

Topological spherical space form の位相的複雑さ

— Python を用いた決定 —

九州大学・数理学研究院 岩瀬則夫

Norio IWASE

Faculty of Mathematics, Kyushu University

1 位相的球空間形

1.1 位相的球空間形

- G — 球面 S^n に作用する有限群

定義 1.1 (位相的球空間形). $M = S^n/G : G$ の球面 S^n への作用は自由かつ連続

- $\mathbb{H}$ — 四元数体
- $S(\mathbb{H}) \approx S^3$ — ノルム 1 の四元数全体のなす Lie 群
- S^{2h+3} — $\mathbb{H}^{h+1}$ の単位球面, $S(\mathbb{H})$ の左からの (等長的な) 作用を受ける。
- $H_k = \langle a, b \mid a^2 = b^k, a^4 = 1, \bar{a}ba = \bar{b} \rangle < S(\mathbb{H})$ ($k = 2, 3, 4, \dots$) — 一般四元数群
- $H_2 \cong Q = \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \mid \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} \rangle = \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\} \subset \mathbb{H}$ — 四元数群

定義 1.2. $N_h(k) := S^{4h+3}/H_k$ と置く。特に $N_h := S^{4h+3}/Q_8$, $M := N_0$ と略記する。

2 — ロボット動作設計

2.1 位相的複雑さ

- X — ロボットの状態空間 (以下、 X は連結を仮定する)
- $\mathcal{P}X$ — X の中に描かれた道 (ロボット動作) 全体 — $\mathcal{P}X \supset \mathcal{L}X \supset \Omega X$
- $\varpi : \mathcal{P}X \rightarrow X \times X \iff \varpi(\ell) = (\ell(1), \ell(0))$ (動作の終着状態と出発状態)
- $\pi : P \rightarrow W$ — (全射) 連続写像

Notation 2.1 (ここだけ). $O \subset W$ が π -sectional $\iff \pi$ は O 上の section を持つ。

Definition 2.2 (A. S. Švarc, '58).

$\text{genus}(\pi) \leq n \iff \pi$ -sectional 開集合 $n+1$ 枚が W を覆う。

Definition 2.3. $\text{tc}(X) := \text{genus}(\varpi)$ (位相的複雑さ)

- 開集合 O 上での section は、局所的な動作設計を与える。
- 気持ちの上では $\text{tc}(X)$ はロボット動作設計の複雑さみたいなものを表す。

Theorem 2.4 (M. Farber '03).

$$\text{tc}(\mathbb{R}P^n) = \text{Imm } \mathbb{R}P^n - \delta_n, \quad \delta_n = \begin{cases} 1, & n = 1, 3, 7 \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

ただし、 $\text{Imm } M$ は多様体 M が Euclid 空間 E^n にはめ込める次元 n の最小数である。

2.2 L S カテゴリ数

- $\mathcal{P}_0 X = \varpi^{-1}(X \times \{*\}) \longrightarrow X$ の基点「 $*$ 」から出発する道 (ロボット動作) 全体
- $\varpi_0 : \mathcal{P}_0 X \rightarrow X \iff \varpi_0(\ell) = \ell(1)$ (終着状態) $\overset{\text{だいたい}}{\iff} \varpi_0 = \varpi|_{\mathcal{P}_0 X}$

Exercise 2.5. $U \subset X$ が ϖ_0 -categorical $\iff$ 包含写像 $U \hookrightarrow X$ が零ホモトープ

Definition 2.6 (Lusternik-Schnirelamann '34).

$\text{cat}(X) \leq m \iff m+1$ 枚の categorical 開集合が X 全体を覆う。

Theorem 2.7 (Farber, '03).

$$\text{cat}(X) \leq \text{tc}(X) \leq \text{cat}(X \times X) \leq 2 \text{cat}(X) \text{ --- L-S カテゴリ数と TC}$$

Example 2.8. (1) $\text{cat}(X) = 0 \iff X$ は可縮 (2) $\text{tc}(X) = 0 \iff X$ は可縮

(3) $\text{cat}(X) \leq 1 \iff X$ は co-H-空間 (4) $\text{cat}(S^n) = 1$ (5) $\text{tc}(S^n) = 1 \iff n$ は奇数

Theorem 2.9 (Miyata). $\text{cat}(N_h) = \dim N_h = 4h+3$

3 一般的結果

Definition 3.1 (Farber-Grant '07). $\text{tc}^s(X) \leq m \iff$ ロボット動作を『出発と終着を入れ替えると逆の道で、一致していたら動かない』ものに限定した位相的複雑さ。

Definition 3.2 (Farber '03, Farber-Grant '08).

(1) $\mathcal{I}_X(R) = \ker \Delta^* : H^*(X \times X; R) \rightarrow H^*(X; R)$ (注: $\overline{H}^*$ を使っても同じです)

$$(2) \mathcal{Z}_R(X) = \text{Max} \{m \geq 0 \mid H^*(X \times X, R) \supset \mathcal{I}_X(R)^m \neq 0\}$$

$$(3) \text{wgt}_{u;R}(\varpi) = \text{Max} \{m \geq 0 \mid \forall f: Y \rightarrow X \times X \text{ (genus}(f^*\varpi) < m), f^*(u) = 0\}$$

Theorem 3.3 (Farber-Grant '08). $\text{wgt}_{u;R}(\varpi) \leq \text{tc}(X)$ for a non-zero $u \in \mathcal{I}_R(X)$.

Theorem 3.4 (Y. Rudyak, A. Dranishnikov '09). If $\text{cat}(X) = \dim X = n \geq 3$, then $\exists \mathfrak{b} \in H^1(X, I(\pi))$ s.t. $\mathfrak{b}^n \neq 0$, where $\mathfrak{b}$ is the Bernstein class introduced by I. Bernstein.

