

3 角形分割と凸多面体

東京大学理学系研究科情報科学専攻
中央大学理工学部情報工学科

今井浩 (Hiroshi Imai)
今井桂子 (Keiko Imai)

1 3 角形分割

凸多面体と3角形分割は、組合せ論の中でも有数の離散構造であり、またこれら2つの間には密接な関係がある。本稿では、この関係について既存の結果についてまとめる。特に、最適化の観点からの立場を中心にすえ、それによって可能になる3角形分割の列挙などのアルゴリズム的成果や、最小辺長3角形分割などの実際的应用との関連について述べていく。具体的には、

- 平面3角形分割列挙、一般次元正則3角形分割列挙
- 辺長最小平面3角形分割問題の計算複雑度
- 一般次元3角形分割の2次凸多面体、普遍凸多面体、特性凸多面体の構造・関係

について述べる。

この節の後残りでは、以下の議論の中で必要となる事柄を準備としてまとめる。

1.1 3 角形分割の定義

点集合の3角形分割 (triangulation) とは、2次元においてはその凸包を2-単体すなわち3角形に、3次元では3-単体すなわち4面体に分割することである。一般の次元の場合は単体分割 (simplicial decomposition) あるいは簡単に**3角形分割** (triangulation) といわれる。本稿では、3次元以上でも単体をその次元での3角形と呼び、単体分割を3角形分割と呼んでいく。

厳密に3角形分割を定義すると次のようになる。 $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ を d 次元の n 点からなる集合とする。 $\text{conv}(S)$ を S の凸包とする。 $\text{conv}(S)$ の3角形分割 $\Delta = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ とは、それぞれの S_i ($i = 1, 2, \dots, m$) が S の部分集合であり、 Δ は次の条件を満たす。

1. $\dim \text{conv}(S_i) = d$, $|S_i| = d + 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$)
2. $\bigcup_{i=1}^m \text{conv}(S_i) = \text{conv}(S)$
3. $i \neq j$ に対して、 $\text{conv}(S_i) \cap \text{conv}(S_j)$ は空かまたは $\text{conv}(S_i)$ と $\text{conv}(S_j)$ の両方によって共有されている面である。

ここでいう面とは次のようなものである。 S_i の頂点の集合を $S_i = \{p_{i,1}, p_{i,2}, \dots, p_{i,d+1}\}$ とし、 d 次元単体 S_i を $|p_{i,1}p_{i,2} \dots p_{i,d+1}|$ と書くこともある。この S_i から $q + 1$ 個の頂点を選び、 $|p_{i,j_1}, p_{i,j_2}, \dots, p_{i,j_{q+1}}|$ を作ると q 次元単体となる。このような単体を S_i の面 (face) という。ここで、 $\bigcup_{i=1}^m S_i \subseteq S$ であり、等号が成り立つとは限らない。つまり、与えられた点を3角形分割にすべて使っているとは限らないことを注意しておく。

1.2 凸多面体と最適化

凸多面体は、様々な側面をもった構造で、点 (0 次元面)、辺 (1 次元面)、ファセット ($d-1$ 次元面) などに着目したときの離散的な側面と、線形不等式系で定められた型とかで考える場合の連続的な側面との両方をもつ。このことなどから、色々な構造を凸多面体を通して理解することができる (たとえば Gelfand, Kapranov, Zelevinski [7], Grötschel, Lovasz, Schrijver [9], 日比 [11] など)。

ここではそのような凸多面体について、最適化との関連を中心にまとめる。なお、アルゴリズム・プログラムの点では、たとえば代表的凸包構成アルゴリズムなどについて書いてあるものに Edelsbrunner [5] があり、逆探索法による凸包ファセット列挙・凸多面体端点列挙について書かれてあるものに Avis, 今井, 松永 [1] がある。関連した幾何アルゴリズムの割と新しい話題については、[12] が詳しい。実際に公開されて使えるプログラムも多い。

凸多面体が最適化と深く関係する代表的な例が線形計画法である。これは線形等式・不等式系で与えられた凸多面体上で線形関数を最小化する問題として次のように定式化される。

$$\min\{c^T x \mid x \in P\}$$

ここで、 P は線形不等式系で与えられる凸多面体

$$P = \{x \mid Ax \geq b\}$$

で、 $c, x \in \mathbf{R}^d$, $b \in \mathbf{R}^m$, $A \in \mathbf{R}^{m \times d}$ である。この線形計画法を解く代表的手法として、単体法 (simplex method) がある。そのアルゴリズムの詳細は専門書に譲るとして (たとえば伊理 [13])、ここでは単体法が基とする凸多面体の性質を 2,3 上げておく。まず、簡単のため P が有界であるとする、この問題の最小解の中で端点であるものが存在する。すなわち、

定理 1: P が有界のとき、線形計画問題の最小解は必ず存在し、しかも端点で最小解となっているものが存在する。

凸多面体の端点の数は有限なので、これで少なくとも端点を列挙すれば線形計画問題が解けることがわかる。しかし、上限定理から、凸多面体 P の端点の数は最悪次元、制約式の数について指数オーダーであることがわかっているから、全ての端点を列挙することは大規模問題では現実的でない。

そこで、単体法では次の性質に着目する。まず、凸多面体の端点と辺 (1 次元面) で構成されるグラフ構造 (端点、辺がグラフの点、枝となる) を凸多面体グラフと呼ぶことにする。凸多面体の端点の間にその点 x と c との内積 $c^T x$ を考え、凸多面体グラフで各枝を両端点のその内積の値が大きい方から小さい方へと向きをつける。両端点の値が同じ枝は、そのまま向きづけられない。このとき、次の定理が成り立つ。

定理 2: 凸多面体グラフでは、最適解でない端点からは必ず出ていく枝があり、出ていく枝のない端点是最適解の端点である。また、有向閉路は存在しない。

このことから、任意の端点から始めて、 $c^T x$ の大きさに従って向きづけられた有向枝を向きに従ってたどっていき、出ていく枝がない端点までたどりついたら最適解が求まっている。有界な凸多面体の凸多面体グラフでは、必ずこれで最適解にたどりつける。単体法では凸多面体グラフの有向枝を線形不等式系からピボッティングの操作でたどる (このとき、端点で $d+1$ 個以上の制約の超平面が交わっていると、複雑になる)。複数の最適解が存在する場合、出ていく枝のない端点は複数個あることになる。

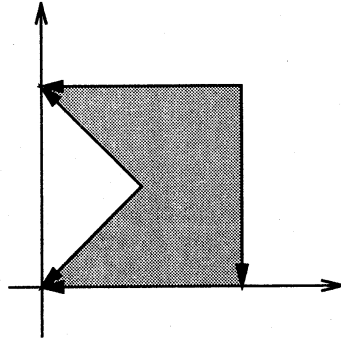


図 1: 非凸多面体での多面体グラフでの辞書式順向きづけが複数の根をもつ例

凸多面体の端点をその座標の辞書式順序によって大小関係を定めた場合は、端点が全て異なることから、凸多面体の各枝をその端点の大きい方から小さい方へ向きづけることができる。従って、次の定理が成り立つ。

定理 3: 端点間の辞書式順序で凸多面体の辺を向きづけると、端点とその向きづけられた辺で構成される有向グラフは、唯一の根 (出ていく枝のない点) をもつ無閉路有向グラフとなる。

辞書式順序最小の端点を求める問題が、 c として辞書式順序に対応した適当なものを選んだ場合の線形計画問題であることは容易にわかる。ちなみに、上の性質は凸でないと成り立たない。たとえば簡単な例を図 1 に示す。

また、凸多面体の端点・辺を特徴づける性質を支持超平面のことばでまとめると、次の定理のようになる。

定理 4: (i) 凸多面体 P の点が端点であるための必要十分条件は、それ点のみを含む超平面で P を支持する (P を片側閉半空間に含む) ものが存在することである。

