

Kac-Moody Lie 代数と theta 函数

京大数理研 大山 陽介
Okuyama, Yousuke

この稿では、Kac-Moody Lie 環とその最高ウェイト表現に関する Kac, Peterson 等の仕事を紹介する。

1. Kac-Moody Lie 環

有限次元の複素半単純 Lie 環は Cartan 行列と 1 対 1 に (同型を除いて) 対応しており、Chevalley 基底を用いて構成できた。Kac-Moody Lie 環は、以下のように、一般化された Cartan 行列を用いて同様のやり方で構成される。

定義 m 次複素正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ は次の条件を満たす時に一般化された Cartan 行列、略して G.C.M. と呼ぶ)

$$i) \quad a_{ii} = 2 \quad 1 \leq i \leq m$$

ii) a_{ij} は非負整数

iii) $a_{ij} = 0 \iff a_{ji} = 0$

$\mathfrak{g}$ を $(n + \text{corank } A)$ 次元複素ベクトル空間として、 $\mathfrak{g}$ とその双対 $\mathfrak{g}^*$ の独立な元の組を次のようにとる

$$\mathfrak{g} \cap \Pi^\vee = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$$

$$\mathfrak{g}^* \cap \Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$$

$$\alpha_i(h_j) = a_{ij}$$

Π を root 基底、 $\Pi^\vee$ を coroot 基底と呼ぶ。——

次に $\mathfrak{g}, \Pi, \Pi^\vee$ を用いて G.C.M. A によって定まる Kac-Moody Lie 環 $\mathfrak{g}(A)$ を構成する。

1) $\mathfrak{g}(A)$ は $\mathfrak{g}, e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_m$ から生成される

2) 生成元は次の関係式のみを満たす

h, h' を $\mathfrak{g}$ の勝手な元として

$$[h, h'] = 0,$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i$$

$$[h, e_i] = \alpha_i(h) e_i$$

$$[h, f_i] = -\alpha_i(h) f_i$$

$$(\operatorname{ad} e_i)^{1-\alpha_{ij}} f_j = (\operatorname{ad} f_i)^{1-\alpha_{ij}} e_j = 0 \quad (i \neq j)$$

Kac-Moody Lie 環 $\mathfrak{g}(A)$ において

$$\mathfrak{n}_+ = \{ e_i \text{ たちにより生成された部分代数} \}$$

$$\mathfrak{n}_- = \{ f_i \quad " \quad \}$$

$$\mathfrak{g}_\alpha(A) = \{ x \in \mathfrak{g}(A) : [h, x] = \alpha(h) \cdot x : \forall h \in \mathfrak{g}^+ \}$$

とおく時

$$\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{n}_+$$

$$= \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{g}^*} \mathfrak{g}_\alpha(A)$$

という vector 空間としての直和分解を得る。このため有限次元半単純 Lie 環同様に、最高ウェイト表現が定まり、指標公式の類似が成立する。これは後半の主題となる。

また、Weyl 群も simple root の reflection から生成されるものとして定義できるが、それは最早有限群ではなく、Weyl chamber の和も Cartan 部分代数全体に一致しない。

本稿ではこれより Kac-Moody Lie 環において、最も重要なクラスである affine タイプに話を限る。

affine タイプの Kac-Moody Lie 環とは、その G.C.M. A の勝ちな真の principal minor がすべて正定値であって、 $\det A = 0$ なる場合をいう。affine タイプの Dynkin 図形は、勝ちな頂点を一つ除くと、有限次元半単純 Lie 環の Dynkin 図形になる。

affine タイプの Lie 環の分類については [3]。

今の場合 $\det A = 0$ 、 $\text{corank } A = 1$ であることから、適当な整 vector δ によって $A\delta = 0$ となる。G.C.M. の定義より、今の場合には δ の成分はすべて正整数に取れる。特に、全成分に共通の因子のないもの（これを以下では δ と書く）が、affine タイプでは重要な役割を示す。

