

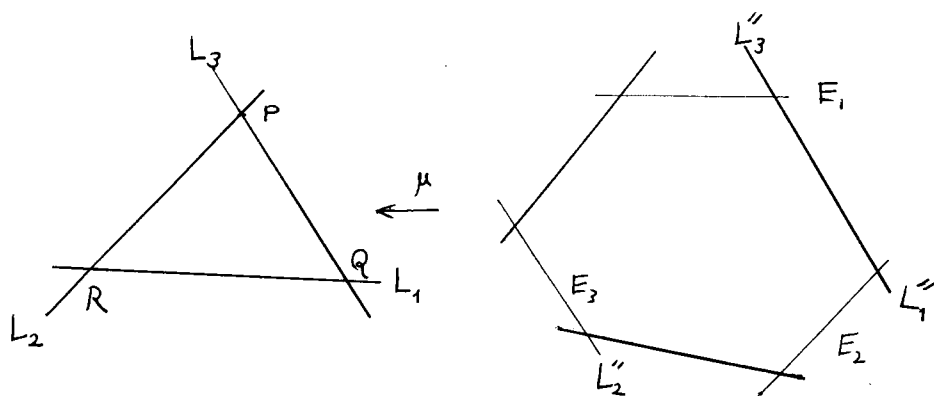
1a

極小超曲面と Cremona 変換 飯高 茂(東大理)

§0. 序

代数幾何で最も古典的な話題は平面代数
曲線と2次変換にある。

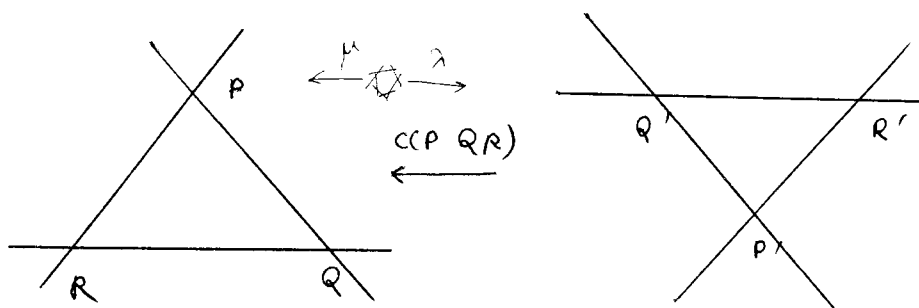
良く知られたことではあるが定義の復習を
する。 P^2 上の共線でない3点 P, Q, R をとり



それを中心に blow up をする。上図のように
 P, Q, R を通る3直線 L_1, L_2, L_3 の(強)変換像は
 $(L_i'')^2 = -1, L_i'' \cong P^1$ をみたすから、1点にのみ在
る。 $E_1 = \bar{\mu}'(P), E_2 = \bar{\mu}'(Q), E_3 = \bar{\mu}'(R)$ はそれぞれ
 P^2 上の直線 N_1, N_2, N_3 にある。即ち P, Q, R 中
心の blow up と、 L_1'', L_2'', L_3'' とは点 P', Q', R'

16

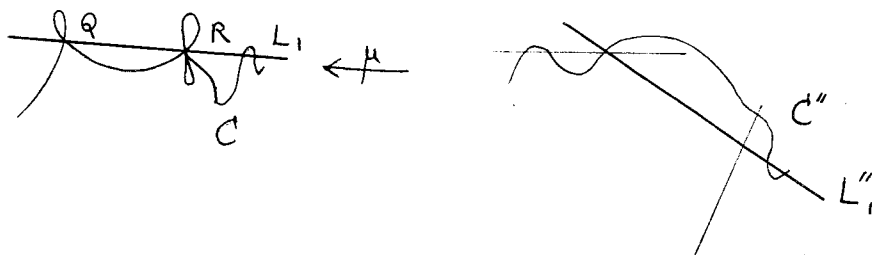
に端める blow down λ の合成を 標準 Cremona 変換又は, 単に (大域的) 2 次変換といふ $c(pqr)$ で示す.



さて, $\mathbb{P}^2$ 上の曲線を C とする. $c(pqr)^{-1}[C]$ を C' とかくとき, C' の次数はどうなるか?

$m_1 = \text{mult}_p C$, $m_2 = \text{mult}_q C$, $m_3 = \text{mult}_r C$ とおくと
 $\deg C = 2d - m_1 - m_2 - m_3$ となる. また $\text{mult}_p C' = d - m_2 - m_3$,
 $\text{mult}_q C' = d - m_1 - m_3$, $\text{mult}_r C' = d - m_1 - m_2$.

これから, どんな特異点でも正確に成立つ.
 ついでに λ も見ておく.



1c

$$\mu^* C = C''' + m_1 E_1 + m_2 E_2 + m_3 E_3,$$

$$C' = \lambda_* C''', \quad \lambda^* C' = C''' + e_1 L_1'' + e_2 L_2'' + e_3 L_3''$$

と仮定すると,

$$\lambda^* C' \cdot L_i'' = C''' \cdot L_i'' - e_i, \quad i = 1, 2,$$

$$\lambda^* C' \cdot L_i'' = C' \cdot \lambda_* L_i'' = 0$$

よって,

$$\begin{aligned} e_i &= C''' \cdot L_i'' = (\mu^* C - \sum m_j E_j) \cdot (L_i'' - \sum E_j - E_k) \\ &= d - m_j - m_k, \quad \text{ただし } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

$$\text{よって } e_1 = d - m_2 - m_3, \quad e_2 = d - m_3 - m_1, \quad e_3 = d - m_1 - m_2.$$

定義から $e_i = \text{mult}_p(C')$ であるから,

一方,

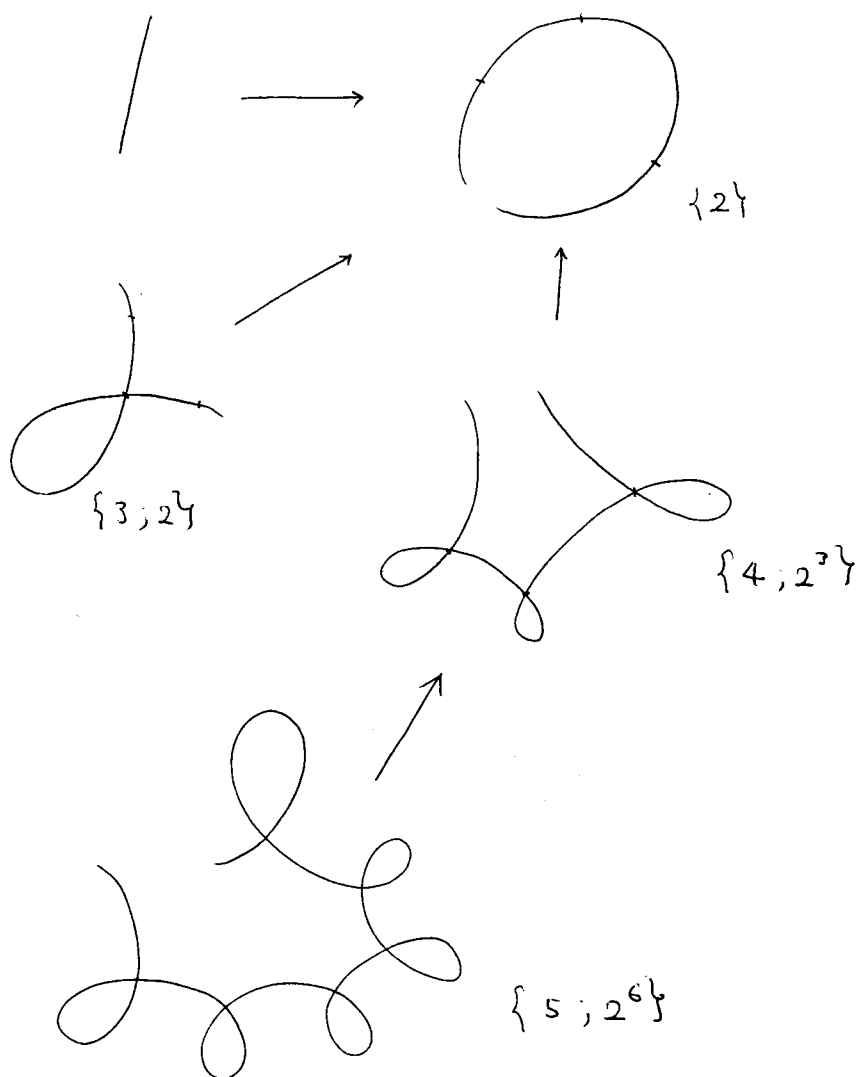
$$\begin{aligned} C' \cdot N_1 &= \lambda^* C' \cdot \lambda_* N_1 = (C''' + \sum e_i L_i'') \cdot (E_1 + L_2'' + L_3'') \\ &= C''' \cdot E_1 + e_2 + e_3 = m_1 + (2d - m_2 - m_3 - 2m_1) \\ &= 2d - m_1 - m_2 - m_3. \end{aligned}$$