(ii) 凸多面体 P の端点とその辺で結ばれているための必要十分条件は、それ 2 点と辺のみを含む超平面で P を支持するものが存在することである。

1.3 独立点集合凸多面体

3.3 節でグラフの独立点集合凸多面体と 3 角形分割に関する凸多面体の関係を述べるので、この節ではグラフの独立点集合凸多面体についてまとめておく。

点集合 V 、枝集合 E のグラフ $G = (V, E)$ を考える。このとき、点部分集合 $S \subseteq V$ が独立点集合 (independent vertex set, 安定集合 (stable set) ともいう) であるとは、その中の 2 点を結ぶ枝がないことをいう。最大独立点集合とは、集合の大きさについて最大の独立点集合である。極大独立点集合とは、集合の包含関係について極大な独立点集合である。各点に重みが与えられたときの点部分集合の重みは、その集合に含まれる点の重みの和として定義される。このとき、最大重み独立点集合とは、最大重みを持つ独立点集合のことである。

計算量理論の観点からは、一般のグラフの最大独立点集合・最大重み独立点集合を求める問題は NP 困難であることが示されており、おそらくこの問題を解く多項式時間アルゴリズムはないであろうと思われる (Garey, Johnson [6])。

一方で、この難しい問題をなんとか解くためにも、この問題の構造を明らかにすることを目指して、独立点集合と凸多面体との関係がかなり明らかにされている。点集合 V 上の部分集合 S の特性ベクトル $\chi_S \in \mathbf{R}^V$ を、

$$\chi_S(v) = \begin{cases} 1 & v \in S \\ 0 & v \notin S \end{cases}$$

で定義する。独立点集合の特性ベクトル全体の集合の凸包を、独立点集合凸多面体 $P_I(G)$ と呼ぶ。この凸多面体を考えることにより、独立点集合の間に隣接関係などの構造を導入することができる。

独立点集合凸多面体が与えられれば、最大(重み)独立点集合を求める問題はその重みベクトルを $\mathbf{c}$ とする線形計画問題となる。線形計画法を適用するにはその凸多面体の線形等式・不等式系としての記述が必要であり、特に単体法を適用するには、1次元面の辺による端点間の隣接関係がわかればよい。

この凸多面体を必ず含む凸多面体で、線形不等式系での記述を容易に考えることができるものがある。点部分集合 $S \subseteq V$ がクリーク (clique) であるとは、その中のどの2点についてもそれらを結ぶ枝があることをいう。グラフ $G = (V, E)$ の極大なクリークを全て考え、それと点集合との接続行列 H を考える。すなわち、 H の行集合は極大クリーク全体に対応し、列集合は V に対応する。そして、 h_{ij} は点 $j \in V$ が極大クリーク i に含まれているときに1、そうでないとき0の値をとる。この H に対して、凸多面体 $P_C(G)$ を

$$P_C(G) = \{ \mathbf{x} \mid H\mathbf{x} \leq \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

により定義する。ここで、 $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$ はそれぞれ要素が全て1, 0のベクトルを表す。このとき、次の定理が成り立つ。

定理 5: $P_I(G) \subseteq P_C(G)$.

この $P_I(G)$ はかなりよく独立点集合凸多面体を近似しているように思える。たとえば、3点からなる完全グラフ $K_3 (= C_3)$ の場合には、

$$P_I(K_3) = P_C(K_3) = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \mid x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0 \}$$

と等号が成り立つ。しかし、5点の閉路グラフ C_5 (5点を円状に結んで長さ5の閉路・5本の枝からなるグラフ) の場合には、

$$\frac{1}{2} \cdot \mathbf{1} \notin P_I(C_5), \quad \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1} \in P_C(C_5)$$

であるので、真の包含関係が成立する。等号が成り立つ条件としては、次の定理が知られている(たとえば [4, 8, 9] 参照)。

定理 6: $P_I(G) = P_C(G)$ であるための必要十分条件は、グラフ G の任意の点部分集合 $S \subseteq V$ に関する誘導部分グラフに対して、最大クリークの大きさと最小カラー数が等しいことである(このときグラフ G はパーフェクト (perfect) であると呼ばれる)。

ここで、最小カラー数とは彩色数 (chromatic number) のことで、枝で隣接する2点は違う色で塗るようにグラフの点を塗るときに必要な色の数の最小数である。さらに、アルゴリズム的側面については、次の定理が知られている(たとえば [9] 参照)。

定理 7: グラフ G がパーフェクトなら、その最大重み独立点集合は多項式時間で求めることができる。

この定理が示された当時は、線形計画問題に対する多項式時間アルゴリズムとして楕円体法しかなかったので、定理は楕円体法を用いて証明されている。このように凸多面体としての記述がわかると、線形計画法の各手法を適用してアルゴリズム的な成果を得ることができる。近年で

は、線形計画問題に対する多項式時間アルゴリズムとして実用的にも大規模問題に対して効果的な内点法が開発されており、さらに2次計画問題・半定値計画問題に拡張することが行なわれており、現在ではこの定理が実際にも役に立つ状態になっている。

グラフがパーフェクトである場合は多項式時間アルゴリズムが存在するが、そうでない一般の場合は上述したように計算量理論的には多項式時間アルゴリズムは存在しないと思われる。ただ、一般の場合でも端点の隣接関係については特徴づけされていて、次の定理が知られている[4, 10].

定理 8: $P_I(G)$ で独立点集合 $S_1, S_2 \subseteq V$ に対応する2端点が辺で隣接しているための必要十分条件は、 S_1 と S_2 の対称差 (一方に入っているが他方には入っていない要素の集合) の点誘導部分グラフが連結であることである。

2 平面3角形分割

以下で出てくる Delaunay 3 角形分割、正則 3 角形分割は、 d 次元の点集合に対して $d+1$ 次元目の方向を考え、その方向に各点をそれぞれの高さの分だけもち上げ、そのもち上げた $d+1$ 次元での点集合の凸包の下側境界をもとの d 次元に戻したものと定義される。たとえば、どの3点も同一直線上になく、どの4点も同一円周上にならないような平面上の n 点 $p_i = (x_i, y_i)$ の Delaunay 3 角形分割は、各点 (x_i, y_i) を z 方向に $x_i^2 + y_i^2$ もち上げ、3次元空間の n 点 $(x_i, y_i, x_i^2 + y_i^2)$ の凸包の z 方向下側境界をもとの (x, y) 平面に射影することにより得られる。Delaunay 3 角形分割は与えられた点をすべて使うような3角形分割である。図2に Delaunay 3 角形分割と、その双対図形である Voronoi 図 (勢力圏図) を示す。

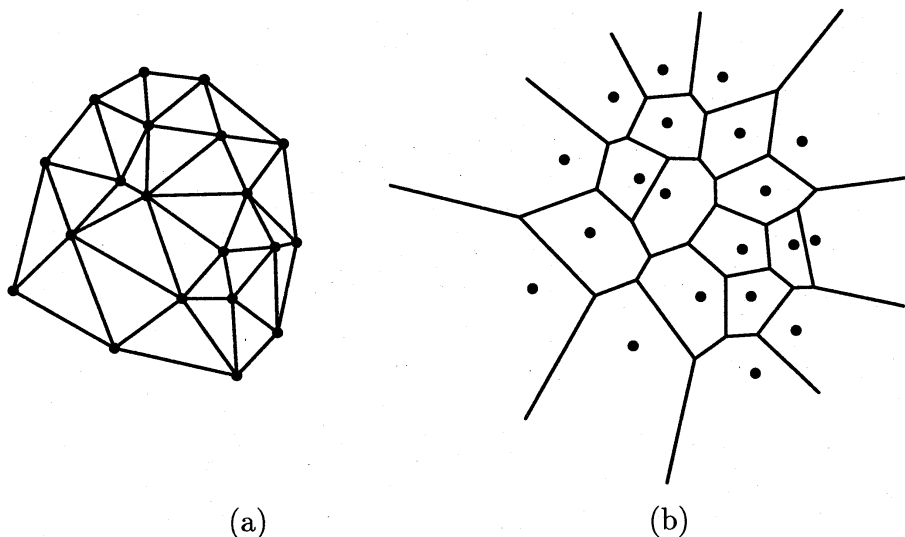


図 2: (a) Delaunay 3 角形分割, (b) Voronoi 図

2.1 Delaunay 3 角形分割と平面 3 角形分割の列挙

平面の n 点 (同一直線上に3点, 同一円周上に4点ないとする) の全点を用いた3角形分割に対しては、その中の凸4角形の対角線を交換する対角変形 (図3参照) という操作で次々と3角形分割を変形していくことができる。同図において、これを4点に対する3角形分割とみなすと、(a) が Delaunay 3 角形分割 (3角形分割でそれぞれの3角形の外接円が他のもう1点を含まない)

