

Schrödinger 作用素の スペクトルについて

東大 教養 牛島 照夫

§ 0. 序

ヒルベルト空間 $L^2(R^n)$ ($n \geq 3$) で微分作用素:

$$L = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + b_j(x) \right)^2 + q(x)$$

で与えられる Schrödinger 作用素を考える。ここで $b_j(x)$ と $q(x)$ は、実数値函数である。この作用素のスペクトル、特にその絶対連続部分について、Kuroda の理論 ([1], [2]) を適用して得られる結果を報告しよう。

§ 1. 仮定と結果

はじめに、 $-\Delta$ を、急激な函数族 $\mathcal{F}$ の上に制限して $-\Delta|_{\mathcal{F}}$ は本質的に自己共役であり、その自己共役拡張 H_0 は定義域 $D(H_0) = \mathcal{D}_{L^2}(R^n)$ であり、そのスペクトルは絶対連続かつ正の実数軸全体であることに注意しておく。

函数 $b_j(x)$ ($j=1, 2, \dots, n$) と

$g(x)$ について次の仮定を置く。

(C. 1) $L|g$ は、本質的に自己共役であり、その自己共役拡張 H は、 $D(H) = D(H_0)$ とみえる。

$$(C. 2) \quad a > \frac{n}{2}$$

$$2n > p_1 > n$$

$$2n > p_2 > \max(2, \frac{n}{2})$$

とみえる。 a, p_1, p_2 に対して

$$(1 + |x|)^a b_j(x) \in L^{p_1} \quad (1 \leq j \leq n),$$

$$(1 + |x|)^a g'(x) \in L^{p_2}.$$

$$=: \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial b_j(x)}{\partial x_j} + b_j^2(x) \right) + g(x).$$

$$(C. 3) \quad |x| \rightarrow \infty \text{ で } b_j(x) = O(|x|^{-(a+1)-\varepsilon})$$

$$(\varepsilon > 0, j = 1, 2, \dots, n),$$

$$n > p_2 > \max(2, \frac{n}{2}) \text{ かつ } p_2 \text{ に対して}$$

$$(1 + |x|)^a g'(x) \in L^{p_2}.$$

条件 (C. 1), (C. 2) のもとで次の $q = 1$ が結論できる。

(R. 1) H の絶対連続部分は H_0 とユリタリ-同値。

(R. 2) H の絶対連続部分は、Kuroda ([1]) の意味で準固有函数展開をもつ。

さらに (C. 3) も仮定すると、

(R. 3) H の特異部分のスペクトルを $\sigma_s(H)$ で表わすと、 $\sigma_s(H) - \{0\}$ は、高々可算個の有限多重度の固有値よりなる。

負の固有値は素積点とも $\neq$ ない。正の固有値は、0以外と素積点としない。

§2. Kuroda の結果

可分なヒルベルト空間 $\mathcal{H}_j$ における自己共役作用素 $H_j (j=0,1)$ を考える。実でない複素数 z に対して、 $R_j(z) \equiv (H_j - z)^{-1}$ とおく。 H_j のスペクトル、絶対連続部分のスペクトル、特異部分のスペクトルを、それぞれ $\sigma(H_j)$, $\sigma_{ac}(H_j)$, $\sigma_s(H_j)$ と書く。 $\mathcal{H}_j$ の有界線型作用素の全体を $\mathcal{B}$ で表わし、任意の線型作用素 T の定義域、値域を、それぞれ $D(T)$, $R(T)$ とする。 H_j に対して次の条件を考える。

(K.1) $D(H_1) = D(H_0) = \mathcal{D}$. $D(V) \supset \mathcal{D}$ なる V を、

$H_1 = H_0 + V$ とかける。

(K.2) 稠密な $R(A)$ をもつ、可逆な $A \in \mathcal{B}$ と、 $D(B)$

$\supset R(R_0(z)A)$ ($\forall z, \operatorname{Im} z \neq 0$) なる B に対して、

$u \in D(B)$ ならば、 $Vu = ABu$ 。

(K.3) $S(z) \equiv A^* \{ R_0(z) - R_0(\bar{z}) \}$ $A \in \mathcal{B}$ に対して、

$S(\lambda) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} S(\lambda + i\varepsilon)$ が、作用素ノルムで存在し、この収束は λ につき広義一様である。