このことは昔々よりよく知られていた。

これによると、6個の2重点をもつ5次曲線は、2次変換で、2重点3個の4次曲線に変換される。そして、さらにこの4次曲線は、

2

特異点中心の2次元変換で2次元曲線になり、2次元曲線は勿論直線に変換される。



$\{d; 2^{i_2}, 3^{i_3}, \dots\}$ は d 次元曲線 C の重さ i_r の点 P_r の存在を示すものである。 例1.

3

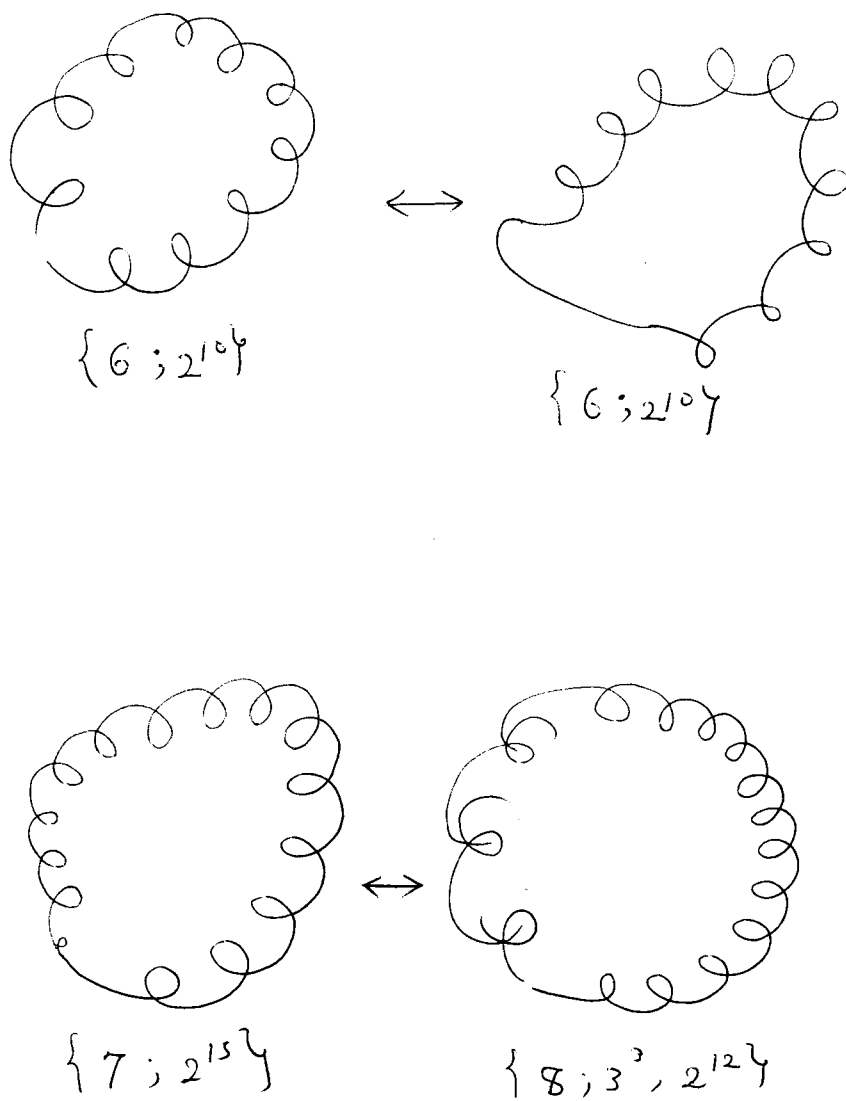


图 2

4

しかし, 10個の2重点をもつ6次曲線は有理曲線にはあっても, 2次変換によって次数を下げることはできない. 例えば, 3個の2重点を中心にもつ2次変換で変換しても, やはり6次曲線になってしまうのである. 次数が7以上の2重点だけをもち有理曲線は, さらに若しく, 2次変換をすると, 次数があまりなく, 3重点以上の特異点がでてくる(図2).

定は次の事実がある!!

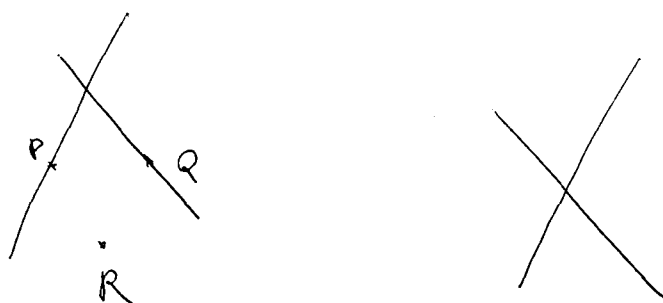
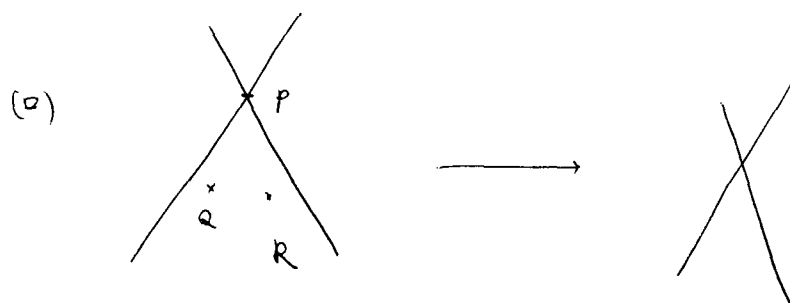
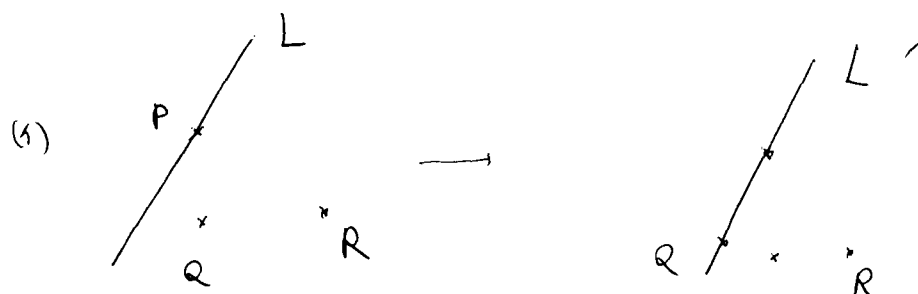
$C \subset \mathbb{P}^2$ と有理曲線とする.