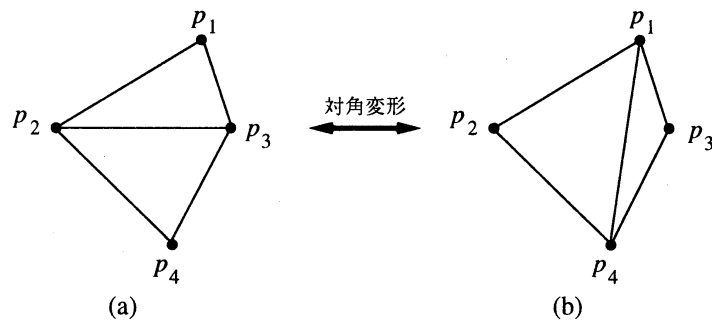


図 3: 対角変形

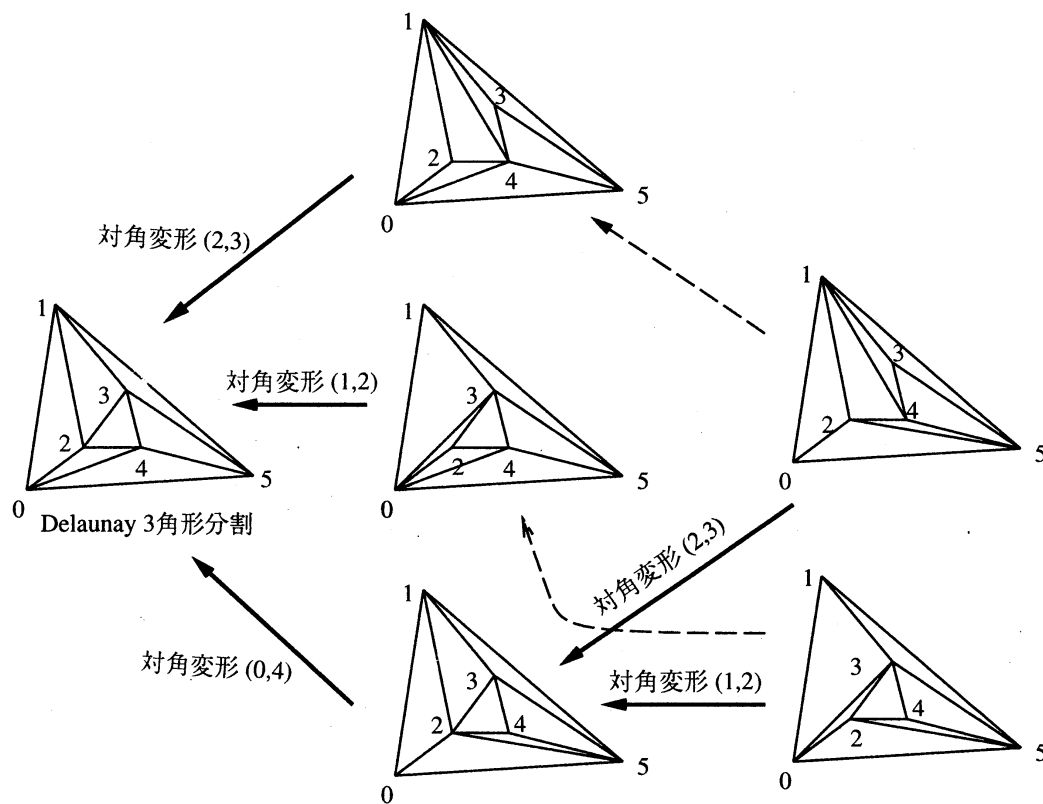


図 4: 6 点の 3 角形分割 6 つの隣接図

になっている．そこで，着目している凸 4 角形で，Delaunay 3 角形分割でない方から Delaunay 3 角形分割の方への対角変形を，Delaunay 変形と呼ぶ．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 9: この n 点の任意の 3 角形分割から始めて Delaunay 変形が可能なら適用していくことを繰り返すと，必ず $O(n^2)$ 回の変形で Delaunay 3 角形分割が得られる．

この定理自身，Delaunay 3 角形分割を計算する 1 つのアルゴリズムを与えている．効率のよいアルゴリズムについては，[5, 12] 参照．この定理より，対角変形を隣接関係として 3 角形分割全体の隣接グラフを図 4 のように考えると，全体が連結になり，しかもその直径が $O(n^2)$ であること（すなわち，対角変形により，全ての 3 角形分割が $O(n^2)$ の変形でいきあえること）がわか

る。さらに定理より、Delaunay 変形に対応した向きを考えると、この隣接グラフは Delaunay 3 角形分割の根を 1 つもつ無閉路有向グラフとなる。

このように 1 つの根をもつ無閉路有向グラフで、根以外の各点でその点から出る枝の内の 1 つを選ぶ規則を定めると、選ばれた枝からなる根付き木が構成される (図 4 では太線)。この木においては、各点での隣接点が生成でき、しかもバックトラックするときにその規則を使うことにより深さ優先探索で探索することができ、しかも注目すべきことは全ての操作がその場所での局所的な情報のみで行なえるということである。このように隣接関係の満たす条件を使って、局所的な操作だけで全域的な情報を重複なく列挙を行なうことができる。また、この操作は高度の並列性をもっている。このように、平面上に与えられた全点を使う 3 角形分割を列挙することができることが分かった。

ここで用いた手法は逆探索と呼ばれ、他にも凸包・超平面アレンジメント構成などに対しても適用されている [1]。逆探索は凸多面体構造と密接に関係している。

2.2 辺長和最小 3 角形分割

平面上の n 点、特に n 角形の内部の 3 角形分割で、使った辺の長さの総和を最小にする問題を考える。まず最初に、凸多角形の場合について述べる。

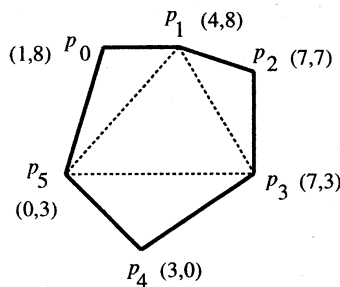


図 5: 辺長和最小の 3 角形分割を求める動的計画法

n 頂点からなる凸多角形の内部は、一般に $(n-2)$ 個の 3 角形に分割できる。このように多角形の内部だけに限ると、多角形の周の順に頂点が並べられていることから、ばらばらの点集合の 3 角形分割では解くのが難しかった 3 角形分割に関する最適化問題が動的計画法 (dynamic programming) などを用いて簡単に解けるようになる場合がある。

以下では、 n 頂点のどの 3 点も同一直線上にはないような凸多角形を考え、多角形の辺長和最小の 3 角形分割を求める方法を示す。今、凸多角形の端点は時計回り順に $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ と与えられているとする。以下、点の添字は n を法としてで考える。多角形 $T_{i,s}$ を、その端点の時計回りのリストが $p_i, p_{i+1}, \dots, p_{i+s-1}$ である多角形と定める。そして、 $t_{i,s}$ を多角形 $T_{i,s}$ の辺長和最小の 3 角形分割の内部にある辺の辺長の総和と定める。

このとき、多角形 $T_{i,s}$ の任意の 3 角形分割で $p_i p_{i+s-1}$ を 1 辺とする 3 角形が含まれているとしてよい。多角形 $T_{i,s}$ において 3 角形 $|p_i p_{i+s-1} p_j|$ ($i+1 \leq j \leq i+s-2$) を考えると、 $T_{i,s}$ は

- $j = i+1$ のときは、この 3 角形と多角形 $T_{i+1,s-1}$ に分割、
- $j = i+s-2$ のときにはこの 3 角形と多角形 $T_{i,s-1}$ に分割、
- $i+1 < j < i+s-2$ のときにはこの 3 角形と 2 つの多角形 $T_{i,j-i+1}, T_{j,s-j+1}$ に分割、