上記を用いて Farber らが $\text{tc}(BG)$ ($\text{cd}(G) < \infty$) に対する目覚ましい結果を得ている。

4 fibrewise A_∞ 理論

4.1 (fibrewise) A_∞ 理論

- X — 位相空間

Theorem 4.1 (J. Milnor '56). 分類空間が X と弱同値となる位相群 G が存在する。

Theorem 4.2 (J. Stasheff '63). ΩX の A_∞ 構造 $P^\infty \Omega X$ は X と弱同値となる。

Theorem 4.3 (D. Benson '91). $EG \times_G BG$ が基点付き fibrewise 空間として $BG \times BG$ とホモトピー同値となる。ただし、 $EG \times_G BG$ の基点は $[e] \mapsto [e, *]$ で与えられ、 $BG \times BG$ の基点は diagonal map である。

- G — 離散群

Theorem 4.4. $\mathcal{L} BG$ は $EG \times_{\text{ad}} G$ と fibrewise A_∞ 同値で、特に $P_B^n \mathcal{L} BG \simeq_B^n EG \times_{\text{ad}} P^n G$

略証: ホモトピー同値 (fibrewise A_1 同値) はすぐに分かる。また fibrewise A_n 同値となる為の障害は行き先が離散群であるので自明である。(上の (Benson) を使うともう少し一般的に証明できる (Miyata) 終り.

4.2 fibrewise L-S 理論と位相的複雑さ

- $E = (E, p, X, s)$ — 写像 $s: X \rightarrow E$ は、射影 $p: E \rightarrow X$ に対する section である。

Definition 4.5. (I. James '95) $\text{cat}_B^B(E) \leq m \iff \exists \sigma: E \rightarrow P_B^m \Omega_B E$ s.t. $\sigma \circ e_m \simeq_B^B \text{id}$

(I-Sakai '10) $\text{cat}_B(E) \leq m \iff \exists \sigma: E \rightarrow P_B^m \Omega_B E$ s.t. $\sigma \circ e_m \simeq_B \text{id}$

$\Delta: X \rightarrow X \times X$ を基点とする fibrewise 空間 $(X \times X, \text{pr}_1, X)$ を $\text{d}(X)$ で表す。

Theorem 4.6 (I-S '10). (1) $\text{tc}(X) = \text{cat}_B(\text{d}(X))$ (2) $\text{tc}^M(X) = \text{cat}_B^B(\text{d}(X))$

注 4.1 $\text{tc}^M(X)$ は $\text{tc}(X)$ と同様に定義されるが、ロボットの動作設計に対して「出発状態と終着状態が同じ場合は動かない」という条件 (monoidal condition) を課している。

Corollary 4.7 (I-S '10). 次の二条件は同値である。

- (1) $\text{tc}(X) \leq m$ (2) $\sigma \circ e_m \simeq_B \text{id}$ を満たす $\sigma : d(X) \rightarrow P_B^m \mathcal{L} X$ がある。

Theorem 4.8 (I-S '12). $\text{tc}(X) \leq \text{tc}^M(X) \leq \text{tc}(X) + 1$.

Theorem 4.9 (J. Aguilar Gutiérrez and J. González, '21).

X が ANR ならば $\text{tc}(X) = \text{tc}^M(X)$ が成立する。

4.3 fibrewise L-S 不変量と TC 不変量

- $E = (E, p, X)$ — fibrewise 空間、 $s : X \rightarrow E$ — E の fibrewise 基点
- R — 可換環、 Λ — コホモロジー作用素の集合
- $e_m : P_B^m \Omega_B E \hookrightarrow P_B^\infty \Omega_B E \simeq_B^B E$ — natural map

Definition 4.10 (James '95, I-S 10'). (1) $H_B^*(E; R) := H^*(E, X; R)$.

(2) $\text{cup}_B(E; R) := \text{Max}\{m \geq 0 \mid H^*(E; R) \supset H_B^*(E; R)^m \neq 0\}$.

(3) $\text{wgt}_B(u; R) := \text{Max}\{m \geq 0 \mid e_{m-1}^*(u) = 0\}$.

(4) $\text{wgt}_B(E; R) := \text{Min}\{m \geq 0 \mid e_m^* : H_B^*(E; R) \rightarrow H_B^*(P_B^m \Omega_B E; R) \text{ is mono}\}$.

(5) $\text{Mwgt}_B(E; \Lambda) := \text{Min}\{m \geq 0 \mid \text{im } e_m^* \text{ is a direct summand as a } \Lambda\text{-module}\}$

Theorem 4.11 (I-S '10).

(1) $H_B^*(E; R) = \mathcal{I}_R(X)$ and $\text{cup}_B(E; R) = \mathcal{Z}_R(X)$ if $(E, p, X) = d(X)$.

(2) $\text{wgt}_B(u; R) = \text{wgt}_\varpi(u; R)$ if $(E, p, X) = d(X)$.

5 今回の主題 (I-Miyata)

- $M = S^n/G$, G は有限群 — 位相的球空間形 (ここでは G は向きを保つとする)

Remark 5.1. 通常 $2n-1 \leq \text{tc}(M) = \text{cat}_B(d(M)) \leq 2n$ しか (簡単には) 分らない。

Theorem 5.2. z を M の orientation class に対応する $H^n(M; \mathbb{F}_2)$ の生成元とする。

(1) 次の三条件は同値である。

i) $\text{wgt}_B(z \otimes z; \mathbb{F}_2) = 2n$ ii) $\text{wgt}_B(d(M); \mathbb{F}_2) = 2n$ iii) $\text{Mwgt}_B(d(M); \mathcal{A}_2) = 2n$

(2) 上のどれかの条件が成立すれば $\text{tc}(M) = \text{cat}_B(d(M)) = 2n$ である。(逆はいまのところできていない)

- $M = S^3/Q$ — 四元数群 $Q = \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}$ による S^3 の商空間

注 5.1 M についてすぐに分かるのは $5 \leq \text{tc}(M) = \text{cat}_B(d(M)) \leq 6$ までである。

Theorem 5.3. $\text{tc}(M) = \text{cat}_B(d(M)) = 6$.