- (i) $\deg C < 6$ なら $\varphi \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2) = Cr_2$ (2次元の Cremona 変換群) があり 固有変換 $\varphi[C]$ を直線にできる.
- (ii) $\deg C \geq 7$ かつ C は2重点しかないとする. このとき 群 $G = \{\varphi \in Cr_2 \mid \varphi[C] = C\}$ は $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$ の有限部分群になる.
- (iii) $\deg C \geq 6$, かつ2重点しかないとき, どんな $\varphi \in Cr_2$ によっても $\varphi[C]$ は直線にならない.

5

G を境界 にして様子をおそろいと変えてくる.

この G の持つ不思議な性質は直線柱でも出てくる.



(3) 3

6

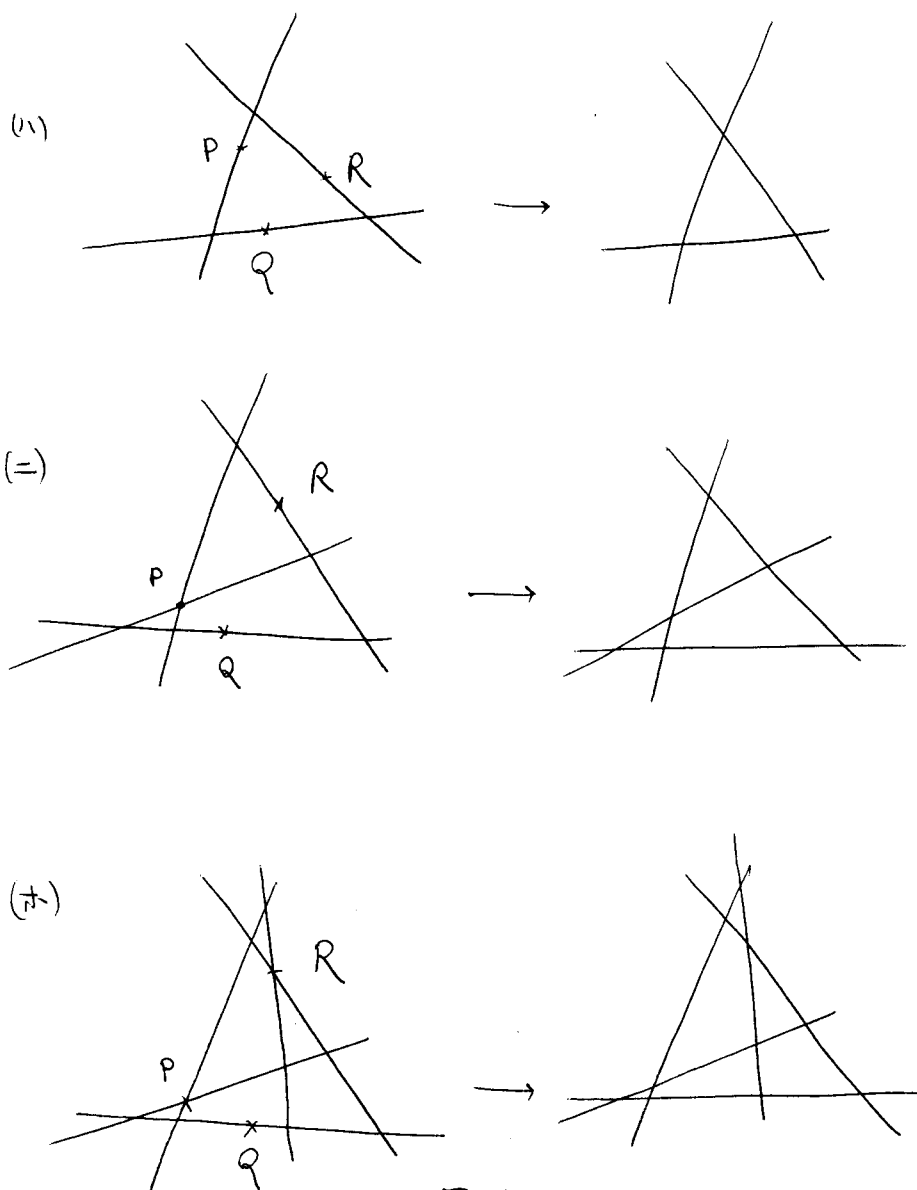


図 4

以上のどの場合も、 Q は直線の上の一般の点でよいからパラメータを持ちえる。しかし、それは（一般の位置にある）5本の直線迄で

7

ある。6本が一般の位置にあると、それらの交点、E 中には選はざるものとなり、連続パラメータを持つてなくなる。

C を可約平面曲線とする。 $C = \sum C_i$ を既約分解とし、各 C_i の生成点と p_i とする。 $\varphi \in Cr_2$ か、 $(\varphi(\xi_i)) = \text{曲線}$ をみだすとき、 $\varphi[C] = \sum \overline{\varphi(\xi_i)}$ と定義しよう。

Cr_2 は 2 次変換と線型変換の合成からつくられた。この事実は、双有理変換論の一つの根源的事象の一つの表れである?!!

C を、一般の位置にある r 本の直線の和とする。

予想: 「 $r \leq 5$ なら $\text{Bir}(C, P^2)$ は、(1)~(4)で表わされる 2 次変換と線型変換で合成され、無限次元の群となるであろう。」

$r = 6$ のとき、 $\text{Bir}(C, P^2)$ は離散群で、有限個の 2 次変換を許す。

$r \geq 7$ なら、 $\text{Bir}(C, P^2)$ は、有限線型群。

§ 1. 強変換(固有変換).

以下, V, W は, n 次元の 完備 正則多様体
を表し, $f: W \rightarrow V$ を 支配的有理写像とする.
 Γ を V の 素因子, γ を その 生成点 とする. $f^{-1}(\gamma)$
は, 有限集合 $\{\eta_1, \dots, \eta_r\}$ になるが, γ の 閉包部分
が, 素因子になる とき, f は Γ に関して pure
とよむ; $f^{-1}(\Gamma) = \sum_{j=1}^r \eta_j$ と $f^{-1}(\Gamma)$ を定める. 一
般に, $D = \sum \Gamma_i$ を V の 既約因子 とする とき,
すべての i について, f は Γ_i - pure のときのみ,
 f は D に関して pure とよむ; $f^{-1}(D) = \sum_{i=1}^r f^{-1}(\Gamma_i)$
と書く.

f が 正則写像なら, f は つねに pure である.
一方, $f \in \text{Bir}(V)$ の とき, $f^{-1}(\gamma_j)$ に η_j が あり, η_j
が 素因子 なら, $\exists M, T$ により $f^{-1}(\gamma_j) = \eta_j$ であり, $\{\eta_j\}$ と
 $\{\gamma_j\}$ は 双有理同値. 従って, $f^{-1}(D)$ と D の 既約
成分の数は等しく, f^{-1} は $f^{-1}(D)$ に関して pure
である. よって, $V=W$, $\text{Bir}(D, \mathbb{P}^2) = \{ \phi \in \text{Bir}(V) \mid$
 $\phi^{-1}(D) = D \}$ は 群 になる.