表 1: 動的計画法の計算例

$s \setminus i$	0	1	2	3	4	5
4	(13) $\sqrt{34}$	(13) $\sqrt{34}$	(35) 7	(35) 7	(15) $\sqrt{41}$	(02) $\sqrt{37}$
5	(03) (13) $\sqrt{61} + \sqrt{34}$	(13) (35) $\sqrt{34} + 7$	(03) (35) $\sqrt{61} + 7$	(35) (15) $7 + \sqrt{41}$	(52) (02) $\sqrt{65} + \sqrt{37}$	(15) (13) $\sqrt{41} + \sqrt{34}$
6	(15) (13) (35) $\sqrt{41} + \sqrt{34} + 7$	—	—	—	—	—

のようにそれぞれ分割される．すると，動的計画法の方程式として，

$$t_{i,s} = \min \left\{ \begin{aligned} & d(p_{i+1}, p_{i+s-1}) + t_{i+1, s-1}, \\ & d(p_i, p_{i+s-2}) + t_{i, s-1}, \\ & d(p_i, p_j) + d(p_{i+s-1}, p_j) + t_{i, j-i+1} + t_{j, s-j+i} \quad (i+1 < j < i+s-2) \end{aligned} \right\}$$

が成り立つ．あとは， $s = 4, 5, \dots$ の各 s に対して， $t_{i,s}$ ($i = 0, \dots, n-1$) を計算し，以前に計算したものを表で覚えておくことにより求めるべき $t_{0,n}$ を計算できる．表から実際の 3 角形分割を求めることも容易である．

具体例を図 5 と表 1 に示す．図 5 では各点の座標も示しており，その座標を用いて計算している．表 1 において上の段は使用する辺を，下の数字がその辺の長さを表している．例えば， $s = 4, i = 0$ の場合には，(13) は 1 と 3 を結ぶ辺を用い，その長さは $\sqrt{34}$ であることを示している．また，最終行の — は左の欄に値が等しいことを表している．

このアルゴリズムの計算時間は $O(n^3)$ で， $O(n^2)$ の領域を必要とする．これをまとめて，次の定理を得る．

定理 10: n 凸多角形の辺長和最小の 3 角形分割は， $O(n^3)$ 時間， $O(n^2)$ 領域で求めることができる．

これは，最小個数の 3 角形への分割とか，最小角最大なり最大角最小なりの分割とかを求める問題についても，同様に成り立つ．また，凸でない多角形の 3 角形分割については，内部の対角辺のみ使うように少し動的計画法を修正するだけで，次の定理を得ることができる．

定理 11: n 凸多角形の 3 角形分割の総数は， $O(n^3)$ 時間， $O(n^2)$ 記憶領域で求めることができる．

以上では多角形内部の辺長最小 3 角形分割が多項式時間で解けることを述べたが，平面上の一般の点集合に対して，その辺長最小 3 角形分割の問題の計算複雑度はまだわかっていない．実際，この問題は計算複雑度に関する著名な本 [6] の中で 12 個上げられている計算量クラスが明確にわかっていない問題の最後の問題として与えられている．同時に上げられている線形計画問題については，上述のように (弱) 多項式時間アルゴリズムが与えられ，前向きに解決されており，また他の問題も計算量理論から実際のアルゴリズムまで色々な影響を与えている問題でもある．この一般の平面点集合の辺長最小 3 角形分割は，数値計算やグラフィックスでのメッシュ生成とも関連して色々な研究がなされているが，このように未解決なまま残っている．このあたりの話題については，[2] が詳しい．

3 一般次元 3 角形分割

3.1 2 次凸多面体

平面の点集合の 3 角形分割の場合には対角変形によって任意の 3 角形分割の間でいきいきでき、それを利用して逆探索により全ての 3 角形分割を列挙することができた。多次元の場合には、対角変形そのものは一般化できるものの、全体がそれによって行き来し合えるかどうかはわかっていない。一方、3 角形分割を正則なものに限ると、凸多面体で特徴づけられるよい性質を満たすことから、逆探索を適用することができる [14]。以下、この節では正則 3 角形分割とそれに付随する 2 次凸多面体について述べる。

正則 3 角形分割 (regular triangulation; [7] では coherent と呼ばれている) は、Delaunay 3 角形分割では持ち上げる量が点の座標により決まっていたのに対して、そこを任意の高さにして得られる 3 角形分割である。したがって、内点でもち上げ過ぎた点は使われない 3 角形分割が出てくる。厳密には、 d 次元空間の n 点 $p_1, \dots, p_n$ に対して、各点 p_i を $d+1$ 次元方向に h_i もちあげ、そのもち上げた n 点の凸包の $d+1$ 次元方向に関する下側境界をもとの d 次元に射影して得られる 3 角形分割を、正則であるという。図 6 に $d=2$ の例を示す。

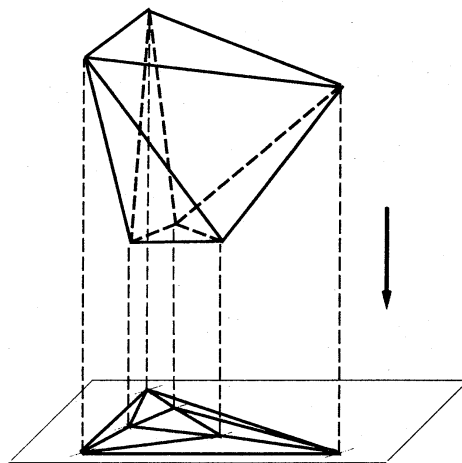


図 6: 2 次元 6 点の正則 3 角形分割

d 次元空間の n 点 $p_1, \dots, p_n$ の 3 角形分割 Δ (内点で使わないものがあるとしてもよい) に対して、点 p_i を端点とする 3 角形の体積の総和を $\text{vol}(p_i)$ で表し、この 3 角形分割に点数の次元のベクトル $\text{vol}(\Delta) = (\text{vol}(p_1), \dots, \text{vol}(p_n))$ を対応させる。このベクトルを 3 角形分割の体積ベクトルと呼ぶ。全ての 3 角形分割に対するこれらのベクトルの凸包を **2 次凸多面体** (secondary polytope) と呼ぶ。

簡単な例で具体的な 2 次凸多面体を計算してみると、次のようになる。図 7(a) で与えられるような平面上の 5 点からなる集合を考える。これらの点の 3 角形分割は図 7(b) に示した 5 つであり、 $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (1, 0)$, $p_3 = (2, 1)$, $p_4 = (1, 2)$, $p_5 = (0, 1)$ である。底辺と高さが 1 であるような 3 角形の体積を 1 とすると、3 角形分割 1 において $|p_1 p_2 p_3|$ と $|p_1 p_4 p_5|$ の体積は 1 であり、 $|p_1 p_3 p_4|$ の体積は 3 である。頂点 p_1 はこれらの 3 つの 3 角形の端点となっているから、 p_1 の成分はこれらの体積の総和となり、 $\text{vol}(p_1) = 5$ である。他の点 p_i に対しても同様に計算すると、各 3 角形分割に対応するベクトルは、次のようになる。

