

不完全修理を伴うシステムの最適取り替え

慶和工業大学 大鍬 史男

序 何らかの事象が non-homogeneous Poisson process $\{N(t), t \geq 0\}$ に従って発生するものとする。事象発生時点で何らかの action を取り、action の結果成功であれば過程はそこで kill される。不成功であれば継続して事象が発生する。action に要する時間は無視できるとする。N 回目の事象発生時点で action の結果が初めて成功であるとするれば、過程が kill されるまでの時間は S_N である。ここで $S_k \equiv \inf\{t \mid N(t) = k\}$ である。

例えば、計算機が処理しなければならない task が non-homogeneous Poisson process に従って発生し、各 task の処理の結果が成功、不成功であれば S_N は初めて task の処理が成功するまでの時間を表わす。又故障が non-homogeneous Poisson process に従って発生し、各故障に対する action の結果が完全修理、不完全修理であれば、 S_N は初めて完全修理が行なわれるまでの時間を表わす。

我々の関心は S_N の分布関数の確率的単調性と、 S_N 以前にある定まった時刻で過程を stop する時、どの時点で stop すれば最適かという問題である。最適規準は long-run average cost である。

Formulation and Results

仮定 ① $\{N(t), t \geq 0\}$: continuous intensity function $\lambda(t)$ を持つ non-homogeneous Poisson process, $\Lambda(t) \equiv \int_0^t \lambda(u) du$, $S_k \equiv \inf\{t \mid N(t) = k\}$

② N : positive integer valued random variable $\tau: \{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対する randomized stopping time^[6], i.e.,

$$\forall k \geq 1, P\{N > k \mid \phi_1, \dots, \phi_k, \phi_{k+1}, \dots\} = P\{N > k \mid \phi_1, \dots, \phi_k\}.$$

N の性質 ① $\forall k \geq 1, P\{N > k \mid \phi_1, \dots, \phi_k, \phi_{k+1}\} = P\{N > k \mid \phi_1, \dots, \phi_k\}$

② $\forall k \geq 1, P\{N > k \mid \phi_k, \phi_{k+1}\} = P\{N > k \mid \phi_k\}.$

Proof: ① は仮定② から直接導かれる。② は仮定② と S_k の定義から導かれる。 <証明終>

S_N の分布 $P\{S_N > t\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{N=k, S_k > t\}$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_t^{\infty} P\{N=k \mid S_k=y\} e^{-\Lambda(y)} \frac{[\Lambda(y)]^{k-1}}{(k-1)!} \lambda(y) dy$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N > k, N(t)=k\} = e^{-\Lambda(t)} + e^{-\Lambda(t)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P\{N > k \mid S_k=y\} \frac{[\Lambda(y)]^{k-1}}{(k-1)!} \lambda(y) dy$$

$$= e^{-\Lambda(t)} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P\{N \geq k \mid S_k=y\} \frac{[\Lambda(y)]^{k-1}}{(k-1)!} \lambda(y) dy \right) = e^{-\Lambda(t)} \sum_{k=1}^{\infty} P\{N \geq k \mid S_k=t\} \frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!} e^{\Lambda(t)}.$$

Proof: オ1番目, オ2番目の等号は明らか。オ3番目の等号は $S_k > t \Leftrightarrow N(t) < k$ に注意すれば明らか。オ4番目の等号は, $k \geq 1$ の時

$$P\{N > k, N(t)=k\} = P\{N > k, S_k \leq t < S_{k+1}\}$$

$$= \int_0^t \int_t^{\infty} P\{N > k \mid S_k=y, S_{k+1}=z\} \frac{[\Lambda(y)]^{k-1}}{(k-1)!} \lambda(y) \lambda(z) e^{-\Lambda(z)} dz dy$$

$$= \int_0^t P\{N > k \mid S_k=y\} \frac{[\Lambda(y)]^{k-1}}{(k-1)!} \lambda(y) e^{-\Lambda(y)} dy$$

であることから明らか。

オ5番目の等号は

$$\begin{aligned} \Pr\{N \geq k | \Phi_k = t\} &= \int_0^t \Pr\{N \geq k | \Phi_{k-1} = \Delta, \Phi_k = t\} \Pr\{\Phi_{k-1} \leq \Delta | \Phi_k = t\} \\ &= \int_0^t \Pr\{N \geq k | \Phi_{k-1} = \Delta\} \Pr\{\Phi_{k-1} \leq \Delta | \Phi_k = t\} d\Delta, \end{aligned}$$

$$\Pr\{\Phi_{k-1} \leq \Delta | \Phi_k = t\} = \frac{[\Lambda(\Delta)]^{k-2} / (k-2)!}{[\Lambda(t)]^{k-1} / (k-1)!} \Lambda(\Delta) d\Delta$$

これらのことを用いて明らか。 <証明終>

Φ_N の密度関数

$$\frac{d}{dt} \Pr\{\Phi_N \leq t\} = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N=k | \Phi_k = t\} e^{-\Lambda(t)} \frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!} \Lambda(t).$$