誤解の ない 為に: V と 既約正因子の 対を

$(\mathbb{D} \# V)$ と記す.

$f: W \longrightarrow V$ を支配的有理写像とすると
き, $f \in \mathbb{D} \cap \text{周}(\mathbb{C})$ として pure と仮定し, $\Delta \geq f^{-1}[\mathbb{D}]$
のとき, $f \in (\mathbb{X} \# W) \rightsquigarrow (\mathbb{D} \# V) \rightsquigarrow$ 有理
写像 といふ.

f が双有理写像であつて $\Delta = f^{-1}[\mathbb{D}]$ のとき, $f:$
 $(\mathbb{X} \# W) \rightarrow (\mathbb{D} \# V)$ は双有理写像といふ.

よつて, $(\mathbb{D} \# V)$ の双有理線何れを展開するの 目的
的である.

§2 Non-singular model と m -種数

V が非特異完備で, $\mathbb{D}$ が非特異の因子, 即
ち, 非特異素因子の非特異連結和とするととき,
 $(\mathbb{D} \# V)$ は 非特異 といふ.

一方, 与えられた任意の $(\mathbb{D} \# V)$ について,
それと双有理同値な非特異 $(\mathbb{X} \# W)$ が存在する.
もう少し説明しよう. まず, 広中の定理によ
り, 非特異 V^* と固有双有理正則写像 $\mu: V^* \rightarrow$
 V がある. さらに, V^* をうまく選べば,
 $\Delta = \mu^{-1}[\mathbb{D}]$ は非特異にできる. $W = V^*$ とする

10

と, $(\Delta \# W)$ と, $(\mathbb{D} \# V)$ の非特異モデルである.

対数的種数の理論では, $\bar{\mu}^1(\mathbb{D})$ が正規交叉になるとしたので, ここより条件が強い. 理論上は, ここまで仮定した上で, $\bar{\mu}^1(\mathbb{D})$ を考えるといふか, 具体例では, $\bar{\mu}^1(\mathbb{D})$ の非特異性のみを要求する方が, はるかに簡単便利である.

$(\mathbb{D} \# V)$ を非特異とし, $\omega_V(\mathbb{D})$ と考える.

$\dim H^0(\omega_V(\mathbb{D}^m))$ は $(\mathbb{D} \# V)$ の双有理不変になることを証明する. その為には, 次の命題公式を示すのがかなり易い.

§3. 命題公式

$(\Delta \# W)$ と $(\mathbb{D} \# V)$ を非特異とする. $f: W \rightarrow V$ を全射正則写像としこの時, 次の公式を示す
命題公式

$$K(W) + \Delta \sim f^*(K(V) + \mathbb{D}) + R\mathcal{V}_f,$$

但し, $R\mathcal{V}_f$ は W 上の正因子である.

$\bar{\mu}^1(\mathbb{D})$ は単化正規交叉であると仮定して証明

11

すめはよい。

そこで, $\bar{f}^1(D) = \bar{f}^1[D] + E_1 + \dots + E_s$, と素因子 E_j で書土表わすと, $\text{codim}(f(E_j)) \geq 2$ である.

$f^* \omega_V(D)$ を計算するため, $W = \bigcup W_\alpha$ を座標軸とし, W_α の局所座標系 $w_\alpha = (w_\alpha^1, \dots, w_\alpha^n)$ は $f(W_\alpha) \subset V_\lambda$ と書きつけておく. D の V_λ での定義式を δ_λ , Δ の W_α での定義式を h_α とかく. $\pm S$ に $d_D z_\lambda = dz_\lambda / \delta_\lambda$, $d_\Delta w_\alpha = dw_\alpha / h_\alpha = dw_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dw_\alpha^n / h_\alpha$ とおく.

$$f^*(d_D z_\lambda) = \psi_{\alpha, \lambda} d_\Delta w_\alpha$$

で W_α 上の関数 $\psi_{\alpha, \lambda}$ を定める. $\psi_{\alpha, \lambda}$ は正則になることを証明しよう.

$\psi_{\alpha, \lambda}$ は正則になることをみるには, Hartogs の定理により, $\text{codim} f \geq 2$ の閉集合 F の外でみれば, よいから, $\bar{f}^1(D)$ の各既約成分の一般の点で, 正則性を示せば十分である. 一方, $\bar{f}^1[D]$ の各既約成分の一般の点では, $\bar{f}^1(D)$ に対する正則性 (即ち, 対数的分岐因子が正になること, こと, $W - \bar{f}^1(D) \rightarrow V - D$ に対する対数的分岐因子を考へた) により OK なるから,

12

各 E_j の一般の点で考察する。 $\chi = 2$ は、
 $\Delta = f^{-1}(0)$ は空なので、 $h_2 = 1$ となる。 E_j の
 W_α での定義式を $w_\alpha^1 = 0$ としよう。 ± 5 は、
 $\delta_\lambda = z_\lambda^1$ としよう。 $\text{codim } f(E_j) \geq 2$ から、
 $f(E_j) \not\subseteq \Delta$ なので、 $p \in w_\alpha^1 = \dots = w_\alpha^n = 0$ とする
と p は $f(E_j)$ の一般の点で、 $f(p)$
は $z_\lambda^1 = \dots = z_\lambda^n = 0$ と仮定してよいことは
やはり Hartogs の定理による。

$f(p)$ は $f(E_j)$ の一般の点から、 $f(E_j)$ の非特
異点であり、 $z_\lambda^1 = z_\lambda^2 = 0$ に含まれる $(f(p))$ の近傍
 V_λ に対して) としてよい。 すると、 $f^* z_\lambda^1 = (w_\alpha^1)^\nu \varphi_1$,
 $\nu > 0$, $\varphi_1(0, w_\alpha^2, \dots, w_\alpha^n) \neq 0$; $f^* z_\lambda^2 = (w_\alpha^1)^\mu \varphi_2$, $\mu > 0$,
 $\varphi_2(0, w_\alpha^2, \dots, w_\alpha^n) \neq 0$ と書くことができる。

$$f^* \left(\frac{dz_\lambda^1}{z_\lambda^1} \wedge dz_\lambda^2 \wedge \dots \right) = \nu \left(\frac{dw_\alpha^1}{w_\alpha^1} + \frac{d\varphi_1}{\varphi_1} \right) \wedge (w_\alpha^1)^\mu \varphi_2.$$

$$\mu \frac{dw_\alpha^1}{w_\alpha^1} + \frac{d\varphi_2}{\varphi_2} \wedge \dots,$$

と計算すると直ちに $\psi_{\alpha\lambda}$ は w_α^1 に関して正則
となることをわかる。

$\{\text{div}(\psi_{\alpha\lambda})\}$ は W 上の正因子を定めるから、これ

13

と $R\mathcal{V}_f$ とおくと, $\mathcal{O}(R\mathcal{V}_f)|_{W_\alpha} = \mathcal{O}_{W_\alpha}/\mathcal{I}_{W_\alpha}$.
 又, $f^*\omega_V(D)|_{W_\alpha} = \mathcal{O}(-R\mathcal{V}_f)|_{W_\alpha} \cdot \omega_W(\Delta)|_{W_\alpha}$
 を示すことができる.

$$f^*\omega_V(D) = \mathcal{O}(-R\mathcal{V}_f) \cdot \omega_W(\Delta).$$

これを因子的に書き表すことは,

$$f^*(K(V)+D) \sim -R\mathcal{V}_f + K(W)+\Delta.$$

さて, f は双有理かつ, $\Delta = f^*[D]$ とすると,
 上の証明より $R\mathcal{V}_f$ は $\bar{R}_f$ と素因子 E_j で,
 $\text{codim}(E_j) \geq 2$ のすべしとおき置くと, f は
 関数的に例外的, ゆえに $n > 0$ について常に,

$$l(m(K(W)+\Delta)) = l(m(K(V)+D)).$$

この事実を, 鈴木孝一 (立教大) 氏により初めて
 証明された [6]. 彼の証明は, 双有理正則写像を
 permissible monoidal transformations に分解して, 一
 歩1歩調へるものであった.