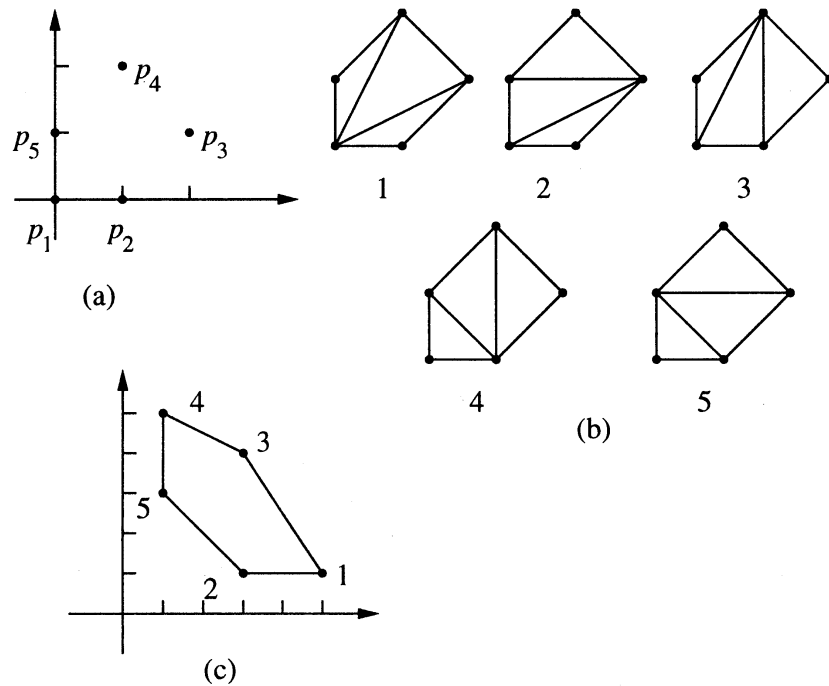


図 7: 凸 5 角形の 3 角形分割と 2 次凸多面体

	$\text{vol}(p_1)$	$\text{vol}(p_2)$	$\text{vol}(p_3)$	$\text{vol}(p_4)$	$\text{vol}(p_5)$	
(	5	1	4	4	1	)
(	3	1	5	2	4	)
(	3	4	2	5	1	)
(	1	5	2	4	3	)
(	1	3	4	2	5	)

これらの点の凸包は 2 次元なので、最初の 2 つの座標をとって平面に書いてみると、図 7(c) のようになる。この 2 次凸多面体については、次の定理が成り立つ (たとえば [7] 参照)。

定理 12: 2 次凸多面体の端点は、正則 3 角形分割と 1 対 1 に対応する。

この定理の説明をしよう。正則 3 角形分割に対応する点が 2 次凸多面体の端点になっていることをいうには、定理 4(i) のような支持超平面の存在をいえばよい。元々、正則 3 角形分割は d 次元の点 p_i を $d+1$ 次元方向に h_i ($i = 1, \dots, n$) もち上げた点 p'_i の凸包の下側境界の射影として定義されたものであった。全ての 3 角形分割の体積ベクトルは n 次元ベクトルであり、2 次凸多面体はその凸包と定義されていた。そこで、この空間で法線方向が $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ であるような超平面を考え、2 次凸多面体の点 $\mathbf{x}$ で $\mathbf{h} \cdot \mathbf{x}$ を最小にするものに着目する。ここで $\mathbf{h} \cdot \mathbf{x}$ は 2 つの横ベクトル $\mathbf{h}$ と $\mathbf{x}$ の内積を表すものとする。

任意の 3 角形分割 Δ に対して、それをもちあげて点 p'_i (p_i を h_i だけもち上げた点) を補間する区分的線形関数 $g_\Delta(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in D \equiv \text{conv}(\{p_1, \dots, p_n\})$) を構成できる。このとき、 v_i を h_i もち上げることにより得られる正則 3 角形分割を Δ^* とすると、凸包の下側境界の性質とまた得られているのが 3 角形分割であることから

$$\int_D g_{\Delta^*}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \int_D g_\Delta(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

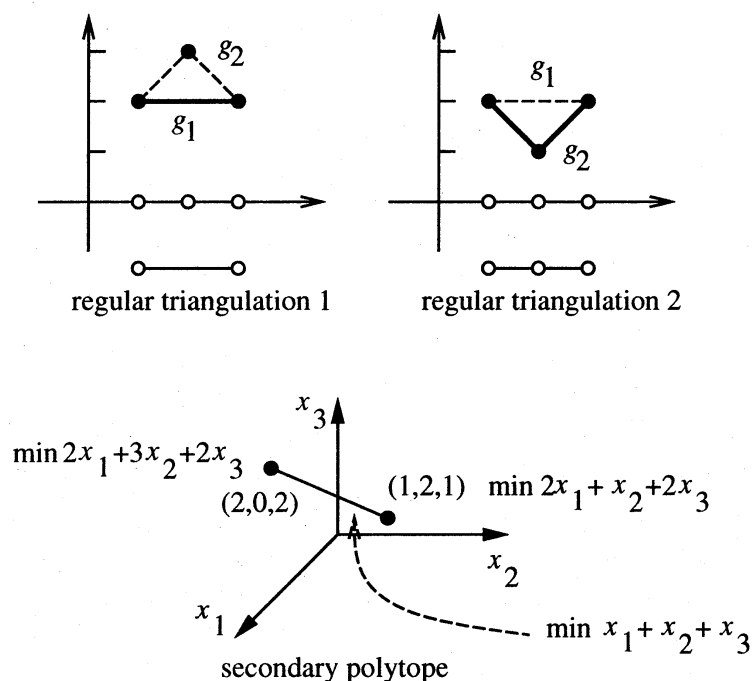


図 8: 1次元3点の正則3角形分割

が任意の3角形分割 Δ に対して成り立つ。これは区分的線形関数の積分であることに着目すると、

$$\mathbf{h} \cdot \text{vol}(\Delta^*) = \int_D g_{\Delta^*}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \int_D g_{\Delta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{h} \cdot \text{vol}(\Delta)$$

が成り立ち、 $\mathbf{h} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{h} \cdot \text{vol}(\Delta^*)$ が定理 4(i) の条件を満たす支持超平面であることがわかり、従ってこの正則3角形分割 Δ^* に対応する点が2次凸多面体の端点であることがわかる。

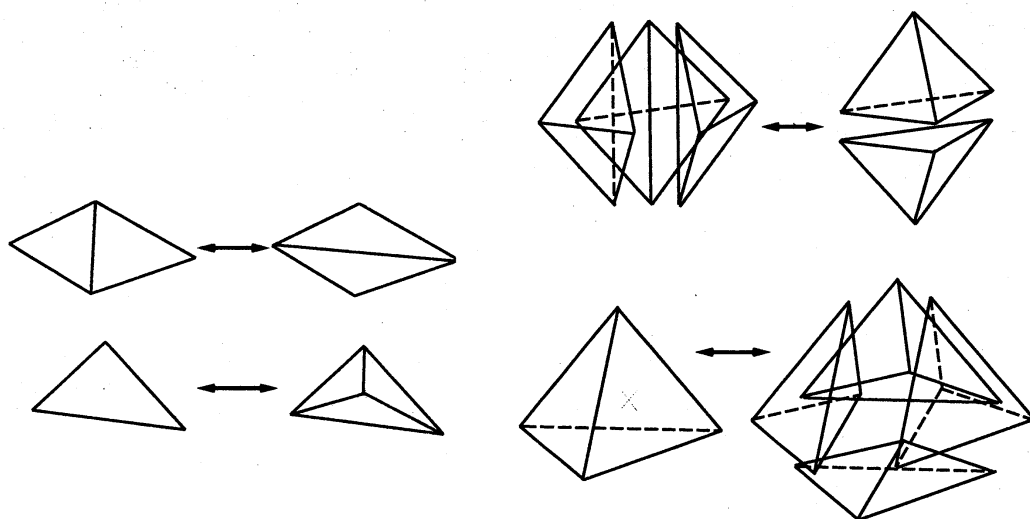


図 9: 一般化された対角変形 (2,3次元の場合)

このことを最も簡単な例で見ると、1次元上の3点の正則3角形分割は2つあり、それぞれを実現するもち上げベクトルに対して2次凸包での最適化を考えると、図8のようになる。

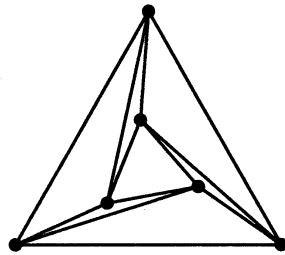


図 10: 非正則 3 三角形分割

さらに、同様の議論で定理 4(ii) の条件を考察すると、2 次凸多面体での辺による端点間の隣接関係が、平面の Delaunay 3 三角形分割の項で述べた対角変形の一般化に対応していることがわかる。図 8 の場合には、3 点をもち上げたときそれらが 1 直線上になるようなもち上げベクトルに関する最適解が辺で達成されている。図 9 に一般化された対角変形を示す。