(K.4) $Q(z) \equiv BR_0(z)A$ とおくと、 $Q(z) \in \mathcal{B}$ かつ

$\operatorname{Im} z \neq 0$ で完全連続作用素である。

(K.5) $Q(\lambda \pm i0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} Q(\lambda \pm i\varepsilon)$ が作用素ノルムで存在し、 $Q(z)$ は、 $\Im_m z \geq 0$ および $\Im_m z \leq 0$ で作用素ノルムで連続である。

(K.6) 実軸上の閉区間 I に対して、 $I^+ \equiv \{z; \operatorname{Re} z \in I, \Im_m z \geq 0\}$ とおく。同様に I^- を定義しておく。このとき $\left\{ \frac{1}{2\pi i} S(\lambda) \right\}^{1/2}$ は区間 I で、 $Q(z)$ は、 $I^+(I^-)$ で、 $\theta(> \frac{1}{2})$ 次 Hölder 連続(作用素ノルムで)である。

我々が使う Kuroda の結果は次のように要約できる。

定理 K. (1) 条件 (K.1) ~ (K.5) のもとで、

- 1° H_0 のスペクトルは絶対連続、
- 2° $\sigma_{ac}(H_1) = \sigma(H_0)$, $\sigma_s(H_1)$ は、測度 0 の閉集合、
- 3° 次の条件をみたす Wave Operator $W_{\pm} \in \mathcal{B}$ が存在;

$$W_{\pm}^* W_{\pm} = I, \quad W_{\pm} W_{\pm}^* = P_1, \quad H_1 W_{\pm} = W_{\pm} H_0.$$

$$W_{\pm} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm \infty} e^{itH_1} e^{-itH_0}.$$

(I は恒等作用素, P_1 は H_1 の絶対連続部分への射影)

(2) さらに (K.6) を仮定すると、

- 4° $\sigma_s(H_1) \cap I$ は、1 にわたる可算個の多重度有限の固有値よりなり、それらは、 I の内部には集積しない。

(〔1〕, 〔2〕)

§ 3. 擾動の分解と $(-\Delta - \lambda)^{-1}$ の積分核の表示

与えられた $T=L$ の形から、 $g'(x) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial b_j(x)}{\partial x_j} + b_j(x)^2 \right) + g(x)$ とおくと、

$$\begin{aligned} L &= -\Delta - 2i \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + g'(x) \\ &= -\Delta + \alpha(x) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + \beta_0(x) \right) \end{aligned}$$

となる。そこで

$$\alpha(x)\beta_0(x) = g'(x), \quad \alpha(x)\beta_j(x) = -2ib_j(x) \quad (1 \leq j \leq n)$$

がある。また

$$(A f)(x) \equiv \alpha(x) \cdot f(x).$$

$$(B \cdot f)(x) \equiv \beta_0(x) f(x), \quad (B_j f)(x) \equiv \beta_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \quad (1 \leq j \leq n),$$

$$B \equiv \sum_{j=0}^n B_j$$

により、形式的に $H = H_0 + AB$ の形になる。今後、

$$\alpha(x) = (1 + |x|)^{-a}, \quad a > \frac{n}{2}$$

と仮定すると、 $(K, 2)$ の A についての条件はみたされる。

一方、 $L^2(\mathbb{R}^n)$ における $(H_0 - \lambda)^{-1}$ は、次のように積分

表示される。

$$(H_0 - \lambda)^{-1} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} R_n(|x-y|, \lambda) f(y) dy$$