§ 4 小平次元.

与えられた $(D \in V)$ に対して, その非特異性

14

$\mathcal{D} \in \mathcal{V}(\Delta \# W)$ とし, $m > 0$ に対し, $H^0(m(K(W) + \Delta)) = H^0(\omega_W(\Delta)^m)$ と考え, 前節の不变性により, これは, 非特異モデルの $\mathcal{V}$ により決まる. $\mathcal{V}$ は,

$$T_{\text{reg}}(\mathcal{D} \# V) := H^0(\omega_W(\Delta)^m)$$

$$P_m(\mathcal{D} \# V) := \dim T_{\text{reg}}(\mathcal{D} \# V)$$

$$\kappa(\mathcal{D} \# V) := \kappa(\Delta + K(W), W) = \bar{\kappa}(W - \Delta)$$

と置く.

$P_m(\mathcal{D} \# V)$ は $(\mathcal{D} \# V)$ の m -種数, $\kappa(\mathcal{D} \# V)$ は $(\mathcal{D} \# V)$ の 小平次元 である(定義).

一般に $f: (\mathcal{D}_1 \# V_1) \rightarrow (\mathcal{D} \# V)$ を, 支配的有理写像とし, 単射の保型写像

$$f^*: T_{\text{reg}}(\mathcal{D} \# V) \rightarrow T_{\text{reg}}(\mathcal{D}_1 \# V_1),$$

を与え, 従って $P_m(\mathcal{D} \# V) \leq P_m(\mathcal{D}_1 \# V_1)$, 又, $\kappa(\mathcal{D} \# V) \leq \kappa(\mathcal{D}_1 \# V_1)$.

f が双有理正則で, $f^*[D] \leq D_1 \leq f^*(D)$ ならば $P_m(\mathcal{D}_1 \# V_1) = P_m(\mathcal{D} \# V)$, $\kappa(\mathcal{D}_1 \# V_1) = \kappa(\mathcal{D} \# V)$.

15

§5 双有理群.

$\text{Bir}(\mathbb{D} \vee V) = \{ \varphi \in \text{Bir}(V) \mid \varphi[\mathbb{D}] = \mathbb{D} \}$ とおくと、前節の事実により、 $\text{Bir}(\mathbb{D} \vee V)$ は $\text{Trans}(\mathbb{D} \vee V)$ と表現空間にもつくと表わされる。

もし、 $(\mathbb{D} \vee V)$ が非特異で、 $K(V) + \mathbb{D}$ がアンプルなら、 $m(K + \mathbb{D})$ が very ample となる $m > 0$ 存在すると、 $f \in \text{Bir}(\mathbb{D} \vee V)$ に対し、 $\mathbb{P}^n_{m(K+\mathbb{D})}$ と $\mathbb{P}^n$ とが

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ \mathbb{P} \downarrow & & \downarrow \mathbb{P} \\ \mathbb{P}^n & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

ければ、 $N = \text{P}_m(\mathbb{D} \vee V) - 1$ とし、上の図式から、 $\text{Bir}(\mathbb{D} \vee V) \subseteq \text{Aut}_D(V)$ となる。とくに、 $V = \mathbb{P}^n$ で $\mathbb{D}$ が $\mathbb{P}^n$ 内の $\deg > n+1$ の非特異超曲面なら、 $\text{Bir}(\mathbb{D} \vee \mathbb{P}^n) \subseteq \text{PGL}(n+1)$ となる。

さて、一般に次の事実が成立する。

定理 $\kappa(\mathbb{D} \vee V) = \dim V$ なら $\text{Bir}(\mathbb{D} \vee V)$ は有限群。

証明は極めて簡単である。 $(\mathbb{D} \vee V)$ は非特異

16

としてよく, $m \gg 0$ にとると, $\Phi_m = \Phi_m(k+D)$ は V から $Y_m = \Phi_m(V)$ への双有理写像としてよい. 是より $(D \nmid V)$ と取り換えて, Φ_m は正則としてよい. $f \in \text{Bir}(D \nmid V)$ に対し, $f^*: T_{\text{reg}}(D \nmid V) \rightarrow T_{\text{reg}}(D \nmid V)$ は同型で, それは像型同型 $f_1: \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N$ と等しく. 即ち次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f} & V \\
 \Phi_m \downarrow & & \downarrow \Phi_m \\
 Y_m & & Y_m \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{P}^N & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{P}^N
 \end{array}$$

$F = \Phi_m(D)$ は閉集合である. $D = \sum \Gamma_i$ と既約分解し, Γ_i の生成束を ξ_i とする. F の生成束は $\Phi_m(\xi_i)$. $f_1 \Phi_m(\xi_i) = \Phi_m f(\xi_i) \in F$ なるので, $f_1(F) \subseteq F$. f_1 は同型だから, $f_1(F) = F$. よって, $f \in \text{Bir}(D \nmid V)$ は $f_1 \in \text{Aut}(Y_m - F)$ と等しい. $D \subseteq \Phi_m^{-1}(F)$ 故に, $\bar{\kappa}(V - D) \leq \bar{\kappa}(V -$

17

$\pi_m^{-1}(F) = \bar{\pi}(Y_m - F)$. - $\bar{\pi}$ $n = \pi(D \# V) = \bar{\pi}(V - D)$

なのより, $\bar{\pi}(Y_m - F) = \dim Y_m = n$. よって $\text{Aut}(Y_m - F)$

は有限群. - $\bar{\pi}$, $V \rightarrow \pi_m(V) = Y_m$ は双有理な

ため, $\text{Bir}(V) \cong \text{Bir}(Y_m)$ かつ

$$\begin{array}{ccc} \text{Bir}(V) & \cong & \text{Bir}(Y_m) \\ \cup & & \cup \end{array}$$

$$\text{Bir}(D \# V) \rightarrow \text{Aut}(Y_m - F)$$

なり, $\text{Bir}(D \# V) \subseteq \text{Aut}(Y_m - F)$. よって $\text{Bir}(D \# V)$ は有限群.

このようにして, 小次元により, $(D \# V)$ が双有理的によく捉えられることがわかる.

文献[2]では, $(D \# V)$ と, V が完備でないときにも考察し, 同様の有限性を一般に証明されてゐる. しかし, idea は全く同じである.

W を $\mathbb{P}^n$ の超曲面とするとき, $\text{Bir}(W \# \mathbb{P}^n) \rightarrow \text{Bir}(W)$ の像を W の Cremona 変換群という. これに対し, $\text{Bir}(W)$ を W の Riemann 変換群ということもある.