図 7(c) において、辺で結ばれている 2 端点に対応する 2 つの 3 三角形分割が、一般化された対角変形で行き来できるものになっている。凸 5 角形の頂点集合の場合は、すべての 3 三角形分割が正則であるので、5 つの 3 三角形分割が 2 次凸多面体の 5 つの頂点に対応している。正則な 3 三角形分割に限ると、それらの間には上の定義で出てきている 2 次凸多面体という凸多面体構造が存在し、しかも辺で結ばれている端点が一般化対角変形に対応しているということから、平面の 3 三角形分割の場合と同じように逆探索が適用することができる [14]。

定理 3, 12 より、後は端点の間の隣接関係を求めることができれば、平面の場合と同じようにして逆探索により全ての正則 3 三角形分割を列挙することができる。

なお、正則でない 3 三角形分割も存在する。たとえば、図 10 の 3 三角形分割は正則でない。この 3 三角形分割に対応する体積ベクトルは 2 次凸多面体の内部にある。

3.2 普遍凸多面体

Billera, Filliman, Sturmfels は [3] において、任意の 3 三角形分割にその頂点に対応しているような凸多面体 (普遍凸多面体 (universal polytope) という) の性質を調べている。ここでは、[3] に従って普遍凸多面体について述べる。

$\mathbf{R}^d$ 次元空間内の n 個の点からなる集合 $S = \{p_1, \dots, p_n\}$ を考える。各点 p_i の座標を $(x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,d})$ とする。これらの座標を用いて次のような行列を定義する。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_{1,1} & \cdots & x_{1,d} \\ 1 & x_{2,1} & \cdots & x_{2,d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n,1} & \cdots & x_{n,d} \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{R}^n$ 空間の座標系を $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ とし、

$$\Lambda(n, d+1) = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d+1}) \mid 1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{d+1} \leq n\}$$

とおくと、

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} \wedge e_{\lambda_2} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_{d+1}}, \quad (\lambda \in \Lambda(n, d+1))$$

は $\Lambda_{d+1} \mathbf{R}^n$ の直交基底をなす。この座標系によって $(d+1)$ -ベクトルからなる $\Lambda_{d+1} \mathbf{R}^n$ は $\binom{n}{d+1}$ 次元のベクトル空間と見なせる。 A の $d+1$ 個の列ベクトルの外積を η とし、 S の 3 三角形分割 Δ

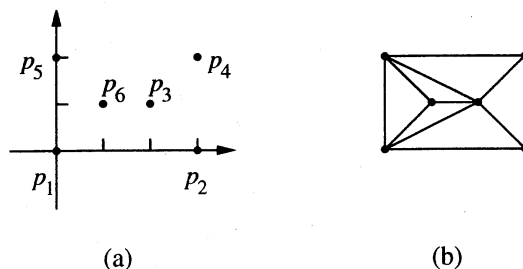


図 11: 平面上の 6 点の配置

に対応する $\Lambda_{d+1} \mathbf{R}^n$ の $(d+1)$ -ベクトル φ_Δ を次のように定める.

$$\varphi_\Delta = \sum_{\sigma \in \Delta} \text{sign}\langle \eta, e_\sigma \rangle \cdot e_\sigma$$

ここで, $|p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_{d+1}}|$ が 3 角形分割 Δ に現われる d 次元単体としたとき, これとその添字集合 $(i_1, i_2, \dots, i_{d+1})$ を同一視している. $\text{sign}\langle \eta, e_\sigma \rangle$ は η と e_σ の内積の符号であるが, これは d 次元単体 $\text{conv}(\{p_{\sigma_1}, \dots, p_{\sigma_{d+1}}\})$ の向きを表している. このようにして各 3 角形分割に対応する $(d+1)$ -ベクトルが得られるが, これらの $(d+1)$ -ベクトルを基底

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} \wedge e_{\lambda_2} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_{d+1}}, \quad (\lambda \in \Lambda(n, d+1))$$

を用いて書き直すと, $\binom{n}{d+1}$ 次元のベクトル空間の点と考えられる. ここで, これらのベクトルの成分は $\{-1, 0, +1\}$ の要素であるということを注意しておく. それらの点 $\{\varphi_\Delta\}$ の凸包を普遍凸多面体 (universal polytope) という.

$$\mathcal{U}(S) = \text{conv}(\{\varphi_\Delta \in \bigwedge_{d+1} \mathbf{R}^n \mid \Delta \text{ は } S \text{ の 3 角形分割}\})$$

簡単な例を調べてみる. 平面上に 6 点が図 11(a) の様に配置されているとする. $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (3, 0)$, $p_3 = (2, 1)$, $p_4 = (3, 2)$, $p_5 = (0, 2)$, $p_6 = (1, 1)$ であり,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. $\eta = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6) \wedge (3e_2 + 2e_3 + 3e_4 + e_6) \wedge (e_3 + 2e_4 + 2e_5 + e_6)$ を用いて, 3 角形分割 Δ に対して φ_Δ を定義にしたがって求めると, $\sigma \in \Delta$ ごとに $\text{sign}\langle \eta, e_\sigma \rangle$ を計算することになるのだが, この符号は 3 角形 σ を添字の順序に回ったとき, 反時計回りであれば $+1$, 時計回りであれば -1 というように 3 角形の向きによって定まる. 図 11(b) の 3 角形分割に対する φ_Δ は

$$\varphi_\Delta = e_{123} + e_{136} - e_{156} - e_{234} + e_{345} + e_{356}$$

となる. ここで, e_{ijk} は $e_i \wedge e_j \wedge e_k$ をあらわしており, また, $|p_i p_j p_k|$ という 3 角形に対応している. この Δ は 6 個の 3 角形を使っており, それらが φ_Δ の各項に現われている. その符号は 3 角形の向きによって定まっている. つまり, $|p_1 p_2 p_3|$ は反時計回りであり, $|p_1 p_5 p_6|$ は時計回りである. $\Lambda_3 \mathbf{R}^6$ の次元は 20 であり, S の 3 角形分割は図 12 に示すように 14 個あるので, $\mathbf{R}^{20}$

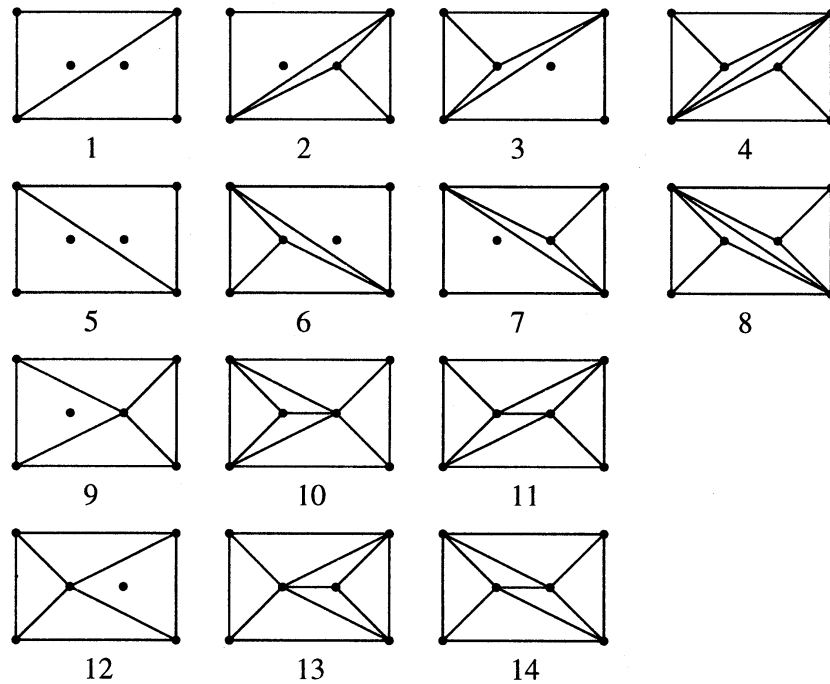


図 12: 平面上の 6 点の 14 個の 3 角形分割

内の 14 個の点に対する凸包が普遍凸多面体となるのだが、普遍凸多面体の次元は 10 次元である。この場合の普遍凸多面体の接続関係は調べることができ、端点同士はほとんどが隣接していて、辺で隣接していない端点対に対応する 3 角形分割の番号だけをあげておくと、図 12 において、1 と 4、5 と 8、10 と 13、11 と 14 である。