となる。

$$R_n(r, \lambda) \equiv C_n \sqrt{\lambda}^{\frac{n}{2}-1} r^{1-\frac{n}{2}} H_{\frac{n}{2}-1}^{(1)}(\sqrt{\lambda} r)$$

$$(\lambda \neq 0, \operatorname{Im} \sqrt{\lambda} > 0, C_n = i 2^{-\frac{n}{2}-1} \pi^{1-\frac{n}{2}})$$

$H_\nu^{(1)}(z)$ は 次ノ一種 Hankel 函数

である。 $R_n, \frac{\partial}{\partial x_j} R_n, \frac{\partial}{\partial \lambda} R_n, \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial x_j} R_n$ の評価のため
 以下に次の公式を利用する。

$$(H.1) \quad H_\nu^{(1)}(z) = C_\nu z^{-\nu} + O(z^{-\nu+1}),$$

for $\operatorname{Im} z \geq 0, |z| \rightarrow 0, (C_\nu = -i\pi 2^{-\nu} \Gamma(\nu)).$

$$(H.2) \quad H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - (2\nu+1)\frac{\pi}{4})} + O(z^{-\frac{3}{2}}),$$

for $\operatorname{Im} z \geq 0, |z| \rightarrow \infty.$

$$(H.3) \quad \frac{d}{dz} z^{-\nu} H_\nu(z) = -z^{-\nu} H_{\nu+1}(z).$$

$$(H.4) \quad \frac{d}{dz} z^\nu H_\nu(z) = z^\nu H_{\nu-1}(z).$$

$$\phi(z) \in C^\infty \Sigma, \quad \phi(z) = 1 \quad (|z| \leq 1), \quad = 0 \quad (|z| \geq 2)$$

に注意。 $R_n^{(1)}(r, \lambda) \equiv \phi(\sqrt{\lambda} r) R_n(r, \lambda), R_n^{(2)}(r, \lambda) \equiv$
 $R_n(r, \lambda) - R_n^{(1)}(r, \lambda)$ とおくと, (H.1), (H.2) より

$$\begin{aligned} R_n(r, \lambda) &= R_n^{(1)}(r, \lambda) + R_n^{(2)}(r, \lambda) \\ &= \frac{S_n^{(1)}(r, \lambda)}{r^{n-2}} + \frac{S_n^{(2)}(r, \lambda)}{r^{\frac{n-1}{2}}}. \end{aligned}$$

ここで $S_n^{(k)}(r, \lambda)$ は, r に連続である。

$$|S_n^{(1)}(r, \lambda)| \leq \text{const}, \quad S_n^{(1)}(r, \lambda) = 0 \quad \text{for } |\sqrt{\lambda} r| \geq 2$$

$$|S_n^{(2)}(r, \lambda)| \leq \text{const} |\sqrt{\lambda}|^{\frac{n-3}{2}}, \quad S_n^{(2)}(r, \lambda) = 0 \quad \text{for } |\sqrt{\lambda} r| \leq 1$$

である。 $R_n = C_n \sqrt{\lambda}^{n-2} (\sqrt{\lambda} r)^{1-\frac{n}{2}} H_{\frac{n}{2}-1}^{(1)}(\sqrt{\lambda} r)$ と (H.3)

を使うと, $r = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$ とし,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} R_n(r, \lambda) &= -\frac{C_n}{C_{n+2}} \cdot x_j \cdot R_{n+2}(r, \lambda) \\ &= \frac{S_{n+2}^{(1)}(x, \lambda)}{r^{n-1}} + \frac{S_{n+2}^{(2)}(x, \lambda)}{r^{\frac{n-1}{2}}}. \end{aligned}$$

2.2.2.

$$S_{n,j}^{(k)}(x, \lambda) \equiv -\frac{C_n}{C_{n+2}} \cdot \frac{x_j}{r} \cdot S_{n+2}^{(k)} \quad (k=1, 2, 1 \leq j \leq n)$$

は、 $S_{n+2}^{(k)}$ と同様の評価とみ $\Gamma = \emptyset$ 。次に $N > 1$ とし

$$\Pi_N^+ \equiv \{z : N^{-1} \leq |z| \leq N, \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