§ 6 極小性

極小モデルの問題は、双有理幾何での根本問題の一つである。

H を非特異完備多様体上の ample 因子とし、偏極多様体 (V, H) と考える。これを固定した所で、 (Δ, V) の極小性を次のように定義する：

(Δ, V) は H -相対的極小 $\Leftrightarrow$

$$\forall f \in \text{Bir}(V), \left(\text{もし, } f \text{ は } D\text{-pure} \right) \text{ に対し} \\ D \cdot H^{n-1} \leq f[D] \cdot H^{n-1}.$$

$D \cdot H^{n-1}$ は H で計測した D の次数だから、 V 内での双有理変換像の中で、次数最小のもを、 H -相対的に極小と云うわけであり。任意の (Δ, V) に対し、その存在は明らか。即ち Δ の V 内の双有理変換像の中で、次数最小のもを D とするとき、 (Δ, V) と (Δ, V) の H -相対極小モデルとよぶ。

与えられた (Δ, V) に対し、 (V, H) の同型を除いて、唯一つの H -相対的極小モデルが存在し

19a

ないとき, H -弱極小モデル とよぶ. 次に H -極小モデル を定義しよう.

$(D \not\sim V)$ を H -極小

- $\Leftrightarrow$ (1) $(D \not\sim V)$ を H -相対的極小,
 (2) $H^{n-1}D = H^{n-1} \cdot f[D]^{n-1}$ のとき $f \in \text{Aut}(V)$
 かつ $f^*H \sim H$. ($\sim$ は線型同値を示す).

定義により, H -極小な $(D \not\sim V)$ に対しては,

$$\text{Bir}(D \not\sim V) \subseteq \text{Aut}_H(V) = \{ \varphi \in \text{Aut}(V) \mid \varphi^*H \sim H \}.$$

とくに, $V = \mathbb{P}^n$ のとき, $\text{Aut}_H(V) = \text{Aut}(V) = \text{PGL}(n+1)$
 となる. $(W \not\sim \mathbb{P}^n)$ を H -極小なら, $\text{Bir}(W \not\sim \mathbb{P}^n) \subset \text{PGL}(n+1)$.

一般に言えば, 殆んどすべての $(D \not\sim V)$ は, H -極小なのだが, それを実際になることを確認することは難しい.

例. C を $\mathbb{P}^2$ 内の非特異な二次曲線とする.
 C 上の点列でなれた点をとると, それらは中

196

心の 2 次変換 $\varphi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ を定義され $\varphi[C]$ も
非特異的 2 次曲線になる. $(C \subset \mathbb{P}^2)$ も $(\varphi[C] \subset \mathbb{P}^2)$
も H -相対的極小であるが, $\varphi \notin \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ であ
ら, こゝからは H -極小ではない. 従って弱極
小でもないと思われろ; よく知られない.

同様にして, 2 重点 ω への G -2 次有理曲線 C
をとると, $(C \subset \mathbb{P}^2)$ は相対的に極小だが, H -
極小ではないことがわかる.

次の命題は, 1ヶ月程予想として, まさ(も)
にしてあったが, 藤田隆夫氏からここに
解いて城崎シンポジウム初日に教えてくれた(流石!)

命題 (藤田). $V \subset \mathbb{P}^n$ を非特異超曲面とする.

(i) $\deg V \geq n+1$ なら, $(V \subset \mathbb{P}^n)$ は H -相対的極小.

(ii) $\deg V \geq n+2$ なら, $(V \subset \mathbb{P}^n)$ は H -極小.

証明. $d = \deg V$, $\varphi \in \text{Cr}_n$ なる変換 $V' = \varphi[V]$
は, 次数 d' の超曲面とする.

2°

$$P_m(V' \# \mathbb{P}^n) = P_m(V \# \mathbb{P}^n) = l(m(d-n-1))$$

である。よって、容易に、

$$P_m(V' \# \mathbb{P}^n) \leq l(m(K(V') + V)) = l(m(d'-n-1))$$

がわかる。

$d \geq n+1$ ならば、 $m=1$ と、

よって、

$$l(m(d-n-1)) \leq l(m(d'-n-1))$$

がわかる。

$d = n+1$ ならば、 $d' \geq n+1$ 。よって $d' \geq d$ 。

$d \geq n+2$ にも m^{n-1} の係数を比較して $d' \geq d$ を

える。

$d \geq n+2$ かつ $d = d'$ とする。 $m=1$ とし、

前式の等式 $P_1(V' \# \mathbb{P}^n) = l((d'-n-1)H)$ を用いる。即ち、 $(Y \# W)$ を $(V' \# \mathbb{P}^n)$ の非特異モデルとすると、次の可換図式をえる：

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{P}^N & \xleftarrow{\Phi_1} & V & \subset & \mathbb{P}^n \\
 & & \uparrow f & & \\
 \mathbb{P}^N & \xleftarrow{\text{ver } \Phi_1} & V' & \subset & \mathbb{P}^n \\
 & \nwarrow \Phi_1 & \uparrow & & \uparrow \\
 & & Y & \subset & W
 \end{array}$$

21

こゝに Verw は, $\mathbb{P}^n$ の $d-n-1$ -Veronese embedding を与える埋入と $V' \subset \mathbb{P}^n$ の合成. したがって, 更に $V \subset \mathbb{P}^N$ は 同じく Verw. である. ゆえに ω は同型で, 従って, 線型になる.

$\mathbb{P}^2$ 内の 2 重直線個の 6 次曲線 C について
は, $\chi(C \vee \mathbb{P}^2) = 0$, H -相対的に極小だが,
 H 極小にはならないと知られると想像される.

一般に, 固有双有理幾何では,

相対的極小モデルは存在し,

$\chi = n$ なら相対的極小モデルは極小になること, $n=2$ なら正しい. 定常非特異の
とき $\chi \geq 0$ なら極小になるが, それは知ら
ない. 一般に期待できないことだ.

§7. 2重点 曲線

平面曲線の H -極小性は、比較的興味深い問題である。これを一般に論じることは後に回し、ここでは、2重点のみをもつ平面曲線と見てみる。

C を $g(C) = 0$, $d = \deg C$, C の特異点はいずれも2重点とする。しかし、無限に近～特異点も許容する。特異点の数は $(d-1)(d-2)/2$ である。

$S_0 = \mathbb{P}^2$ とし、 l 回2次変換(局所2次変換)して、 C の非特異モデル C_l を得る。即ち、次の列

$$\begin{array}{ccccccc} S_l & \xrightarrow{\mu_l} & S_{l-1} & \xrightarrow{\mu_{l-1}} & \cdots & \rightarrow & S_1 \xrightarrow{\mu_1} S_0 = \mathbb{P}^2 \\ \cup & & \cup & & & & \cup & \cup \\ C_l & & C_{l-1} & & & & C_1 & C_0 = C \end{array}$$

$C_j \subset C_{j-1}$ の μ_j による逆変換、即ち $\mu_j^{-1}[C_{j-1}]$ とする。 $E_j = \mu_j^{-1}(P_j)$, 但し P_j は μ_j の中心。

$\{P_1, \dots, P_l\}$ は C の無限に近～特異点と定め、 C の特異点全体とする。 $\varphi_j = \mu_{j+1} \circ \cdots \circ \mu_l :$

23

$S_\ell \rightarrow S_j$ とある。 $\varphi_j^* F \in F$ と略記する。

$K_\ell = K(S_\ell)$ とする。

$$K_\ell + C_\ell \sim (d-3)H - E_1 - \dots - E_\ell.$$

$\ell \geq 2$ には H は $\mathbb{P}^2$ の直線である。 $\widetilde{E} = E_1 + \dots + E_\ell$ とおく。

$$C_\ell \sim dH - 2\widetilde{E}$$

なる。

$$2(K_\ell + C_\ell) \sim (d-6)H + C_\ell.$$

よって $d \geq 6$ ならば $\chi(C \not\sim \mathbb{P}^2) \geq 0$.