普遍凸多面体は次のような性質をもつ。

- (a) S の有向マトロイド (oriented matroid) は普遍凸多面体 $\mathcal{U}(S)$ を決定し、逆も言える。
- (b) S の任意の 3 角形分割は $\mathcal{U}(S)$ の頂点と 1 対 1 に対応している。
- (c) S が一般の位置にあれば $\mathcal{U}(S)$ の次元は $\binom{n-1}{d+1}$ である。

この普遍凸多面体の頂点は 3 角形分割と 1 対 1 に対応しているので、この多面体の頂点をすべて列挙することができれば、すべての 3 角形分割を列挙することができるのであるが、普遍凸多面体の次元は大きく、また、平面上の 6 個の点集合における例で見たように、ほとんど密に接続していることから、アルゴリズム的に列挙していくことができていない。前節で述べたように、凸 5 角形の頂点集合に対しては、これらの 5 つの 3 角形分割はすべて正則であるので、2 次凸多面体の頂点に対応していた。また、この場合の 2 次凸多面体は 5 角形となって、各 3 角形分割に接続しているのは 2 つしかない。しかし、普遍凸多面体を構成すると、5 つの 3 角形分割は 4 次元単体の頂点に対応しており、すべてが接続している。以下では、2 次凸多面体と普遍凸多面体の関係について述べる。2 次凸多面体を普遍凸多面体は含んでおり、 $\Lambda_{d+1} \mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ への射影によって、普遍凸多面体は 2 次凸多面体に写ることがわかる。

次のような線形写像を考える。ここで、 η は行列 A の列ベクトルの外積として定義されたものである。

$$\begin{aligned} \phi: \Lambda_{d+1} \mathbf{R}^n &\rightarrow \mathbf{R}^n \\ \varphi &\mapsto \sum_{i=1}^n \langle (e_i | \varphi) \wedge e_i, \eta \rangle e_i \end{aligned}$$

ここで $\rfloor$ は $p \leq q$ のとき線形写像 $\rfloor : \Lambda_p \mathbf{R}^n \times \Lambda_q \mathbf{R}^n \rightarrow \Lambda_{q-p} \mathbf{R}^n$ であり, $(\zeta, \gamma) \in \Lambda_p \mathbf{R}^n \times \Lambda_q \mathbf{R}^n$ と $\xi \in \Lambda_{q-p} \mathbf{R}^n$ に対して, $\langle \xi \wedge \zeta, \gamma \rangle = \langle \xi, \zeta \rfloor \gamma \rangle$ が成り立つものである. 特に, $\lambda \in \Lambda(n, p)$, $\mu \in \Lambda(n, p)$ ($p \leq q$) に対しては, $\lambda \not\subset \mu$ ならば $e_\lambda \rfloor e_\mu = 0$ であり, $\mu = \nu \cup \lambda$ と書けるときは $e_\lambda \rfloor e_\mu = \text{sgn}(\nu, \lambda) d_\nu$ である.

$(d+1)$ -ベクトル $\zeta \in \Lambda_{d+1} \mathbf{R}^n$ が単純であるとは, $\mathbf{R}^n$ の一次独立な $d+1$ 個のベクトルの外積として表せることをいい, ζ が単純であるとき, つまり, $\zeta = x_1 \wedge \cdots \wedge x_{d+1}$ と表せるとき, $x_1, \dots, x_{d+1} \in \mathbf{R}^n$ で張られる $\mathbf{R}^n$ 内の $d+1$ 次元部分空間を $L(\zeta)$ で表すことにする. この対応は, Grassmannian の Plücker 埋め込みに他ならない. この対応によって, $\wedge$ と $\rfloor$ の幾何的解釈ができる. もし, ζ と γ が単純であり, $L(\zeta) \cap L(\gamma) = 0$ ならば, $\zeta \wedge \gamma$ に対応する線形空間は $L(\zeta \wedge \gamma) = L(\zeta) \oplus L(\gamma)$ である. また, $L(\zeta \rfloor (e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)) = L(\zeta)^\perp$ であり, $L(\zeta)^\perp + L(\gamma) = \mathbf{R}^n$ ならば, $L(\zeta \rfloor \gamma) = L(\zeta)^\perp \cap L(\gamma)$ が成り立つ.

3 三角形分割 Δ に対応する $\varphi_\Delta \in \Lambda_{d+1} \mathbf{R}^n$ の ϕ による像を考える. Δ に使われている 3 三角形の添字集合 $\sigma \in \Lambda(n, d+1)$ に対して, $\phi(e_\sigma)$ は, $i \in \sigma$ のときは, 符号を除いて考えると $e_i \rfloor e_\sigma$ によって $L(e_\sigma)$ から e_i 方向の成分が除かれ, 再び $\wedge e_i$ によって直和がとられて元に戻るというイメージであり, 符号を考慮すると, $(e_i \rfloor e_\sigma) \wedge e_i = e_\sigma$ となることからわかる. 従って, e_σ の第 i 成分は $\langle e_\sigma, \eta \rangle$ であり, σ に入っている添字に対応する A の行からなる小行列式に他ならない. これは η の Plücker 座標であり, σ に対応する 3 三角形の体積である. 一方, $i \notin \sigma$ のときは, $e_i \rfloor e_\sigma = 0$ となるので, この成分は 0 となっている. 結局 $\phi(\varphi_\Delta)$ は Δ に現われる σ に関して, このようなベクトルの和をとるので, 第 i 成分は p_i を使っている 3 三角形の体積の総和が得られ, $\phi(\varphi_\Delta)$ は 2 次凸多面体の Δ に対応する頂点に一致する. このことから, 次の定理が得られる.

定理 13: 2 次凸多面体は普遍凸多面体の射影 ϕ による像に一致する.

この射影の様子も具体例で示しておく. 平面上の凸 5 角形図 7(a) の例を考える. $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (1, 0)$, $p_3 = (2, 1)$, $p_4 = (1, 2)$, $p_5 = (0, 1)$ であり,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

となる.

$$\begin{aligned} \eta &= (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) \wedge (e_2 + 2e_3 + e_4) \wedge (e_3 + 2e_4 + e_5) \\ &= e_{123} + 2e_{124} + e_{125} + 3e_{134} + 2e_{135} + e_{145} + 2e_{234} + 2e_{235} + 2e_{245} + 2e_{345} \end{aligned}$$

であり, η の e_{ijk} の係数は 3 三角形 $|p_i p_j p_k|$ の体積となっていることが分かる. この凸 5 角形に対する 3 三角形分割は 5 つあり, それらを図 7(b) に示した. 各 3 三角形分割に対応する普遍凸多面体の頂点の 10 次元のベクトルは次のようになる.

	e_{123}	e_{124}	e_{125}	e_{134}	e_{135}	e_{145}	e_{234}	e_{235}	e_{245}	e_{345}
$\varphi_1 =$	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
$\varphi_2 =$	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
$\varphi_3 =$	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
$\varphi_4 =$	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0
$\varphi_5 =$	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1

これらの点の凸包は4次元の単体となり、各点は他の4つの点に接続している。 φ_i を射影 ϕ で写してみると次のようになる。

$$\begin{aligned}\phi(\varphi_1) &= 5e_1 + e_2 + 4e_3 + 4e_4 + e_5 \\ \phi(\varphi_2) &= 3e_1 + e_2 + 5e_3 + 2e_4 + 4e_5 \\ \phi(\varphi_3) &= 3e_1 + 4e_2 + 2e_3 + 5e_4 + e_5 \\ \phi(\varphi_4) &= e_1 + 5e_2 + 2e_3 + 4e_4 + 3e_5 \\ \phi(\varphi_5) &= e_1 + 3e_2 + 4e_3 + 2e_4 + 5e_5\end{aligned}$$

e_i の係数は p_i を頂点とする3角形の体積の総和に等しいことが確認でき、 $\phi(\varphi_i)$ が2次凸多面体の頂点に一致することが分かる。