とみ Γ 。同様 Γ に、 Π_N^- を定義する。 $R_n = C_n r^{2-n} (\sqrt{n} r)^{\frac{n}{2}-1}$

・ $H_{\frac{n}{2}-1}^{(1)}(\sqrt{n} r)$ とし (H. 4) を使うと、 $N \Gamma$ には必ず定

数 C_N が存在し $z, \lambda \in \Pi_N^+$ ならば

$$\left| \frac{\partial}{\partial \lambda} S_n^{(1)}(r, \lambda) \right| \leq C_N, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \lambda} S_n^{(2)}(r, \lambda) \right| \leq C_N r$$

があることを見出す。これから、 $\lambda \in \Pi_N^+$ と $1 \leq j \leq n$ について

$$\left| \frac{\partial}{\partial \lambda} S_{n,j}^{(1)}(x, \lambda) \right| \leq C'_N, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \lambda} S_{n,j}^{(2)}(x, \lambda) \right| \leq C'_N r$$

がある。

また $Q_j(z) \equiv B_j R_0(z) A$ とおくと $Q(z) = B R_0(z) A =$

$\sum_{j=0}^n B_j R_0(z) A = \sum_{j=0}^n Q_j(z)$ がある。 $R_0(z)$ の積分表示から

$$(Q_j(z)f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} Q_j(x, y; z) f(y) dy,$$

$$Q_0(x, y; z) = (\beta_0(x) R_n(|x-y|, z) \alpha(y).$$

$$Q_j(x, y; z) = (\beta_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} R_n(|x-y|, z) \alpha(y) \quad (1 \leq j \leq n)$$

がある。上述 $\Gamma = \mathbb{R}_n$ 上の $\frac{\partial}{\partial x_j} R_n$ の評価から

$$Q_j^{(k)}(x, y; z) \equiv \frac{\beta_j(x) S_{n,j}^{(k)}(x, y; z) \alpha(y)}{|x-y|^{\lambda_{j,k}}}$$

($k=1, 2, 1 \leq j \leq n$.)

$$S_{n,0}^{(k)} \equiv S_n^{(k)},$$

$$\lambda_{0,1} = n-2, \quad \lambda_{j,1} = n-1 \quad (1 \leq j \leq n),$$

$$\lambda_{j,2} = \frac{n-1}{2}, \quad (0 \leq j \leq n)$$

とあると、 $Q_j(x, y; z) = Q_j^{(1)}(x, y; z) + Q_j^{(2)}(x, y; z)$ である。

1. $T = \text{バックス}$ 。

$$(Q_j^{(k)}(z)f)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} Q_j^{(k)}(x, y; z) f(y) dy$$

この積合作用素について、(K.4), (K.5) を検証せよ。

よ。又、 $A(z) \equiv A^* R_0(z) A$ について

$$A^{(k)}(x, y; z) = \frac{\overline{\alpha(x)} \delta_n^{(k)}(1-x-y, z) \alpha(y)}{|x-y|^{n-k}} \quad (k=1, 2)$$

と核とある積合作用素について、(K.3) をみたすことを示せば Kuroda の結果が使えることになる。

§4. 積合作用素の完全連続性と、条件Kの検証。

§3 で定義した $T = A^{(k)}(z)$, $Q_j^{(k)}(z)$ の性質を調べるために、Sobolev 及び Kondrachov の結果から導かれる次の補題を用いる。

補題 U. $1 < p, q < \infty, n > n > 0$ が与えられたとき

$$(1) \quad 0 \leq \frac{1}{\alpha} < 1 - \frac{1}{p}, \quad 0 \leq \frac{1}{\beta} < \frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{n}{n}$$

とみたとき α, β が存在しなくてはならない。(1) は $\frac{1}{\alpha} = 0$ とある)。

このとき

$a(x) \in L^\alpha(\mathbb{R}^n)$, $b(x) \in L^\beta(\mathbb{R}^n)$, $c(x, y)$ は $\mathbb{R}^{2n} - \{x=y\}$ 上の連続有界関数