また、一般の Kac-Moody Lie 環には非退化な不変双一次形式は存在しないが、affine Lie 環においては構成可能であり、Killing 形式の代用となる。以下の議論では暗にこの事実が効いている。

"affine" Lie 環の名前は、Weyl 群が affine 変換群の部分群 $\hat{W} \times T$ になることからきている。

2. Affine Lie 環の実現

affine Lie 環は loop 代数の中心拡大としても構成される。(物理の方では、この形の方が普通らしい)
以下では簡単のため、non-twisted タイプ (lie 数が 1) のものに限定する。

$\mathfrak{g}$: 有限次元複素単純 Lie 環, タイプ X_2

(X は A, B, C, D, E, F, G のどれか)

$L(\mathfrak{g}) \equiv \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$: loop 代数

loop 代数のブラケット積 $[\cdot]_0$ は

$$[P \otimes x, Q \otimes y]_0 = PQ \otimes [x, y]$$

$$(P, Q \in \mathbb{C}[t, t^{-1}], x, y \in \mathfrak{g})$$

によって定める。

$L(\mathfrak{g})$ の 2-cocycle ψ を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 (1) を用いて

$$\psi(P \otimes x, Q \otimes y) \equiv \operatorname{Res}_{t=0} \left(\frac{dP}{dt} \cdot Q \right) \cdot (x|y)$$

と定める。

この ψ による 1 次元中心拡大 $\tilde{L}(\mathfrak{g})$ を次のように定義する。

$$\widehat{L}(\mathfrak{g}) \equiv L(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}c$$

$L(\mathfrak{g})$ の bracket 積 $[\cdot, \cdot]$ は

$$[a + \lambda c, b + \mu c] = [a, b]_0 + \psi(a, b)c$$

$$(a, b \in L(\mathfrak{g}); \lambda, \mu \in \mathbb{C})$$

と定める.

この Lie 環 $\widehat{L}(\mathfrak{g})$ に もう一次元加えて

$$\widetilde{L}(\mathfrak{g}) \equiv \widehat{L}(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}d$$

$$\left(\begin{array}{l} [d, c] = 0, \quad [d, P \otimes x] = \pm \frac{dP}{dt} \otimes x \\ \text{と bracket 積を拡張する.} \end{array} \right)$$

としたものが求める Kac-Moody Lie 代数である.

[1] の記号で $X_{\mathfrak{g}}^{(1)}$ と書く.

なお $\widehat{L}(\mathfrak{g})$ は $X_{\mathfrak{g}}^{(1)}$ の derived algebra になる.

3 最高 weight 加群と指標公式

affine Lie 環 $\mathfrak{g}(A)$ -加群 V は 次の条件を満たす時に、最高 weight $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ に関して最高 weight 加群 (h. w. m.) という。

$$\begin{aligned} \exists v \in V \quad & \text{i) } n_+(v) = 0 \\ & \text{ii) } h(v) = \lambda(h) \cdot v \quad \forall h \in \mathfrak{g} \\ & \text{iii) } U(n_-) \cdot v = V \end{aligned}$$

この時、 v を最高 weight vector と呼ぶ。

すべての $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ について λ を最高 weight にもつ既約な h. w. m. $L(\lambda)$ が存在する (同型を除いて一意)

また、 $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ が integral dominant のとき、つまり、
 i) すべての i について $\langle \lambda, h_i \rangle$ が非負整数になる時、 $L(\lambda)$ は局所的に巾零な表現となる。
 (局所的に巾零 $\iff \forall x \in \mathfrak{g}(A), \forall u \in L(\lambda), \exists N$ 自然数 $x^N(u) = 0$)

h. w. m. V は

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{g}^*} V_\lambda \quad ; \quad V_\lambda = \{v \in V : [h, v] = \lambda(h)v\}$$