Proof: $\Pr\{\Phi_N > t\}$ を直接微分すればよい。 <証明終>

Notations. $F_N(t) \equiv \Pr\{\Phi_N \leq t\}$, $\bar{F}_N(t) \equiv 1 - F_N(t)$,

$f_N(t) \equiv d\Pr\{\Phi_N \leq t\} / dt$, $\lambda_N(t) \equiv f_N(t) / \bar{F}_N(t)$,

$\lambda(k, t) \equiv \Pr\{N=k | N \geq k, \Phi_k = t\} = \frac{\Pr\{N=k | \Phi_k = t\}}{\Pr\{N \geq k | \Phi_k = t\}}.$

Theorem. $\lambda(k, t) \uparrow_{k, t}$, $\lambda(t) \uparrow_t$, $\Pr\{N \geq k | \Phi_k = t\} : TP_2$ in k ,
 $t^{[4]} \Rightarrow \lambda_N(t) \uparrow_t$.

Proof: $\Delta > 0$ とし

$$\begin{aligned} \lambda_N(t) &\leq \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N \geq k | \Phi_k = t\} \lambda(k, t+\Delta) \lambda(t+\Delta) \frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N \geq k | \Phi_k = t\} \frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!}} \\ &\leq \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N \geq k | \Phi_k = t\} \lambda(k, t+\Delta) \lambda(t+\Delta) \frac{[\Lambda(t+\Delta)]^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N \geq k | \Phi_k = t\} \frac{[\Lambda(t+\Delta)]^{k-1}}{(k-1)!}} \\ &\leq \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N \geq k | \Phi_k = t+\Delta\} \lambda(k, t+\Delta) \lambda(t+\Delta) \frac{[\Lambda(t+\Delta)]^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N \geq k | \Phi_k = t+\Delta\} \frac{[\Lambda(t+\Delta)]^{k-1}}{(k-1)!}}. \end{aligned}$$

オ1番目の不等号は $\lambda(k, t) \uparrow_t$, $\lambda(t) \uparrow_t$ であることから, オ
 2番目の不等号は basic composition theorem^[4] と $\lambda(k, t) \uparrow_k$ ため

よこから, カ3番目の不等号は basic composition theorem,
 $\lambda(k, t) \uparrow_k, P\{N \geq k \mid S_k = t\} : TP_2 \text{ in } k, t$ であるよこから成立
 する。 <証明終>

Remark. $\lambda(k, t) \uparrow_{k, t}$ と $P\{N \geq k \mid S_k = t\} : TP_2 \text{ in } k, t$ との間
 には一般には直接の関係はない。 <Remark終>

T を非負実数とし, $G(T)$ を次のように定める。

$$G(T) = \begin{cases} cN + a + b_1, & S_N \leq T, \\ cN(T) + a + b_2, & S_N > T. \end{cases}$$

ここで $c \geq 0, a \geq 0, b_1 \geq 0, b_2 \geq 0$ である。

$$G(T) \equiv \frac{E[G(T)]}{E[\min(S_N, T)]}$$

とし, $G(T)$ を最小にする T が存在するたりの十分条件を提示
 する。

Theorem. $G(T) = \frac{a + b_1 + (b_2 - b_1) \bar{F}_N(t) + c \int_0^T \lambda(x) \bar{F}_N(x) dx}{\int_0^T \bar{F}_N(x) dx}$

Proof: $E[\min(S_N, T)] = \int_0^T \bar{F}_N(x) dx$ は明らか。分子を考え
 る。 $E[G(T)] = E[cN + a + b_1; S_N \leq T] + E[cN(T) + a + b_2; T < S_N]$.
 $= a + b_1 + (b_2 - b_1) P\{T < S_N\} + c \{E[N; S_N \leq T] + E[N(T); T < S_N]\}$.

$$E[N; S_N \leq T] = \sum_{k=1}^{\infty} k P\{N=k, S_k \leq T\}.$$

$$E[N(T); T < S_N] = \sum_{k=1}^{\infty} k P\{N(T)=k, T < S_N\},$$

$$P\{N(T)=k, T < S_N\} = \sum_{n=k+1}^{\infty} P\{N(T)=k, T < S_n, N=n\}$$

$$= P\{\phi_k \leq T < \phi_{k+1}, N \geq k+1\} = P\{\phi_k \leq T, N \geq k+1\} - P\{\phi_{k+1} \leq T, N \geq k+1\}$$

故 $E[N(T); T < \phi_N] = \sum_{k=1}^{\infty} k P\{\phi_k \leq T, N \geq k+1\} - \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) P\{\phi_k \leq T, N \geq k\}$ 。
以上から

$$E[N; \phi_N \leq T] + E[N(T); T < \phi_N] = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\phi_k \leq T, N \geq k\}.$$