に對し (2) 積分作用素.

$$(K_{\lambda} u)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{b(x) c(x, y) a(y)}{|x-y|^{\lambda}} u(y) dy$$

は、 $L_p(\mathbb{R}^n)$ から $L_q(\mathbb{R}^n)$ への有界作用素.

$$\|K_{\lambda}\|_{L_p(\mathbb{R}^n), L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C(p, q, \alpha, \beta) \|c\|_{\infty} \|a\|_{\alpha} \|b\|_{\beta}$$

とみたて可.

(2) したがって

$$1 - \frac{1}{p} - \frac{\lambda}{n} \leq \frac{1}{\alpha'} < 1 - \frac{1}{p}, \quad 0 < \frac{1}{\alpha'}, \quad 0 < \frac{1}{\beta'}$$

$$\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} < 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{\lambda}{n}$$

とみたて可 α', β' が存在.

$$a(x) \in L^{\alpha'}(\mathbb{R}^n) \quad b(x) \in L^{\beta'}(\mathbb{R}^n)$$

とみたて可 したがって K_{λ} は $L_p(\mathbb{R}^n)$ から $L_q(\mathbb{R}^n)$ への完全連続作用素である.

証明 次の二つの補題を用いる.

補題 S (Sobolev, [4])

$$p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1, \lambda = n(2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q})$$

に對し (2), $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ ならば

$$\left| \iint_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^{\lambda}} dx dy \right| \leq C(p, q) \|g\|_q \|f\|_p.$$

補題 K (Kondrachov, [5])

D を $\mathbb{R}^n$ の有界領域、 $c(x, y)$ を $D \times D - \{x=y\}$ 上の

有界連続函数としてみよ.

$$(U_{\lambda} f)(x) = \int_D \frac{c(x, y)}{|x-y|^{\lambda}} f(y) dy$$

とある。 $p > 1$ が与えられ $p = \frac{1}{\alpha}$

$$n > n \gg n \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

ある n について

$$\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\alpha^*} = \frac{1}{p} - 1 + \frac{1}{n}$$

に於て α を定めると、 U_λ は $L^p(D)$ から $L^q(D)$ への完全連続作用素である。

$$(1) \text{ の証明. } \frac{1}{p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'}, \left(\frac{1}{\beta} = 1 - \frac{1}{\beta'}\right)$$

とあると、 p, α は、補題5の条件を満たす。注意の $u \in L^p$ と $v \in L^{\beta'}$ に対して

$$(v, K_\lambda u)$$

$$\begin{aligned} &= \left| \iint \frac{v(x)b(x)c(x,y)a(y)u(y)}{|x-y|^\lambda} dx dy \right| \\ &\leq \|c\|_\infty \left| \iint \frac{v(x)b(x)a(y)u(y)}{|x-y|^\lambda} dx dy \right| \\ &\leq C(p, \alpha) \|c\|_\infty \|v\|_\beta \|a\|_\alpha \|u\|_p \\ &\leq C(p, \alpha) \|c\|_\infty \|b\|_\beta \|a\|_\alpha \|v\|_{\beta'} \|u\|_p \end{aligned}$$

だから (1) は示された。

$$(2) \text{ の証明. } D_N \equiv \{x \mid |x| \leq N\} \text{ の定義函数を } \chi_N(x)$$

とある

$$(K_\lambda^{(N, N)} u)(x) \equiv \int_{R^n} \frac{\chi_N(x)b(x)c(x,y)a(y)\chi_N(y)}{|x-y|^\lambda} u(y) dy$$

$$\text{と定める. } \frac{1}{p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha'}, \frac{1}{\alpha^*} = \frac{1}{p} - 1 + \frac{1}{n},$$

$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta'}$ とあると、 p, α は、補題Kの条件を満たすから、 $K_\lambda^{(N, N)}$ は $L^p(D_N)$ から $L^q(D_N)$ への完全連続作用素で