という直和分解をもち、 $\dim V_\lambda < \infty$ である。

さて affine Lie 環 $\mathfrak{g}(A)$ の h.w.m. の指標

$$\text{ch } L(\Lambda) \equiv \sum_{\lambda \in \mathfrak{g}^+} (\dim V_\lambda) e^\lambda$$

について次の定理が成り立つ

定理 $\Lambda \in \mathfrak{g}^+$ を integral dominant とすると次の指標公式が成立する

$$\text{ch } L(\Lambda) = \frac{\sum_{w \in W} \det(w) e^{w(\rho + \Lambda) - \rho}}{\sum_{w \in W} \det(w) e^{w(\rho) - \rho}}$$

ここで W は $\mathfrak{g}(A)$ の Weyl 群 $\rho \in \mathfrak{g}^+$ はすべての i について $\rho(h_i) = 1$ となる元とする

$\text{ch } L(\Lambda)$ は $\mathfrak{g}$ 上の形式的巾級数であるが実は $\mathfrak{g}$ の領域

$$Y = \{h \in \mathfrak{g} : \text{Re}(\delta(h)) > 0\}$$

において 指標公式の右辺の分子・分母はともに収束する

以下では Y において $\text{ch } L(\Lambda)$ を theta 函数を用いて書き直す

4 theta 函数と指標公式

まず theta 函数を定義する.

$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$: $(l+2)$ 次元実 vector 空間, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

(1) : $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 上の $\text{sign}(l+1)$ の非退化双一次形式

M : $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の rank l の lattice τ

$\alpha, \beta \in M$ かつ $(\alpha|\beta) \in \mathbb{Z}$ $\dots$

$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \cong M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 上 (1) は正定値

δ : $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の isotropic vector τ $(\delta|M) = 0$

$Y = \{ \lambda \in \mathfrak{g} \mid \text{Re}(\delta|\lambda) > 0 \}$

定義 degree m の theta 函数とは、次の性質をみたす Y 上の 正則函数 のことである

$$\text{i) } F(\lambda + u\delta) = F(\lambda) \quad ; \quad u \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

$$\text{ii) } F(\lambda + 2\pi i \alpha) = F(\lambda) \quad \forall \alpha \in M$$

$$\text{iii) } F(t_{\beta}(\lambda)) = F(\lambda) \quad \forall \beta \in M$$

$$\text{::: } t_{\beta}(\lambda) \equiv \lambda + (\lambda|\delta)\beta - \left\{ (\lambda|\beta) + \frac{(\beta|\beta)(\lambda|\delta)}{2} \right\} \delta$$

$$\text{iv) } F(\lambda + a\delta) = e^{ma} F(\lambda) \quad \forall a \in \mathbb{C}$$

degree m の theta 函数をつくる vector 空間を $\tilde{Th}_m$ とかく.

$$\tilde{T}h := \bigoplus_{m \geq 0} \tilde{T}h_m$$

以下では半空間 Y の座標を

$$Y = \{ (z, \tau, u) : z = (z_1, \dots, z_\ell) \in \mathbb{C}^\ell, \operatorname{Im} \tau > 0 \}$$

で表す. ここで $v_1, \dots, v_\ell \in \mathfrak{g}_R$ の正規直交基底.

$$\Lambda_0 \in (\Lambda_0 | \delta) = 1, \quad (\Lambda_0 | M) = 0, \quad (\Lambda_0 | \Lambda_0) = 0 \quad \text{となる}$$

元として

$$Y \ni v = \sum_{k=1}^{\ell} z_k \cdot v_k + \tau \Lambda_0 + u \delta$$

である.

さて, Y 上の Laplacian

$$D = \frac{1}{4\pi^2} \left(2 \partial_u \partial_{\bar{u}} + \sum_{k=1}^{\ell} \partial_{z_k}^2 \right)$$

に対して

$$Th_m = \{ F \in \tilde{T}h_m : D(F) = 0 \} \quad (m > 0)$$

$$Th_0 = \mathbb{C}$$

$$Th = \bigoplus_{m \geq 0} Th_m$$

とする.