6 証明の方針

6.1 線形問題への落とし込み

Theorem 6.1. $H^*(BQ; \mathbb{F}_2) \cong A \otimes \mathbb{F}_2[w]$, $A \cong \mathbb{F}_2[x, y]/(x^3, y^3, x^2 + y^2 + xy)$

Theorem 6.2. $H^3(M; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2\{z\}$, z は A の $x^2y = xy^2$ に対応する。

Theorem 6.3 (K. Fujii '73). $M = e^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup e_1^2 \cup e_2^2 \cup e^3$ (z は e^3 の双対) である。

Proposition 6.4. $H^6(M \times M; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2\{z \otimes z\}$

Proposition 6.5. $e_\infty^*(z \otimes z) \in H^\infty(P_B^\infty \Omega_B d(M); \mathbb{F}_2)$ is the class of $c \in Z^6(P_B^\infty \Omega_B d(M))$:

$$c[\tau][\{h_1\} \cdots \{h_k\}] = z(\tau) \cdot x^2y[h_1] \cdots [h_k]$$

Theorem 6.6. $e_\infty^*(z \otimes z) = [c]$

注 6.1 上の定理は *fibrewise* ホモトピー同値写像 $e_\infty : P_B^\infty \Omega_B d(M) \rightarrow d(M)$ の様子がよく分からないので *Serre spectral sequece* を用いて証明する。

線形写像 $\delta : C^5(P_B^5 \Omega_B d(M); \mathbb{F}_2) \rightarrow C^6(P_B^5 \Omega_B d(M); \mathbb{F}_2)$ の表現行列を T_δ 、 c の表現ベクトルを T_c とする。

Problem 6.7. 線形方程式 $T_\delta \mathbb{x} = T_c$ は $\mathbb{F}_2$ 上で解を持つか？また解はどう書けるか？

6.2 問題の簡易化

Definition 6.8. $C^\infty(P_B^\infty \Omega_B d(M))$ のコサイクル c' を次で定める。

$$c'[\tau][\{h_1\} \cdots \{h_k\}] = z(\tau) \cdot x^2[h_1] \cdots [h_k]$$

線形写像 $\delta' : C^4(P_B^4 \Omega_B d(M); \mathbb{F}_2) \rightarrow C^5(P_B^4 \Omega_B d(M); \mathbb{F}_2)$ の表現行列を $T_{\delta'}$ 、 c' の表現ベクトルを $T_{c'}$ とする。

Theorem 6.9. 線形方程式 $T_{\delta'} \mathbb{x} = T_{c'}$ が解を持つならば $T_\delta \mathbb{x} = T_c$ も解を持つ。

Theorem 6.10 (Python program). $T_{\delta'} \mathbb{x} = T_{c'}$ は解を持つ。($e_4^*(z \otimes x^2) = 0$ に相当)

注 6.2 簡易化した問題は大型計算機で7分程度の時間がかかった為、*Python program* を最適化した。この *program* を用いると、簡易化した問題が *M1 mac* 上で25秒で解決し、元の問題も半日程度で解決した。いずれも期待どおりの結果であった。¹

結論. Python を動かす場合、*M1 mac* は大型計算機より速い。

最後に. 本研究で作成した *Python program* の最適化において、九州大学情報基盤研究センターの南里豪志先生に貴重なアドバイスを多々頂きました。深く感謝致します。

¹The computation was carried out using the computer resource offered under the category of Trial Use Projects by Research Institute for Information Technology, Kyushu University.

7 プログラムの流れ

- 射影空間の次数を定める。
- 群 Q の multiplication と inversion の table を記述する。
- K. Fujii によって完全に決定された $e^0, e_1^1, e_2^1, e_1^2, e_2^2, e^3$ の境界を記述する。
- 定義に従って bar construction の境界を記述する。
- δ' の $\mathbb{F}_2$ 上の表現行列を二次元配列として記述する。
- 拡大係数行列 $[T_{\delta'}, T_{c'}]$ の階数 R と $T_{\delta'}$ の階数 r をガウスの消去法で求める。

— $R = r$ ならば解があり、 $R = r+1$ ならば解が無い —

$T_{\delta'} \times = T_{c'}$ が解を持つから定理 6.9 より $T_{\delta} \times = T_c$ も解を持ち、 $\text{wgt}_B(z \otimes z) = 6$ を得た。

A 解の記述

Python program では、群 Q の要素を $[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] = [e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b]$ と数字で記述し、 M のセルを $[e0, e11, e12, e21, e22, e3] = [e^0, e_1^1, e_2^1, e_1^2, e_2^2, e^3]$ と記述した。program は正常終了し、次の特殊解を吐き出した：(手計算するのはほぼ無理か)

One particular solution is :