ある。積合核の形から $L^p(R^n)$ から $L^q(R^n)$ への完全連続作用素である。と：3が(1)の言ひから

$$\begin{aligned} \|K_\lambda - K_\lambda^{(N,N)}\| &\leq \|K_\lambda - K_\lambda^{(\infty,N)}\| + \|K_\lambda^{(\infty,N)} - K_\lambda^{(N,N)}\| \\ &\leq C(p, q, \alpha, \beta) \left\{ \|(1-X_N)a\|_\alpha \|b\|_\beta + \|X_N a\|_\alpha \|(1-X_N)b\|_\beta \right\} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

1に達して、 K_λ は完全連続である。(証明終り)

補題Vで $p=q=2$ とおいて次の系を得る。

補題Vの系 $n>\lambda>0$ なる λ につきある T とする

$$(1) \quad \frac{1}{p}, \frac{1}{q} < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 - \frac{\lambda}{n}$$

とある p, q が存在して

$\alpha(x) \in L^p(R^n), \beta(x) \in L^q(R^n)$ $\gamma(x, y)$ は $R^{2n} = \{x=y\}$ の有界連続函数

ならば

$$(K_\lambda f)(x) = \int_{R^n} \frac{\beta(x)\gamma(x, y)\alpha(y)}{|x-y|^\lambda} f(y) dy$$

は

$$\|K_\lambda\|_{L^p(R^n) \rightarrow L^q(R^n)} \leq C(p, q) \| \alpha \|_\infty \cdot \|\beta\|_q \cdot \|\alpha\|_p$$

とある有界作用素である。さらに

$$(2) \quad \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{n} \leq \frac{1}{p'} < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} < 1 - \frac{\lambda}{n}$$

なる p', q' に於て

$$\alpha(x) \in L^{p'}(R^n), \beta(x) \in L^{q'}(R^n)$$

ならば K_λ は $L^2(R^n)$ の完全連続作用素である。

また $\alpha(x) = (1+|x|)^{-a}$ $a > \frac{n}{2}$ にとると、 $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$ ならば p に對して、 $\alpha \in L^p$ である。 $q = q'$ にとると $\alpha \in L^q$ である。上の系で $\beta(x)$ に對する条件を求めてみよ。

$$\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{n} > 0 \quad \text{ならば} \quad \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{n} < \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{n} \leq 0 \quad \text{ならば} \quad \frac{1}{q} < 1 - \frac{\lambda}{n}$$

ならば q に對して、 $\beta(x) \in L^q(R^n)$ である。適当に p と q' を選んで補題 I の系を適用すれば、 $K_\lambda \in L^2(R^n)$ の完全連続作用素にとることができる。したがって

$$\lambda_1 = n-1 \quad \text{のとき} \quad q_1 > n$$

$$\lambda_2 = n-2 \quad \text{のとき} \quad n=3 \text{ ならば } 6 > q_2 > 2$$

$$n > 3 \text{ ならば } q_2 > \frac{n}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{n-1}{2} \quad \text{のとき} \quad 2n > q_3 > 2$$

に、 q_j を選んで $\beta \in L^{q_j}$ とすれば、 K_{λ_j} は完全連続である。この結果を $Q_j^{(R)}(z)$ に適用すると、

$$\beta_0(x) \in L^{q_2} \cap L^{q_3}, \quad \beta_j(x) \in L^{q_1} \cap L^{q_2} \quad (1 \leq j \leq n)$$

ならば、 $Q_j^{(R)}(z)$ は完全連続である。このことは、§1 の条件 (C.2) を示している。他の条件 (K.) が (C.2) のもとで成立つことは見よう。

(K.2) は、補題 5 から

$$\int \frac{\partial}{\partial x_j} R_n(|x-y|, z) a(y) f(y) dy \in L^p \quad (1 > \frac{1}{p} \geq \frac{1}{2}) \text{ が導ける}$$