Th の $\mathbb{C}$ -基底が次のように取れる.

M^* は $(1)_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}}$ に関する M の dual lattice. $\bar{\lambda}$ で $\lambda \in \mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g} \cap$ の直交射影を表すものとして.

$$P_m = \{ \lambda \in \mathfrak{g} : (\lambda | \delta) = m, \bar{\lambda} \in M^* \}$$

とおくと、次の命題が成立する

命題 $\lambda \in P_m$ に対して theta 函数

$$\begin{aligned} \Theta_\lambda &= e^{-\frac{(\lambda|\lambda)}{2m}} \delta \sum_{\alpha \in M} e^{t_\alpha(M)} \\ &= e^{m\lambda_0} \sum_{\gamma \in M+m^{-1}\bar{\lambda}} e^{-\frac{1}{2}m(\gamma|\gamma)\delta + m\gamma} \end{aligned}$$

を定めると

$$\{ \Theta_\lambda : \lambda \in P_m \pmod{mM + C\delta} \}$$

は Th_m の $\mathbb{C}$ -basis になる.

上で定めた Θ_λ を用いて、次に Jacobi の虚数変換公式を導く.

$SL_2(\mathbb{R})$ の $Y \cap$ の作用を

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (z + \tau \Lambda_0 + u \delta) \\ &= \frac{z}{c\tau + d} + \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \Lambda_0 + \left(u + \frac{c(z|z)}{2(c\tau + d)} \right) \delta \end{aligned}$$

と定めると、 $\lambda \in P_m$ に対して

$$\begin{aligned} & \Theta_\lambda \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot (z + \tau \Lambda_0 + u \delta) \right) \\ &= (-i\tau)^{\frac{l}{2}} \times |M^* / {}_m M|^{-\frac{1}{2}} \\ & \quad \times \sum_{\mu \in P_m \bmod (mM + \mathbb{C}\delta)} e^{-\frac{2\pi i}{m} (\bar{\lambda} | \bar{\mu})} \Theta_\mu \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\{ \Theta_\lambda \mid \lambda \in P_m \bmod (mM + \mathbb{C}\delta) \}$ を basis にとれば、 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ による変換は unitary である。実は $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ による変換も unitary となるので、 $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用は $\tilde{T}h_m$ 上 unitary となる。

最後に、この theta 関数を用いて指標公式を書き直す。

affine Lie 環の Weyl 群は古典 Weyl 群 $\hat{W}$ と $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ のある lattice M のなす群との半直積 $\hat{W} \ltimes T$ となる。 $\alpha \in M$ の $\mathfrak{g}$ への作用は前に定義したとおり。

と一致する. このことから

$$\begin{aligned}
 & \sum_{w \in W} \det(w) e^{w(p+\lambda)-p} \\
 &= e^{-p} \sum_{w \in \tilde{W}} \det(w) \sum_{\alpha \in M} e^{t_{\alpha}(w(p+\lambda))} \\
 &= e^{-p + \frac{|p+\lambda|^2}{2(g+m)}} \delta \sum_{w \in \tilde{W}} \det(w) \Theta_{w(p+\lambda)}.
 \end{aligned}$$

$$(m = (\lambda|\delta), \quad g = (p|\delta))$$

$$s_{\lambda} = \frac{|p+\lambda|^2}{2(g+m)} - \frac{|p|^2}{2g}$$

と置いて

$$e^{-s_{\lambda}\delta} \operatorname{ch} L(\lambda) = \frac{\sum_{w \in W} \det(w) \Theta_{w(\lambda+p)}}{\sum_{w \in \tilde{W}} \det(w) \Theta_{w(p)}}$$

を得る.

文 献

- [1] Kac, V. Infinite dimensional Lie algebra (Birkhäuser, 1983)
- [2] Kac - Peterson Infinite dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms (Adv. Math. 53 (125~264)'84)

Kac-Moody Lie 環全体については [1] を参照されたい。本稿は主に [2] によった。