$k \geq 2$ の時

$$\begin{aligned} P\{\phi_k \leq T, N \geq k\} &= \int_0^T \int_0^x P\{N \geq k | \phi_{k-1} = y, \phi_k = x\} P\{\phi_{k-1} \leq y, \phi_k \leq x\} dy dx \\ &= \int_0^T \int_0^x P\{N \geq k | \phi_{k-1} = y\} \frac{[\Lambda(y)]^{k-2}}{(k-2)!} \lambda(y) \lambda(x) e^{-\Lambda(x)} dy dx. \end{aligned}$$

従って

$$E[N; \phi_N \leq T] + E[N(T); T < \phi_N] = \int_0^T \lambda(x) \bar{F}_N(x) dx. \quad \langle \text{証明終} \rangle$$

簡単な計算により

$$\begin{aligned} dC(t)/dt \text{ の分子} &= \bar{F}_N(t) \left\{ \tilde{\lambda}(t) \int_0^T \bar{F}_N(x) dx - \int_0^T \tilde{\lambda}(x) \bar{F}_N(x) dx - (a+b_2) \right\}, \\ \tilde{\lambda}(t) &\equiv C\lambda(t) - (b_2-b_1)\lambda_N(t). \end{aligned}$$

Lemma. ① $b_1 \geq b_2$, $\lambda(t) \uparrow t$, $\lambda(k,t) \uparrow_{k,t}$, $P\{N \geq k | \phi_k = t\} \cdot TP_2$ in $k, t \Rightarrow \tilde{\lambda}(t) \uparrow t$.

② $b_2 \geq b_1$, $C \geq b_2 - b_1$, $\lambda(t) \uparrow t$, $\lambda(k,t) \downarrow_{k,t}$, $P\{N \geq k | \phi_k = t\} \cdot TP_2$ in $k, t \Rightarrow \tilde{\lambda}(t) \uparrow t$.

Proof: ① 条件下で $\lambda_N(t) \uparrow t$ はすでに示されているから $\tilde{\lambda}(t) \uparrow t$ は明らか。

$$\textcircled{2} \quad \tilde{\lambda}(t) = \lambda(t) \left\{ C - (b_2 - b_1) \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P\{N \geq k | \phi_k = t\} \lambda(k,t) \frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum_{k=1}^{\infty} P\{N \geq k | \phi_k = t\} \frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!}} \right\}.$$

条件から {} 内分数式は t に関して減少故

$$\tilde{\lambda}(t) = (1 - b_2 + b_1)\lambda(t) + (b_2 - b_1)\lambda(t) \left\{ 1 - \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P_1\{N \geq k | S_k = t\} \lambda(k, t) \frac{[\lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum_{k=1}^{\infty} P_1\{N \geq k | S_k = t\} \frac{[\lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!}} \right\}$$

は t に関して増加である。 <証明終>

$$h(t) \equiv \tilde{\lambda}(t) \Big|_0^T \bar{F}_N(x) dx - \int_0^T \tilde{\lambda}(x) \bar{F}_N(x) dx.$$

Theorem. Lemma ① 又は ② それぞれの条件下で, $h(t) \uparrow_T$ であり, さらに $h(t)$ が連続で $\lim_{T \rightarrow \infty} h(t) > a + b_2$ であれば, $h(t) = a + b_2$ を満たす T が存在し, この T が $G(t)$ を最小にする T である。 $\{T \mid h(t) = a + b_2\}$ は連結集合である。

Proof: 後半は明らかである。前半は次の通り。 $\tilde{\lambda}(t) \uparrow_T$ であるから, $\Delta > 0$ として

$$\begin{aligned} h(T+\Delta) - h(T) &= \left\{ \tilde{\lambda}(T+\Delta) - \tilde{\lambda}(T) \right\} \Big|_0^{T+\Delta} \bar{F}_N(x) dx + \tilde{\lambda}(T) \int_T^{T+\Delta} \bar{F}_N(x) dx \\ &\quad + \int_0^T \{ \tilde{\lambda}(T) - \tilde{\lambda}(x) \} \bar{F}_N(x) dx \end{aligned}$$

$$\geq 0.$$

<証明終>

References

- [1] Barlow, R.E. and L.C. Hunter (1960) Optimal Preventive Maintenance Policies, Operations Research 8, 90-110.
- [2] Brown, M. and F. Proschan (1983) Imperfect Repair, J. Appl. Prob. 20, 851-859.
- [3] Block, H.W., W.S. Borges and T.H. Savits (1985) Age-dependent Minimal Repair, J. Appl. Prob. 22, 370-385.
- [4] Karlin, S. (1968) Total Positivity, Vol. 1. Stanford,

Calif. : Stanford University Press.

[5] Nummelin, E. (1980) A General Failure Model : Optimal Replacement with State Dependent Replacement and Failure Costs, Math. OR 5, 381-387.

[6] Pitman, J. W. and T. P. Speed (1973) A Note on Random Times, Stochastic Processes and their Applications 1, 369-374.

[7] 小和田正 (1983) 確率過程とその応用, 奥教出版株式会社.