$[e0|7|7|7|6] + [e0|7|7|6|6] + [e0|7|7|6|2] + [e0|7|7|2|5] + [e0|7|7|2|1] + [e0|7|7|5|3] +$
 $[e0|7|7|5|6] + [e0|7|7|5|5] + [e0|7|7|5|1] + [e0|7|7|1|3] + [e0|7|7|1|2] + [e0|7|3|6|5] +$
 $[e0|7|3|6|1] + [e0|7|3|5|3] + [e0|7|3|1|5] + [e0|7|6|7|5] + [e0|7|6|7|1] + [e0|7|6|3|3] +$
 $[e0|7|6|3|2] + [e0|7|6|3|5] + [e0|7|6|3|1] + [e0|7|6|6|2] + [e0|7|6|6|1] + [e0|7|6|2|7] +$
 $[e0|7|6|2|3] + [e0|7|6|2|6] + [e0|7|6|2|2] + [e0|7|6|2|1] + [e0|7|6|2|4] + [e0|7|6|5|3] +$
 $[e0|7|6|5|4] + [e0|7|6|1|7] + [e0|7|6|1|3] + [e0|7|6|1|2] + [e0|7|6|1|4] + [e0|7|2|7|6] +$
 $[e0|7|2|3|7] + [e0|7|2|3|2] + [e0|7|2|3|4] + [e0|7|2|6|6] + [e0|7|2|6|2] + [e0|7|2|2|6] +$
 $[e0|7|2|2|2] + [e0|7|2|2|5] + [e0|7|2|2|4] + [e0|7|2|5|2] + [e0|7|2|5|5] + [e0|7|2|5|1] +$
 $[e0|7|2|1|7] + [e0|7|2|1|3] + [e0|7|2|1|6] + [e0|7|2|1|4] + [e0|7|2|4|2] + [e0|7|5|7|6] +$
 $[e0|7|5|3|7] + [e0|7|5|3|2] + [e0|7|5|3|4] + [e0|7|5|6|3] + [e0|7|5|6|6] + [e0|7|5|6|2] +$
 $[e0|7|5|6|5] + [e0|7|5|2|2] + [e0|7|5|2|4] + [e0|7|5|5|3] + [e0|7|5|5|6] + [e0|7|5|5|2] +$
 $[e0|7|5|5|1] + [e0|7|5|1|3] + [e0|7|5|1|4] + [e0|7|5|4|2] + [e0|7|1|7|3] + [e0|7|1|7|2] +$
 $[e0|7|1|7|5] + [e0|7|1|3|3] + [e0|7|1|3|5] + [e0|7|1|6|3] + [e0|7|1|2|3] + [e0|7|1|2|6] +$
 $[e0|7|1|2|2] + [e0|7|1|2|4] + [e0|7|1|5|2] + [e0|7|1|5|5] + [e0|7|1|5|4] + [e0|7|1|1|3] +$
 $[e0|7|1|1|4] + [e0|7|1|4|3] + [e0|7|1|4|2] + [e0|7|1|4|5] + [e0|7|4|7|1] + [e0|7|4|3|7] +$
 $[e0|7|4|3|6] + [e0|7|4|6|7] + [e0|7|4|6|3] + [e0|7|4|6|6] + [e0|7|4|2|2] + [e0|7|4|2|4] +$
 $[e0|7|4|5|2] + [e0|7|4|5|4] + [e0|7|4|1|2] + [e0|7|4|4|2] + [e0|3|7|7|3] + [e0|3|7|7|2] +$
 $[e0|3|7|7|5] + [e0|3|7|7|1] + [e0|3|7|3|7] + [e0|3|7|3|3] + [e0|3|7|3|6] + [e0|3|7|3|5] +$
 $[e0|3|7|3|4] + [e0|3|7|6|5] + [e0|3|7|6|1] + [e0|3|7|2|3] + [e0|3|7|2|5] + [e0|3|7|5|7] +$
 $[e0|3|7|5|2] + [e0|3|7|5|5] + [e0|3|7|1|6] + [e0|3|7|1|4] + [e0|3|7|4|5] + [e0|3|7|4|1] +$
 $[e0|3|3|6|7] + [e0|3|3|2|1] + [e0|3|3|5|7] + [e0|3|3|5|3] + [e0|3|3|5|5] + [e0|3|3|1|6] +$
 $[e0|3|3|1|1] + [e0|3|6|7|3] + [e0|3|6|7|6] + [e0|3|6|7|2] + [e0|3|6|7|5] + [e0|3|6|3|7] +$
 $[e0|3|6|3|3] + [e0|3|6|3|6] + [e0|3|6|3|5] + [e0|3|6|3|4] + [e0|3|6|6|3] + [e0|3|6|6|6] +$
 $[e0|3|6|6|1] + [e0|3|6|6|4] + [e0|3|6|2|7] + [e0|3|6|2|3] + [e0|3|6|2|5] + [e0|3|6|2|1] +$
 $[e0|3|6|5|3] + [e0|3|6|5|5] + [e0|3|6|5|1] + [e0|3|6|1|7] + [e0|3|6|1|2] + [e0|3|6|1|5] +$
 $[e0|3|6|1|4] + [e0|3|6|4|7] + [e0|3|6|4|5] + [e0|3|2|7|1] + [e0|3|2|3|7] + [e0|3|2|3|6] +$
 $[e0|3|2|6|6] + [e0|3|2|6|2] + [e0|3|2|6|5] + [e0|3|2|6|4] + [e0|3|2|2|2] + [e0|3|2|2|5] +$

