+v)\| = \|u-v\|$$

$$\therefore (u, v) = 0$$

Proposition 3 $\{X(t)\}$ が D -Markov $\Rightarrow \sigma \ni \mathbb{Q} \supset D$ に対し $\hat{H}$ を $\mathcal{H}_0$ に制限したものは unitary.

証明 $u \equiv \bar{u} + u^{\dagger} \in \mathcal{H}_0(\mathbb{Q})$ とす. $\{X(t)\}$ が D -Markov だから, $\mathcal{H}$ は strictly D -local ([2] Proposition 2).

$$\therefore \bar{u} \in \mathcal{H}, \text{ 従って } u^{\dagger} \in \mathcal{H}.$$

$u \in \mathcal{H}_0(\mathbb{Q})$ から, 結局, $\bar{u}, u^{\dagger} \in \mathcal{H}_0(\mathbb{Q})$

$$\therefore \hat{H}u = \bar{u} - u^+ \in \mathcal{H}_0(\mathcal{F}).$$

又, $\hat{H}(\bar{u} - u^+) = \bar{u} + u^+ = u$ 故より結局, $\hat{H}$ は $\mathcal{H}_0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_0(\mathcal{F})$ に onto に map することを示す。

次に $\hat{H}$ が $\mathcal{H}_0(\mathcal{F})$ 上で isometry であることを示す。

$\{X(t)\}$ が D-Markov 故より, $(\bar{u}, u^+) = 0$ ($\because$ [2], ~~Lemma~~

Proposition 2 の証明より)

$$\therefore \|u\|^2 = \|\bar{u} + u^+\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|u^+\|^2.$$

$$\|\hat{H}u\|^2 = \|\bar{u} - u^+\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|u^+\|^2.$$

$$\therefore \|\hat{H}u\| = \|u\| \text{ for } \forall u \in \mathcal{H}_0(\mathcal{F}).$$

以上の3つの Proposition から次のことがわかる。

Theorem $\{X(t)\}$ が D-Markov $\Rightarrow \hat{H}$ を $\mathcal{H}_0$ に制限したものは unitary.

もし, $\mathcal{H}$ が D-regular ならば, 逆も成立。

証明 後半のことは, Proposition 1, 2 と, [2] の Proposition 1, 3 から明らか。

$$(\text{前半}) \quad \forall u \equiv \bar{u} + u^+ \in \mathcal{H}_0 \text{ に対し, } \exists u_n \equiv \bar{u}_n + u_n^+ \in \mathcal{H}_0(\mathcal{F}_n)$$

$$u_n \rightarrow u \text{ (in } \mathcal{H}), \text{ 故より, } 0 \neq \mathcal{F}_n \supset \partial D, \mathcal{F}_n \searrow.$$

Proposition 3 で示すように, $\bar{u}_n, u_n^+ \in \mathcal{H}_0(\mathcal{F}_n)$, $(\bar{u}_n, u_n^+) = 0$ 従って, $\{\bar{u}_n\}, \{u_n^+\}$ もそれぞれ Cauchy 列になり, $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$, $u_n^+ \rightarrow u^+$ (in $\mathcal{H}$) がわかる。

$$\therefore \bar{u}, u^+ \in \mathcal{H} \text{ かつ } (\bar{u}, u^+) = 0$$

後は Proposition 3 と同様に, $\hat{H} \in \mathcal{H}_0$ に制限しても unitary であることがわかる。

特に, $\{X(t), t \in \mathbb{R}^1\}$ が stationary Gaussian process の場合には, Theorem の条件は, Hilbert 変換 H ;

$$HF(x) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi i} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{F(x-y)}{y} dy, \quad (F \in L^1) \quad (3)$$

の言葉で表される。即ち, $\{X(t)\}$ の spectral density を Δ とし, $L^2_{\Delta^{-1}} = L^2(\mathbb{R}^1; \Delta^{-1}(x)dx)$ とし,

$$\mathcal{H}_{\varepsilon} \equiv \{F \in L^2_{\Delta^{-1}}; \hat{F}(t) = 0 \text{ for } |t| \leq \varepsilon\}$$

($\hat{F}$ は F の Fourier 変換)

$$\mathcal{H}_0 \equiv \overline{\bigcup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_{\varepsilon}} \quad (\text{--- は } L^2_{\Delta^{-1}} \text{ での closure})$$

とおくと,

Corollary (Pitt [1])

$\{X(t)\}$ が Markov $\iff$ Hilbert 変換 $H \in \mathcal{H}_0$ に制限しても unitary.

(今の場合, $\{X(t)\}$ が $(-\infty, 0)$ -Markov のとき, 単に $\{X(t)\}$ は Markov という)

証明 写像, $L^2_{\Delta^{-1}} \ni F \longleftrightarrow \hat{F} \in \mathcal{H}$ が $L^2_{\Delta^{-1}}$ と $\mathcal{H}$ を unitary に対応させていることと, Hilbert 変換 H に対し, 変換 $\hat{H}$ を

$$\hat{H}\hat{F} \equiv \widehat{HF} \quad (F \in L^2)$$

で与えらるゝと、 $\hat{H}$ に対し (1) が a.e. $t \in R'$ で成り立つ ($D = (-\infty, 0)$ として) ことに注意すると、Corollary は Theorem の言い直しにすぎないことがわかる。

文 献

- [1] Pitt, L.D. On two problems from the spectral theory of stationary Gaussian processes. to appear.
- [2] 河野敬雄. 多重マルコフ性の定義といくつかの例について