から、これは局所可積分で、 $(\frac{\partial}{\partial x_j} R_0(z) A f)(x)$ に一致する。

このことから $D(B) \cap R(R_0(z)A)$ から積合作用素 $Q(z)$ が、
 $BR_0(z)A$ と一致する ことがわかる。

積合核の形から、 $Q(z)$ は、 $z = \lambda \pm i0$ ($\lambda > 0$) に対して
 2 自然に定義される。さうして $R_n(r, 0) \equiv \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{(n-2)2\pi^{\frac{n}{2}}} r^{2-n}$
 とおいて、 $z = 0$ にも定義しておく。 $\beta_j(x) \in \mathcal{X}_N(x)$, $\alpha(x) \in \mathcal{X}_N(x)$ により、 $\mathcal{L}$ -作用素を $Q^{(N)}(z)$ とおくと、
 補題 1 の証明と同じく作用素ノルムで $\lim_{N \rightarrow \infty} Q^{(N)}(z) = Q(z)$ となる。
 又この収束は、実軸をのめ Γ -上又は Γ 平面内の有界
 集合と z が動くとき一様である。公式 (H. 1) より、 $\Im_m z_1,$
 $\Im_m z_2 \geq 0$ (又は ≤ 0) とき、 $|z_1|, |z_2|, |r| \leq N$ ならば、
 $|z_1 - z_2| \rightarrow 0$ のとき一様に、

$$R_n(r, z_1) - R_n(r, z_2) = \frac{O(1)}{r^{n-2}}$$

である。このことから、 $Q^{(N)}(z)$ が、 $\Im_m z \geq 0$ (又は ≤ 0) とき
 作用素ノルムで連続であることがわかる。これが、 $Q(z)$ も
 z について連続であり、(K. 5) が成立する。条件 (K. 3) は、
 (K. 5) と同様にしるべきである。

次に、(C. 2), (C. 3) のもとで、(K. 6) が成立することを
 見よう。原点を含む実軸上の任意の開区間を I にとる。

まず $Q_j^{(1)}(z)$ ($0 \leq j \leq n$) が、 $I^{\frac{1}{2}}$ で Lipschitz 連続なことは、
 $\frac{d}{dz} S_{n,j}^{(1)}(x, z)$ が $z \in \Pi_N^{\frac{1}{2}}$ で、有界であることがわかる。

次に、 $Q_j^{(2)}(z)$ が、 $\theta (> \frac{1}{2})$ 次、Hölder 連続なことは、

1-4 (1) $z_1, z_2 \in \pi_N^{\pm}$ に対し、

$$\begin{aligned} & |S_{n,j}^{(2)}(x, z_1) - S_{n,j}^{(2)}(x, z_2)| \\ &= \left| \int_{z_2}^{z_1} \frac{d}{dz} S_{n,j}^{(2)}(x, z) dz \right| \\ &\leq \text{const.} |z_1 - z_2| \cdot r \end{aligned}$$

と評価される。ここで注意しよう。const は、 N に依らず (0) である。定数である。1-4 (2) へ。

$$\frac{|S_{n,j}^{(2)}(x, z_1) - S_{n,j}^{(2)}(x, z_2)|^{\theta}}{r^{\theta}} \leq \text{const} |z_1 - z_2|^{\theta}$$

である。 $\theta = \frac{1}{2} + \varepsilon$, $\lambda_4 = \frac{n}{2} - 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$)

とすると、 $Q_j^{(2)}(z_1) - Q_j^{(2)}(z_2)$ の積分核は、 $z_1, z_2 \in \pi_N^{\pm}$ のとき、

$$\text{const.} |z_1 - z_2|^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \frac{\beta_j(x) \alpha(y)}{|x - y|^{\lambda_4}}$$