$C_\ell^2 = d^2 - 4\ell = -4 - d(d-6)$. したがって, $d \leq 5$ ならば $C_\ell^2 \geq 1$.

$$(K_\ell + C_\ell, C_\ell) = 2g(C_\ell) - 2 = -2$$

なる。

$|m(K_\ell + C_\ell)| \neq \emptyset$ とあるは, $F \in |m(K_\ell + C_\ell)|$ ならば, $F \cdot C_\ell = -2m$. ゆえに, $C_\ell^2 > 0$ であるならば $F \cdot C_\ell \geq 0$ となり矛盾. 従って $d \leq 5$ ならば $\chi(C \not\sim \mathbb{P}^2) = -\infty$ である. 2節の定理によると, このような C は, $\varphi \in C_{12}$ により, 直線になることわかれる.

24

$d = 6$ とすると,

$$2(K_L + C_L) \sim C_L$$

よって $C_L^2 = -4$. C_L は無論 既約だから,

$$P_{2m}(C \not\subset \mathbb{P}^2) = 1, \quad P_{2m+1}(C \not\subset \mathbb{P}^2) = 0 \text{ となる.}$$

$d \geq 7$ としよう.

$$2(K_L + C_L) \sim (d-6)H + C_L$$

なるので, 上の補題に注意する.

補題 Γ は既約とし, D は正因子とする.

$(\Gamma + D, \Gamma) < 0$ ならば $|\Gamma + D|$ は Γ を固定成分にする.

証明は自明だから略.

$\chi = 2$ $\overline{X}_2 = \overline{X}_2(K_L + C_L) : S_L \rightarrow \mathbb{P}^N, N = B_2 - 1$ と
 考へると, $\overline{X}_2 = \overline{X}_{(d-6)H}$ だから, S_L は $S_L \rightarrow S$
 と $S \subset \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^N$, $\mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ は $d-6:2$ の Veronese
 埋入との合成. $f \in \text{Bir}(C \not\subset \mathbb{P}^2)$ は, Veronese
 の間の同型を惹き起すから, 結局, $\mathbb{P}^2$ の同
 型となる. ゆえに,

$$\text{Bir}(C \not\subset \mathbb{P}^2) = \text{Aut}_C(\mathbb{P}^2) = \{ \varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2) \mid \varphi(C) = C \}.$$

25

C と Γ とを $\mathbb{P}^2$ の 2 重点のみを有理曲線とする。
 $\deg C \geq 7$ かつ, $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ を $\Gamma = f^{-1}[C]$ とおいたとき, 前と同じ論法により, $f \in \text{PGL}(3)$ となる。

$d \geq 7$ であれば, $g(C) \geq 1$ でも, C が 2 重点しかもたないときは, 同様の事実が成立する。

§ 8. N -極小性

C を P^2 内の d -次曲線とする. $\{p_1, \dots, p_\ell\}$ を C の (無限に近い) 特異点とする. p_j での重複度を m_j とし, $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_\ell$ と仮定しておく. 次の重要な事実は, 鈴木氏により見出された

補題(鈴木). $d \geq m_1 + m_2 + m_3$ ならば $P_{m_3}(C \# P^2) \geq 1$.

証明. $P_1(C \# P^2) = g(C_0)$ 故に, $g(C_0) = 0$ と仮定してよい. 前節の記号を用いると,

$$K_\ell + C_\ell \sim (d-3)H - \sum_{j=1}^{\ell} (m_j-1)E_j.$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} m_3(K_\ell + C_\ell) &\sim (dm_3-3m_3)H - \sum m_3(m_j-1)E_j = \\ &(m_3-1)dH - \sum m_3(m_j-1)E_j + (d-3m_3)H \\ &\sim (m_3-1)C_\ell + \sum (m_3-m_j)E_j + (d-3m_3)H. \end{aligned}$$

p_1 と p_2 とを結ぶ直線の (μ_1, μ_1, Γ) に $\neq 3$ 個の交点 ΣL_{12} とし, これの $\mathcal{P}_3$ による逆像 ΣL_{12} となる. すると,

$$E_1 + E_2 + L_{12} \sim H.$$

27

ゆゑに,

$$(m_3 - m_1) E_1 + (m_3 - m_2) E_2 + (d - 3m_3) H \sim$$

$$(d - 3m_3) L_{12} + (d - m_1 - 2m_3) E_1 + (d - m_2 - 2m_3) E_2$$

となり、これは正因子、 t_1 と t_2 の G とおく。

かくして、

$$m_3 (K_\ell + C_\ell) \sim (m_3 - 1) C_\ell + G + \sum_{j=4}^{\ell} (m_3 - m_j) E_j$$

となり、 $P_{m_3} \geq 1$ とおくと、

28

従って, $\chi(C \# \mathbb{P}^2) = -\infty$ なる $d \geq m_1 + m_2 + m_3$ である. この不等式は Noether の不等式 とよばれてゐる (M. Noether).

さて, $\varphi \in G_2$ とする. H は $\mathbb{P}^2$ の一般の直線とすると, $\deg(\varphi^*[H])$ は φ の次数とよぶことが出来る. $C = \varphi^*[H]$ とおけば, $(C \# \mathbb{P}^2)$ と $(H \# \mathbb{P}^2)$ は双有理同値だから, $\chi(C \# \mathbb{P}^2) = \chi(H \# \mathbb{P}^2) = \chi(A^2) = -\infty$. ゆえに, Noether の不等式が成立する. このこと, Noether の不等式の起源である.

Noether の不等式の成立しない平面曲線 C は, N -極小 とよぶ.

次の問題-予想を解けようである.

問題-予想. N -極小 $\Leftrightarrow H$ -相対的極小.

これを仮定すると, C の H -相対的極小性の問題は N -極小に帰着され完全円満に解かれる.