3.3 独立点集合凸多面体と3角形特性凸多面体

前節では、すべての3角形分割が頂点と対応するような普遍凸多面体には正則な3角形分割に対応している頂点からなる2次凸多面体が含まれており、普遍凸多面体から射影によって2次凸多面体が得られることを示した。一方、1.3節で独立点集合凸多面体に関して述べたが、与えられた点集合に関してある種のグラフを構成し、3角形分割をそのグラフの最大・最大重み独立点集合として特徴付けることができ、それらに対応する凸多面体はグラフの独立点集合凸多面体に含まれることがわかる。この凸多面体は普遍凸多面体で端点の座標値が $\{-1, 0, 1\}$ をとっていたところを -1 を 1 に置き換えた点の凸包として定義され、普遍凸多面体と密接に関係する。

まず、簡単な場合として、どの3点も1直線上にない平面上の n 点の3角形分割を考える。このとき、 $\binom{n}{2}$ 本の点対を結ぶ直線分に対して、各線分をグラフの点とし、対応する2直線分が端点以外で交わるときそのグラフの2点を枝で結ぶことによって得られるグラフを直線分の交グラフ(intersection graph)という。この交グラフで独立点集合を考えると、次の定理が成り立つ。

定理 14: どの3点も1直線上にない平面上の n 点の $\binom{n}{2}$ 本の点対を結ぶ直線分交グラフの極大独立点集合は、それらの点の3角形分割と1対1に対応する。しかも、全ての極大独立点集合は最大独立点集合である。

このとき、3角形分割を構成する直線分部分集合の特性ベクトル全体の凸包を、3角形分割の直線分特性凸多面体と呼ぶ。

一般の次元での3角形分割も、与えられた点集合に対して、それらの点から生成されるその次元の3角形をすべて考えてそれらをグラフの点に対応させ、グラフの2つの点を取ったとき、対応する3角形が内部で交わる場合か、境界でのみ交わるときでもその共通部分がそれぞれの3角形でのその次元の面でない場合にはグラフの2点を枝で結ぶことによって得られるグラフを考える。このグラフを3角形交グラフと呼ぶ。すると次の定理が成り立つ。

定理 15: 3角形交グラフで各点に対応する3角形の体積を重みとすると、最大重み独立点集合は3角形分割に1対1に対応する。

3角形分割を構成する3角形の特性ベクトル全体の凸包を、**3角形特性凸多面体**(characteristic polytope)と呼ぶ。このように、3角形分割は適当な交グラフの最大重み独立点集合として特徴づけられる。グラフの(最大重み)独立点集合については、その凸多面体的取り扱いが古くからされており、構造もかなりわかっており、それについては既に1.3節でまとめた。上の定理から、3角形分割に関する直線分特性凸多面体、また3角形特性凸多面体は、対応するグラフの独

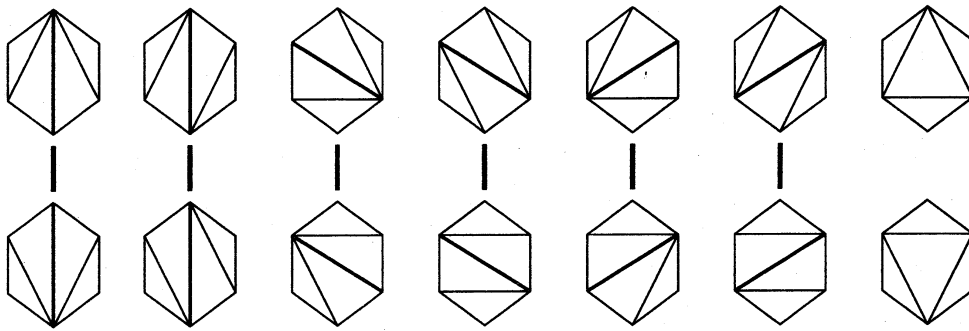


図 13: 凸 6 角形の 14 個の 3 三角形分割の直線分特性凸多面体で辺で結ばれていない 3 三角形分割 (図で 7 列ある内の左 6 列の 3 三角形分割に対応する端点間のみ辺はなく, 他の端点間には全て辺がある)

立点集合凸多面体の 1 つのファセット (最大・最大重みに関する超平面にのっている) の凸多面体になっていることがわかる. 独立点集合凸多面体での端点の隣接関係は定理 8 に特徴づけられている. これを 3 三角形分割の場合で書くと, 次のようになる.

定理 16: 平面の n 点の 3 三角形分割に関する直線分凸多面体において 2 端点が辺で結ばれているための必要十分条件は, 対応する 2 つの直線分部分集合の対称差に関する直線分の交グラフの誘導部分グラフが連結であることである.

図 13 にこの場合の例を示す.

定理 17: 3 三角形特性凸多面体で 2 端点が辺で結ばれているための必要十分条件は, 対応する 2 つの 3 三角形部分集合の対称差に関する 3 三角形の交グラフの誘導部分グラフが連結であることである.

2 次凸多面体との関係では, 普遍凸多面体の射影として 2 次凸多面体が得られるといった関係まではいかないが, 少なくとも凸多面体グラフに関しては次の定理が成り立つ.

定理 18: 直線分・3 三角形特性凸多面体の凸多面体グラフは, 2 次凸多面体の凸多面体グラフを部分グラフとして含む.

証明は定理 4 などを用いて行なうことができる.

直線分・3 三角形特性凸多面体は, 辺長和最小 3 三角形分割を求めるといった最適化問題に直結する凸多面体であり, その不等式系としての記述がわかると, それらの最適化問題に対して新しい効率的アルゴリズムが構成できることが期待できる. 上述したように, この凸多面体はあるグラフの独立点集合凸多面体の 1 つのファセットである. グラフの独立点集合凸多面体については, 1.3 節にまとめたようにクリーク行列による記述などができる場合がある. しかし, 上の直線分の交グラフ, 3 三角形交グラフについては, 容易に C_5 を点誘導部分グラフとして含むような例が作れるので, パーフェクトではない. 特性凸多面体についての不等式系での記述などは未解決である.

謝辞

本研究の一部は, 文部省科学研究費の援助を受けた.

参考文献

- [1] D. Avis, 今井浩, 松永信介: 計算幾何学・離散幾何学. 朝倉書店, 1994.
- [2] M. Bern and D. Eppstein: Mesh Generation and Optimal Triangulation. In “Computing in Euclidean Geometry” (D.-Z. Du and F. Hwang, ed.), Lecture Notes Series on Computing Vol.4, 2nd Edition, World Scientific, 1995, pp.47–123.
- [3] L. J. Billera, P. Filliman and B. Sturmfels: Constructions and Complexity of Secondary Polytopes. *Advances in Mathematics*, Vol.83 (1990), pp.155–179.
- [4] V. Chvátal: On Certain Polytopes Associated with Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, Vol.18 (1975), pp.138–154.
- [5] H. Edelsbrunner: *Algorithms in Combinatorial Geometry*. Springer-Verlag, 1987. 邦訳 (今井浩, 今井桂子訳): 組合せ幾何学のアルゴリズム. 共立出版, 1995.
- [6] M. R. Garey and D. S. Johnson: *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company, 1979.
- [7] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinski: *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*. Birkhäuser, Boston, 1994.
- [8] M. C. Golumbic: *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Academic Press, 1980.
- [9] M. Grötschel, L. Lovasz and A. Schrijver: *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*. Springer-Verlag, 1988; 2nd edition, 1993.
- [10] D. Hausmann and B. Korte: Colouring Criteria for Adjacency on 0–1-Polyhedra. *Mathematical Programming Study*, Vol.8 (1978), pp.106–127.
- [11] 日比孝之: 可換代数と組合せ論. シュプリンガー・フェアラーク, 1995.
- [12] 今井浩, 今井桂子: 計算幾何学. 共立出版, 1994.
- [13] 伊理正夫: 線形計画法. 共立出版, 1986.
- [14] T. Masada: *An Algorithm for the Enumeration of Regular Triangulations*. Master’s Thesis, Department of Information Science, University of Tokyo, 1995.