$[e0|3|2|2|1] + [e0|3|2|2|4] + [e0|3|2|5|7] + [e0|3|2|5|3] + [e0|3|2|5|6] + [e0|3|2|5|2] +$
 $[e0|3|2|5|5] + [e0|3|2|5|1] + [e0|3|2|1|2] + [e0|3|2|1|1] + [e0|3|2|4|2] + [e0|3|5|7|7] +$
 $[e0|3|5|7|6] + [e0|3|5|7|1] + [e0|3|5|3|3] + [e0|3|5|3|6] + [e0|3|5|3|5] + [e0|3|5|3|4] +$
 $[e0|3|5|6|6] + [e0|3|5|6|5] + [e0|3|5|6|1] + [e0|3|5|2|7] + [e0|3|5|2|2] + [e0|3|5|2|5] +$
 $[e0|3|5|2|4] + [e0|3|5|5|5] + [e0|3|5|5|4] + [e0|3|5|1|5] + [e0|3|5|4|2] + [e0|3|5|4|5] +$
 $[e0|3|5|4|1] + [e0|3|1|7|1] + [e0|3|1|3|7] + [e0|3|1|3|6] + [e0|3|1|3|5] + [e0|3|1|6|3] +$
 $[e0|3|1|6|6] + [e0|3|1|6|5] + [e0|3|1|2|6] + [e0|3|1|2|2] + [e0|3|1|2|4] + [e0|3|1|5|7] +$
 $[e0|3|1|5|6] + [e0|3|1|5|4] + [e0|3|1|1|2] + [e0|3|1|4|2] + [e0|3|4|6|5] + [e0|3|4|6|1] +$
 $[e0|3|4|5|3] + [e0|3|4|1|5] + [e0|6|7|7|3] + [e0|6|7|3|3] + [e0|6|7|3|6] + [e0|6|7|3|2] +$
 $[e0|6|7|5|3] + [e0|6|7|5|2] + [e0|6|7|5|4] + [e0|6|7|1|5] + [e0|6|7|4|3] + [e0|6|7|4|5] +$
 $[e0|6|3|7|2] + [e0|6|3|7|5] + [e0|6|3|7|1] + [e0|6|3|3|2] + [e0|6|3|3|5] + [e0|6|3|3|1] +$
 $[e0|6|3|6|3] + [e0|6|3|6|5] + [e0|6|3|6|1] + [e0|6|3|6|4] + [e0|6|3|2|3] + [e0|6|3|2|2] +$
 $[e0|6|3|2|1] + [e0|6|3|5|7] + [e0|6|3|5|6] + [e0|6|3|5|2] + [e0|6|3|1|2] + [e0|6|3|1|5] +$
 $[e0|6|3|1|4] + [e0|6|3|4|7] + [e0|6|3|4|3] + [e0|6|3|4|2] + [e0|6|3|4|1] + [e0|6|3|4|4] +$
 $[e0|6|6|7|5] + [e0|6|6|3|7] + [e0|6|6|3|4] + [e0|6|6|2|5] + [e0|6|6|2|4] + [e0|6|6|5|3] +$
 $[e0|6|6|5|6] + [e0|6|6|5|1] + [e0|6|6|1|3] + [e0|6|6|4|1] + [e0|6|6|4|4] + [e0|6|2|7|7] +$
 $[e0|6|2|7|2] + [e0|6|2|6|7] + [e0|6|2|6|1] + [e0|6|2|2|7] + [e0|6|2|2|2] + [e0|6|2|2|4] +$
 $[e0|6|2|5|7] + [e0|6|2|5|6] + [e0|6|2|5|2] + [e0|6|2|1|7] + [e0|6|2|1|3] + [e0|6|2|1|6] +$
 $[e0|6|2|1|2] + [e0|6|2|1|5] + [e0|6|2|1|1] + [e0|6|2|4|7] + [e0|6|2|4|2] + [e0|6|2|4|1] +$
 $[e0|6|2|4|4] + [e0|6|5|7|3] + [e0|6|5|7|2] + [e0|6|5|7|5] + [e0|6|5|7|1] + [e0|6|5|3|3] +$
 $[e0|6|5|3|6] + [e0|6|5|3|2] + [e0|6|5|3|5] + [e0|6|5|3|1] + [e0|6|5|6|7] + [e0|6|5|6|6] +$
 $[e0|6|5|6|5] + [e0|6|5|6|4] + [e0|6|5|2|6] + [e0|6|5|2|2] + [e0|6|5|2|5] + [e0|6|5|5|7] +$
 $[e0|6|5|5|3] + [e0|6|5|5|6] + [e0|6|5|5|2] + [e0|6|5|5|5] + [e0|6|5|5|4] + [e0|6|5|1|2] +$
 $[e0|6|5|1|1] + [e0|6|5|1|4] + [e0|6|5|4|6] + [e0|6|5|4|2] + [e0|6|5|4|5] + [e0|6|1|7|3] +$
 $[e0|6|1|7|2] + [e0|6|1|3|6] + [e0|6|1|3|5] + [e0|6|1|6|3] + [e0|6|1|6|6] + [e0|6|1|6|2] +$
 $[e0|6|1|6|1] + [e0|6|1|2|7] + [e0|6|1|2|2] + [e0|6|1|2|5] + [e0|6|1|2|1] + [e0|6|1|5|7] +$
 $[e0|6|1|5|2] + [e0|6|1|5|5] + [e0|6|1|5|4] + [e0|6|1|4|6] + [e0|6|1|4|5] + [e0|6|4|7|7] +$