29

たことがえられる。

2次変換論との関連では、次のように解けることも望ましい。

C が N -極小でないとき、2次変換 ^{と $C \rightarrow C'$ と}により C の次数を下げれる。

N -極小から、11又の極小性が出るだろう。

即ち、 C が $d \geq m_1 + m_2 + m_3$ を満たすとき、

1) $g(C) \geq 1$ なら

$K_C + C$ は半正値 (numerically effective)

2) $g(C) = 0$ なら、 $\beta = -C^2$ とすると、

$K_C + C - 2C/\beta$ は半正値。

(証明は、容易: [4] 参照)。¹¹、これは正しい。11又の極小性^{は出ない} (前田)

即ち、このことにより、 $P_m(C + P^2)$ は半正値性の因子の消失定理により、容易に示される。

これらの事により、 N -極小性から、 H -相対的極小性を示さねばならず、これにより平面曲線の性質が解明に結び出される (まだ) のである。

30

とす。

$\chi(C \vee \mathbb{P}^2) = -\infty$ ならば C は N -極小でないから、 H -相対的極小であることがわかれは、2次元極小 C の次数が下がり、そこで $\chi = -\infty$ を言えるから、 $\sim$ は直線になる。

よって、次の定理が出る

$\chi(C \vee \mathbb{P}^2) = -\infty \iff C$ は Cremona 変換で直線になる

これは、Coolidge の定理である[1]。Mohan-Kumar[5] は、これを精密にし定式化を 宮西-杉江流の議論で証明した。そこで藤田の補題

($\chi(C+K, S) = -\infty$ ならば S 上の F に対し、 $t \rightarrow \infty$ のとき $|F + t(C+K)| = \emptyset$) を本質的に使われている。

31

Noetherの不等式の重要性を承え、
可約の場合にも、類似の式を導く必要が生
じる。

即ち、 $C_1 + \dots + C_r$ を $\mathbb{P}^2$ 上の因子とすると、

$\kappa(C_1 + \dots + C_r \notin \mathbb{P}^2) = -\infty$ なら $C_1 + \dots + C_r$ の
特異性について何かいえるか？

は、少し興味深い問題だが難かしい。

もう少しは、より具体的な問題をやろう。

C_1, C_2 を既約とすると、

$\kappa(C_1 + C_2 \notin \mathbb{P}^2) = -\infty \Leftrightarrow C_1 + C_2$ は

Cremona 変換で、2直線に変換される？
は証明できるか？

もっと難しそうな、しかし本質的な問題は
3次元版である。

S を $\mathbb{P}^3$ の既約曲面とすると、

$\kappa(S \notin \mathbb{P}^3) = -\infty$, かつ S は有理曲面

とすると、 S は、 $\mathbb{P}^3$ 内の平面に Cremona 変
換でうつせるか？

32

Noether不等式を3次元に一般化する : とは
更に難しく, 困難な問題である.

問 $d = \deg S$, $\kappa(S \# \mathbb{P}^3) = -\infty$ のとき, S の
特異性について成立する不等式を見出せ?

この問題について何かいえるかは何もわ
らない.

しかし, $\kappa(S \# \mathbb{P}^3) = -\infty$ のとき, 何らかの
簡単な Cremona 変換で, $\deg S$ を下げることに
できるなら, この種の変換で, Cr_3 を生成され
るであろう.

12月2日 城山崎にて.

仕舞 (東京に帰ってから) 12月21日

pure な双有理変換の概念は実際本質的であ
る. なぜなら, $V \supset D$, $D = \sum_{i=1}^r D_i$, $D_i = \{x_i = 0\}$ と
表す D_i , その生成系 $\mathcal{G}_i$ で表わしているとき,
 R で $\mathcal{G}_i$ での V の局所環 R_i の共通部分 $\cap R_i$
を表すと $\text{Bir}(D \# V) = \text{Aut}_k(\cap R_i)$ が成立する
からである.

しかし, pure でない双有理変換も有用であ

33

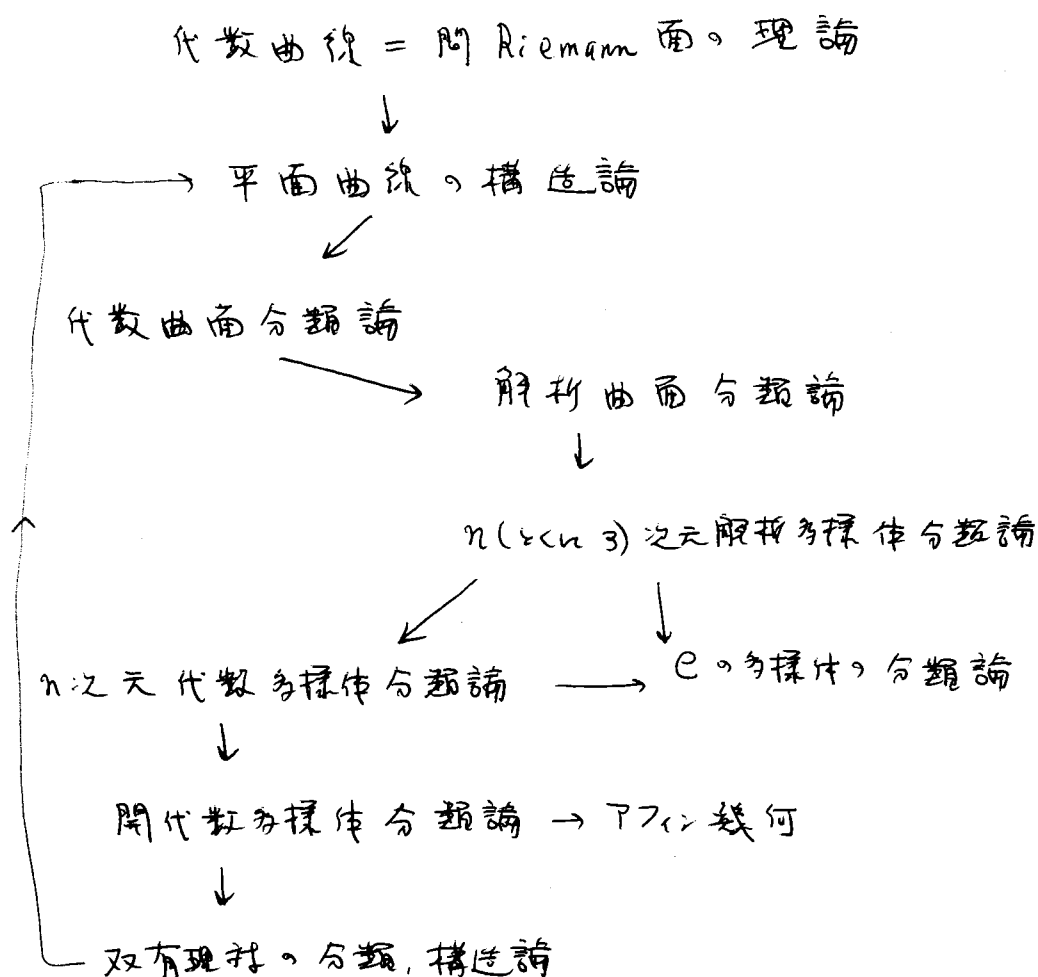
る。とりわけ、 P^2 内の直線族の研究に不可欠の手段として、'impure standard quadratic transformation' を登場してこた、今では判別としないことも多いから、ここでは述べられない。しかし、ゆえにそういえないこともまた、数えて最も楽しいことなのではないか。夢を維持して正月を暮らしたと思う。

感想

$\kappa(C \nmid P^2) = 0$ な C は、Cremona 変換で、非特異な双曲線又は、10個の2重点をもち6双曲線に変換されること (Coolidge, Mohan-Kumar, Murthy, Suzuki), 3 (7, $\kappa(C \nmid P^2) = 1$ なる C は $g = 0, 1, \geq 2$ とあり $g \geq 2$ のとき C は超楕円曲線で、各 $C \nmid P^2$ は N -極小のモデルをとると、極めて簡単になること ([4], [5]) をいえない、この事実は、Bertini の研究によつて、ある程度わかってゐる。すると、代数曲面論形成以前である。

そこで、概念的歴史を構造論から雑にかゝてみると、

34



双有理性の幾何は大物であるわけではなく、
 言、その代は、exercise の初を提議するだけ
 かも知れない。しかし、又何に興味があるもの
 が産出されるかもしれない。これも初夢である。