と評価される。これから、有界作用素と定義する (2, 補題) の系 (1) には、 $\frac{1+\varepsilon}{n} < \frac{1}{q_4} < \frac{1}{2}$ であり q_4 に對して、 $\beta_j \in L^{q_4}$ である。 (注意) $\varepsilon < \varepsilon > 0$ であるから、結局、

$$n > q_4 > 2$$

である。 $Q_j^{(2)}(z)$ は、 $z \in \pi_N^{\pm}$ 上 $\theta (> \frac{1}{2})$ 次 Hölder 連続に於ける。条件 (C. 2) と (C. 3) は、 $\beta_j(x)$ である。 $\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int \beta_j(x) \right\}^{\frac{1}{2}}$ について、

Kuroda [1] で $n = 3$ のとき、 $\beta_j(x)$ は、そのま

ま、 $n > 3$ にも使える。そこで球面調和函数を n 次元のものにすればよい。

§5. 幾つかの注意

1° (C.1) の充分条件として

(C.1') $b_j, \frac{\partial}{\partial x_j} b_j$ が有界可測、 f が有界可測 ($n \geq 3$)

又は $f \in L_2^{loc} (n=3)$ と得る。これから、任意 $\varepsilon > 0$ と $f \in \mathcal{D}_{L_2}^2$ に對して

$$\|Vf\| \leq C(\varepsilon) \|f\| + \varepsilon \|H_0 f\|$$

が評価される。得られるからである。又この評価から、(R.3)

の負の固有値は有限個にたつ。

2° (C.2) は、 $b_j(x) = \sum_{k=1}^J b_{jk}(x)$, $b_{jk} \in L^{p_{jk}}$ $2n > p_{jk} > n$

であればよいことは、証明の仕方からあきらか。 $f'(x)$ についても同様である。

3° (C.2) で $b_j(x)$, $f'(x)$ の $|x| \rightarrow \infty$ の挙動を次の形で書くと、

$$b_j(x), f'(x) = O(|x|^{-\frac{n+1}{2}-\varepsilon}) \quad \varepsilon > 0$$

とたつ。

4° 正の固有値の有限性については、Mizohata-Mochizuki の $n=3$ のときの結果 ([3]) がある。

5° Ushijima は [6] で、類似の結果を得ているから、7-

リ変換を用いて議論した。そこで、 $\varepsilon = \varepsilon_1$ は

$$(\Delta+1)^{\left\{\frac{n}{2}\right\}+1} (1+|x|) \left\{ \begin{matrix} b_j(x) \\ f(x) \end{matrix} \right\} \in L^2 \cap L^1$$

のそのような高次正則性の仮定が必要であった。

6° Kuroda [7] では、 $b_j(x) \equiv 0$ の場合の結果が、 $n=1, 2$ の場合も含めて詳細に論じられている。 $b_j(x) \equiv 0$ にかゝれば、本稿の結果は、彼のものに含まれている。

私信で、注意 6° を知らせて下さり、又多くの有益な助言を寄せていただいた。黒田成俊博士に、深く感謝する。

文 献

- [1] Kuroda, S. T. 散乱の定常論と固有函数展開 I, II, 数学, vol 18, 74~85, 137~144 (1966).
- [2] Kuroda, S. T. An abstract stationary approach to perturbation of continuous spectra and scattering theory, J. Analyse Math. vol 20, 57~117 (1969)
- [3] Mizohata, S., Mochizuki, K., On the point spectrum of the Schrödinger operator, Proc. J. Acad. vol 39, 661~666 (1963).
- [4] Solov'ev, S. L. On a theorem of functional

analysis (in Russian), Mat. Sbornik, vol 4 (46)
471~497 (1938).

[5] Sobolev, S.L. Applications of functional analysis in mathematical physics, A.M.S. Translation of Math. Mono. vol 7, (1963).

[6] Ushijima, T. On the spectrum of some Hamiltonian operator, Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo vol 16, 127~133 (1966).

[7] Kuroda, S.T. Construction of eigenfunction expansions by the perturbation method and its application to n -dimensional Schrödinger operators, MRC Technical Summary Report #744, Univ. of Wisconsin, (1969).

なお連続スペクトルの擾動に関する基本的な結果は、

Kato, T. Perturbation theory for linear operator, Springer (1966).

の Chapt. X に要約されている。