 $[e0|6|4|7|2] + [e0|6|4|7|5] + [e0|6|4|3|3] + [e0|6|4|3|2] + [e0|6|4|6|7] + [e0|6|4|6|3] +$
 $[e0|6|4|6|1] + [e0|6|4|2|7] + [e0|6|4|2|3] + [e0|6|4|2|2] + [e0|6|4|5|6] + [e0|6|4|5|1] +$
 $[e0|6|4|1|7] + [e0|6|4|1|6] + [e0|6|4|1|2] + [e0|6|4|1|5] + [e0|6|4|1|1] + [e0|6|4|4|7] +$
 $[e0|6|4|4|2] + [e0|6|4|4|5] + [e0|2|7|7|5] + [e0|2|7|3|7] + [e0|2|7|3|2] + [e0|2|7|3|4] +$
 $[e0|2|7|6|7] + [e0|2|7|6|6] + [e0|2|7|6|2] + [e0|2|7|6|4] + [e0|2|7|2|3] + [e0|2|7|2|6] +$
 $[e0|2|7|2|2] + [e0|2|7|2|5] + [e0|2|7|2|4] + [e0|2|7|5|3] + [e0|2|7|5|6] + [e0|2|7|5|2] +$
 $[e0|2|7|5|1] + [e0|2|7|1|5] + [e0|2|7|1|4] + [e0|2|7|4|2] + [e0|2|7|4|5] + [e0|2|7|4|1] +$
 $[e0|2|3|7|7] + [e0|2|3|7|3] + [e0|2|3|7|1] + [e0|2|3|3|7] + [e0|2|3|3|6] + [e0|2|3|3|1] +$
 $[e0|2|3|6|3] + [e0|2|3|6|6] + [e0|2|3|6|2] + [e0|2|3|6|4] + [e0|2|3|2|6] + [e0|2|3|2|2] +$
 $[e0|2|3|2|5] + [e0|2|3|2|1] + [e0|2|3|2|4] + [e0|2|3|5|3] + [e0|2|3|5|6] + [e0|2|3|5|2] +$
 $[e0|2|3|5|1] + [e0|2|3|1|6] + [e0|2|3|1|2] + [e0|2|3|4|2] + [e0|2|6|7|7] + [e0|2|6|7|3] +$
 $[e0|2|6|7|2] + [e0|2|6|7|5] + [e0|2|6|3|7] + [e0|2|6|3|5] + [e0|2|6|3|4] + [e0|2|6|6|7] +$
 $[e0|2|6|6|5] + [e0|2|6|6|1] + [e0|2|6|6|4] + [e0|2|6|2|7] + [e0|2|6|2|2] + [e0|2|6|2|5] +$
 $[e0|2|6|2|1] + [e0|2|6|2|4] + [e0|2|6|5|3] + [e0|2|6|5|2] + [e0|2|6|5|1] + [e0|2|6|5|4] +$
 $[e0|2|6|1|7] + [e0|2|6|1|3] + [e0|2|6|1|2] + [e0|2|6|1|5] + [e0|2|6|4|7] + [e0|2|6|4|2] +$
 $[e0|2|2|7|3] + [e0|2|2|7|6] + [e0|2|2|7|2] + [e0|2|2|7|5] + [e0|2|2|7|1] + [e0|2|2|7|4] +$
 $[e0|2|2|3|6] + [e0|2|2|3|2] + [e0|2|2|3|5] + [e0|2|2|3|1] + [e0|2|2|6|3] + [e0|2|2|6|2] +$
 $[e0|2|2|6|4] + [e0|2|2|2|7] + [e0|2|2|2|3] + [e0|2|2|2|6] + [e0|2|2|5|3] + [e0|2|2|5|6] +$
 $[e0|2|2|4|7] + [e0|2|5|7|3] + [e0|2|5|7|6] + [e0|2|5|3|5] + [e0|2|5|3|1] + [e0|2|5|3|4] +$
 $[e0|2|5|6|7] + [e0|2|5|6|3] + [e0|2|5|6|2] + [e0|2|5|6|1] + [e0|2|5|6|4] + [e0|2|5|2|6] +$
 $[e0|2|5|5|6] + [e0|2|1|7|3] + [e0|2|1|7|6] + [e0|2|1|7|4] + [e0|2|1|3|7] + [e0|2|1|3|6] +$
 $[e0|2|1|6|3] + [e0|2|1|6|2] + [e0|2|1|6|5] + [e0|2|1|6|1] + [e0|2|1|6|4] + [e0|2|1|2|6] +$
 $[e0|2|1|1|7] + [e0|2|4|7|3] + [e0|2|4|7|2] + [e0|2|4|7|5] + [e0|2|4|7|1] + [e0|2|4|3|7] +$
 $[e0|2|4|3|6] + [e0|2|4|3|4] + [e0|2|4|2|7] + [e0|5|7|7|3] + [e0|5|7|7|6] + [e0|5|7|3|7] +$
 $[e0|5|7|3|1] + [e0|5|7|3|4] + [e0|5|7|6|3] + [e0|5|7|6|2] + [e0|5|7|6|5] + [e0|5|7|5|3] +$
 $[e0|5|3|7|2] + [e0|5|3|7|5] + [e0|5|3|7|1] + [e0|5|3|3|7] + [e0|5|3|3|6] + [e0|5|3|3|2] +$

$[e0|5|3|3|1] + [e0|5|3|6|6] + [e0|5|3|6|5] + [e0|5|3|2|7] + [e0|5|3|2|6] + [e0|5|3|1|4] +$
 $[e0|5|3|4|3] + [e0|5|3|4|1] + [e0|5|6|7|7] + [e0|5|6|7|2] + [e0|5|6|7|5] + [e0|5|6|7|1] +$
 $[e0|5|6|7|4] + [e0|5|6|3|6] + [e0|5|6|3|2] + [e0|5|6|3|5] + [e0|5|6|3|1] + [e0|5|6|6|7] +$
 $[e0|5|6|6|2] + [e0|5|6|2|7] + [e0|5|6|2|3] + [e0|5|6|2|6] + [e0|5|6|2|2] + [e0|5|6|2|5] +$
 $[e0|5|6|2|4] + [e0|5|6|5|2] + [e0|5|6|5|1] + [e0|5|6|1|3] + [e0|5|6|1|6] + [e0|5|6|1|2] +$
 $[e0|5|6|1|5] + [e0|5|6|1|4] + [e0|5|6|4|7] + [e0|5|6|4|3] + [e0|5|2|7|3] + [e0|5|2|3|3] +$
 $[e0|5|2|3|6] + [e0|5|2|3|5] + [e0|5|2|3|1] + [e0|5|2|3|4] + [e0|5|2|6|7] + [e0|5|2|6|3] +$
 $[e0|5|2|6|2] + [e0|5|2|2|3] + [e0|5|2|2|6] + [e0|5|2|5|3] + [e0|5|5|7|3] + [e0|5|5|7|6] +$
 $[e0|5|5|3|7] + [e0|5|5|3|3] + [e0|5|5|3|2] + [e0|5|5|3|1] + [e0|5|5|6|6] + [e0|5|5|6|2] +$
 $[e0|5|5|6|5] + [e0|5|5|6|1] + [e0|5|5|5|6] + [e0|1|7|7|7] + [e0|1|7|7|2] + [e0|1|7|7|4] +$
 $[e0|1|7|3|7] + [e0|1|7|6|7] + [e0|1|7|6|3] + [e0|1|7|6|5] + [e0|1|7|6|1] + [e0|1|7|2|7] +$
 $[e0|1|7|2|5] + [e0|1|7|5|5] + [e0|1|7|1|7] + [e0|1|7|1|6] + [e0|1|7|1|2] + [e0|1|7|1|5] +$
 $[e0|1|7|1|1] + [e0|1|7|4|7] + [e0|1|7|4|3] + [e0|1|3|7|6] + [e0|1|3|7|2] + [e0|1|3|7|5] +$
 $[e0|1|3|7|1] + [e0|1|3|3|7] + [e0|1|3|6|3] + [e0|1|3|6|5] + [e0|1|3|2|6] + [e0|1|3|1|7] +$
 $[e0|1|6|7|3] + [e0|1|6|7|5] + [e0|1|6|3|6] + [e0|1|6|3|2] + [e0|1|6|3|5] + [e0|1|6|6|3] +$
 $[e0|1|6|6|5] + [e0|1|6|6|4] + [e0|1|6|2|3] + [e0|1|6|2|2] + [e0|1|6|2|5] + [e0|1|6|2|4] +$
 $[e0|1|6|1|2] + [e0|1|6|1|5] + [e0|1|6|1|4] + [e0|1|6|4|3] + [e0|1|6|4|2] + [e0|1|6|4|5] +$
 $[e0|1|2|7|3] + [e0|1|2|7|6] + [e0|1|2|7|5] + [e0|1|2|7|1] + [e0|1|2|7|4] + [e0|1|2|6|3] +$
 $[e0|1|2|6|2] + [e0|1|2|6|4] + [e0|1|1|7|5] + [e0|1|1|3|7] + [e0|1|1|3|6] + [e0|1|1|6|1] +$
 $[e0|1|1|2|7] + [e0|4|7|2|3] + [e0|4|7|1|5] + [e0|4|7|1|1] + [e0|4|7|4|5] + [e0|4|3|7|6] +$
 $[e0|4|3|7|5] + [e0|4|3|3|7] + [e0|4|3|3|2] + [e0|4|3|3|4] + [e0|4|3|6|7] + [e0|4|3|6|6] +$
 $[e0|4|3|6|5] + [e0|4|3|6|1] + [e0|4|3|2|2] + [e0|4|3|2|5] + [e0|4|3|2|4] + [e0|4|3|5|3] +$
 $[e0|4|3|5|2] + [e0|4|3|1|5] + [e0|4|3|4|2] + [e0|4|6|7|3] + [e0|4|6|7|1] + [e0|4|6|7|4] +$
 $[e0|4|6|3|7] + [e0|4|6|3|3] + [e0|4|6|3|2] + [e0|4|6|3|5] + [e0|4|6|3|4] + [e0|4|6|6|7] +$
 $[e0|4|6|2|7] + [e0|4|6|4|3] + [e0|4|2|7|2] + [e0|4|2|7|5] + [e0|4|2|7|1] + [e0|4|2|3|7] +$
 $[e0|4|2|3|3] + [e0|4|2|3|6] + [e0|4|2|3|4] + [e0|4|2|6|7] + [e0|4|2|6|3] + [e0|4|2|2|3] +$
 $[e0|4|4|3|3] + [e0|4|4|6|7] + [e0|4|4|6|3] + [e12|7|7|2] + [e11|7|7|5] + [e12|7|7|1] + [e12|7|3|7] +$
 $[e11|7|3|3] + [e11|7|3|4] + [e11|7|6|7] + [e12|7|6|7] + [e12|7|6|3] + [e12|7|6|6] + [e11|7|6|2] +$
 $[e12|7|6|5] + [e12|7|6|1] + [e11|7|6|4] + [e11|7|2|3] + [e11|7|2|6] + [e11|7|2|2] + [e12|7|2|2] +$
 $[e11|7|2|5] + [e11|7|2|1] + [e12|7|2|4] + [e11|7|5|3] + [e12|7|5|3] + [e12|7|5|6] + [e11|7|5|2] +$
 $[e11|7|1|7] + [e12|7|1|2] + [e12|7|1|5] + [e12|7|1|4] + [e11|7|4|3] + [e11|7|4|2] + [e12|7|4|2] +$
 $[e11|7|4|1] + [e11|7|4|4] + [e11|3|7|7] + [e11|3|7|3] + [e11|3|7|6] + [e11|3|7|2] + [e12|3|7|2] +$
 $[e12|3|7|1] + [e11|3|7|4] + [e12|3|7|4] + [e11|3|3|7] + [e12|3|3|7] + [e11|3|3|2] + [e12|3|3|2] +$
 $[e11|3|3|1] + [e12|3|6|7] + [e12|3|6|3] + [e12|3|6|6] + [e12|3|6|5] + [e12|3|6|1] + [e11|3|2|7] +$
 $[e11|3|2|6] + [e12|3|2|2] + [e11|3|2|5] + [e11|3|2|1] + [e11|3|2|4] + [e12|3|2|4] + [e11|3|5|7] +$
 $[e12|3|5|3] + [e11|3|5|1] + [e11|3|1|7] + [e11|3|1|6] + [e12|3|1|6] + [e11|3|1|2] + [e11|3|1|5] +$
 $[e12|3|1|5] + [e11|3|4|7] + [e11|3|4|3] + [e11|3|4|6] + [e11|3|4|2] + [e12|3|4|2] + [e11|3|4|1] +$
 $[e12|6|7|7] + [e11|6|7|3] + [e12|6|7|2] + [e12|6|7|5] + [e11|6|3|7] + [e12|6|3|6] + [e11|6|3|5] +$
 $[e11|6|3|4] + [e12|6|3|4] + [e12|6|6|7] + [e12|6|6|3] + [e11|6|6|2] + [e11|6|6|5] + [e11|6|2|7] +$
 $[e12|6|2|7] + [e11|6|2|3] + [e11|6|2|2] + [e11|6|2|5] + [e12|6|2|1] + [e11|6|5|7] + [e12|6|5|7] +$
 $[e12|6|5|3] + [e11|6|5|2] + [e12|6|5|2] + [e11|6|5|5] + [e12|6|5|1] + [e11|6|1|7] + [e12|6|1|7] +$
 $[e12|6|1|6] + [e11|6|1|2] + [e11|6|1|5] + [e12|6|1|5] + [e11|6|1|1] + [e12|6|1|1] + [e11|6|1|4] +$
 $[e12|6|1|4] + [e12|6|4|7] + [e12|6|4|3] + [e11|6|4|5] + [e11|6|4|1] + [e12|2|7|7] + [e11|2|7|3] +$
 $[e11|2|7|1] + [e12|2|7|1] + [e11|2|7|4] + [e12|2|3|7] + [e11|2|3|3] + [e12|2|3|3] + [e11|2|3|6] +$
 $[e11|2|3|5] + [e11|2|6|7] + [e11|2|6|3] + [e11|2|6|6] + [e12|2|6|5] + [e11|2|6|1] + [e12|2|6|1] +$
 $[e11|2|2|7] + [e12|2|2|7] + [e12|2|2|3] + [e11|2|2|6] + [e11|2|5|7] + [e11|2|1|3] + [e11|5|7|7] +$
 $[e11|5|7|3] + [e11|5|3|7] + [e11|5|3|2] + [e11|5|3|4] + [e11|5|6|7] + [e11|5|6|3] + [e11|5|6|2] +$
 $[e11|5|2|7] + [e11|5|2|3] + [e11|5|2|6] + [e11|5|5|3] + [e11|1|7|7] + [e11|1|7|6] + [e11|1|7|2] +$
 $[e11|1|3|7] + [e11|1|3|3] + [e11|1|6|2] + [e11|1|2|7] + [e11|1|2|3] + [e11|1|2|6] + [e11|1|1|7] +$
 $[e12|4|7|1] + [e12|4|3|7] + [e12|4|6|7] + [e12|4|6|3] + [e21|7|7] + [e21|7|6] + [e21|7|2] +$
 $[e21|7|1] + [e22|7|1] + [e22|7|4] + [e22|3|3] + [e21|3|6] + [e22|3|2] + [e21|3|5] + [e22|3|5] +$
 $[e22|3|4] + [e22|6|7] + [e21|6|3] + [e22|6|3] + [e21|6|5] + [e21|2|7] + [e22|2|3] + [e21|2|2] +$
 $[e22|2|2] + [e3|7] + [e3|3]$

文 献

- [1] Alejandro Adem and R. James Milgram, *Cohomology of finite groups*, Second, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 309, Springer-Verlag, Berlin, 2004. MR2035696
- [2] Jorge Aguilar-Guzmán and Jesús González, *Motion planning in polyhedral products of groups and a Fadell-Husseini approach to topological complexity* (2021).
- [3] D. J. Benson, *Representations and cohomology. II*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 31, Cambridge University Press, Cambridge, 1991. Cohomology of groups and modules. MR1156302
- [4] Israel Bernstein, *On the Lusternik-Schnirelmann category of Grassmannians*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **79** (1976), no. 1, 129–134. MR400212
- [5] Michael Farber, *Topological complexity of motion planning*, Discrete Comput. Geom. **29** (2003), no. 2, 211–221. MR1957228
- [6] Alexander N. Dranishnikov and Yuli B. Rudyak, *On the Berstein-Svarc theorem in dimension 2*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **146** (2009), no. 2, 407–413. MR2475974
- [7] Edward Fadell and Sufian Husseini, *Category weight and Steenrod operations*, 1992, pp. 151–161. Papers in honor of José Adem (Spanish). MR1317569
- [8] Michael Farber, *Topological complexity of motion planning*, Discrete Comput. Geom. **29** (2003), no. 2, 211–221. MR1957228
- [9] Michael and Grant Farber Mark, *Symmetric motion planning*, Topology and robotics, 2007, pp. 85–104. MR2359031
- [10] Michael Farber and Mark Grant, *Robot motion planning, weights of cohomology classes, and cohomology operations*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), no. 9, 3339–3349. MR2407101
- [11] Kensô Fujii, *On the K-ring of S^{4n+3}/H_m* , Hiroshima Math. J. **3** (1973), 251–265. MR334184
- [12] Norio Iwase, *A_∞ -method in Lusternik-Schnirelmann category*, Topology **41** (2002), no. 4, 695–723. MR1905835
- [13] Norio Iwase and Michihiro Sakai, *Topological complexity is a fibrewise L-S category*, Topology Appl. **157** (2010), no. 1, 10–21. MR2556074
- [14] Norio and Sakai Iwase Michihiro, *Erratum to “Topological complexity is a fibrewise L-S category”* [Topology Appl. **157** (1) (2010) 10–21] [MR2556074], Topology Appl. **159** (2012), no. 10–11, 2810–2813. MR2923451
- [15] Norio Iwase, Michihiro Sakai, and Mitsunobu Tsutaya, *A short proof for $tc(K) = 4$* , Topology Appl. **264** (2019), 167–174. MR3975098
- [16] I. M. James, *Introduction to fibrewise homotopy theory*, Handbook of algebraic topology, 1995, pp. 169–194. MR1361889
- [17] L. Lusternik and L. Šnirel'man, *Topological methods in variational problems and their application to the differential geometry of surfaces*, Uspehi Matem. Nauk (N.S.) **2** (1947), no. 1(17), 166–217. MR0029532
- [18] John Milnor, *On spaces having the homotopy type of a CW-complex*, Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1959), 272–280. MR100267
- [19] Yuli B. Rudyak, *On category weight and its applications*, Topology **38** (1999), no. 1, 37–55. MR1644063
- [20] Michihiro Sakai, *A_∞ -spaces and L-S category in the category of fibrewise spaces*, Topology Appl. **157** (2010), no. 13, 2131–2135. MR2665235
- [21] James Dillon Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces. I, II*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 275–292; *ibid.* **108** (1963), 293–312. MR0158400
- [22] Jeffrey Strom, *Essential category weight and phantom maps*, Cohomological methods in homotopy theory (Bellaterra, 1998), 2001, pp. 409–415. MR1851266
- [23] A. S. Švarc, *The genus of a fiber space*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **119** (1958), 219–222. MR0102812