

Optimal return and optimality equation in controlled Markov jump processes

九丈・理 大坪義夫

§1. はじめに

連続時間マルコフ過程における最適化問題は、多数の文献で論じられている。Miller [10], Kakumamu [8], Doshi [2], Yasuda [18], Pliska [12], Stone [15] は、マルコフ決定過程における最適政策問題を、Fakuev [5], Thompson [17], Shirayayev [14] は、最適停止問題を、それぞれ扱っている。また、離散時間の場合に、Hordijk [7], Furukawa [6], Rieder [13] が、停止決定問題を扱っている。ここでは、[6]に基づいて、終端利得をもつマルコフ・ジャンプ過程における最適化問題を、control とは policy と stopping rule の両方を考えた場合について述べる。

§2. 問題の定式化

controlled Markov jump process は、5つの組 $(Z, A,$
(1)

g, λ, Q) で表現される。==に。

- (1) state space S : Polish space の空でない Borel subset,
 $Z \equiv S \times \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.
- (2) action space A : Polish space の空でない Borel subset.
 $(\mathcal{B}(S), \mathcal{B}(Z), \mathcal{B}(A))$ をそれぞれ S, Z, A の Borel field とする。
- (3) terminal reward g : Z 上の有界実数値関数で、次をみたす;
 - (i) 各 $t \geq 0$ に対し $g(\cdot, t)$ は $\mathcal{B}(S)$ -可測
 - (ii) 各 $x \in S$ に対し $g(x, \cdot)$ は $\mathbb{R}_+$ 上で右連続。
- (4) "jump rate" λ : $Z \times A \rightarrow \mathbb{R}_+$ と Markov kernel Q は、次の条件をみたす;
 - (i) 各 $t \geq 0$ に対し $\lambda(\cdot, t, \cdot)$ は $\mathcal{B}(S) \times \mathcal{B}(A)$ -可測。
 - (ii) 各 $(x, a) \in S \times A$ に対し $\lambda(x, \cdot, a)$ は $\mathbb{R}_+$ 上で右連続。
 - (iii) 自然数 $M < \infty$ が存在して、すべての $(z, a) \in Z \times A$ に対し $0 < \lambda(z, a) < M$ 。
 - (iv) 各 $(z, a) \in Z \times A$ に対し $Q(\cdot | z, a)$ は $\mathcal{B}(S)$ 上の確率測度。
 - (v) 各 $(x, t, a) \in Z \times A$ に対し $Q(\{x\} | x, t, a) = 0$ 。
 - (vi) 各 $(x, a) \in S \times A$ に対し $Q(\Lambda | x, \cdot, a)$ はすべての $\Lambda \in \mathcal{B}(S)$ に独立に、 $\mathbb{R}_+$ 上で区分的定数で右連続、かつ有限区間で有限個の不連続点をもつ。

(vii) 各 $t \geq 0$, $\Lambda \in \mathcal{B}(S)$ に対し $Q(\Lambda | \cdot, t, \cdot)$ は $\mathcal{B}(S) \times \mathcal{B}(A)$ -可測.

policy $\pi: Z \rightarrow A$ は次をみたすものとする;

- (i) 各 $t \geq 0$ に対し z , $\pi(\cdot, t)$ は $\mathcal{B}(S)/\mathcal{B}(A)$ -可測.
- (ii) 各 $x \in S$ に対し z , $\pi(x, \cdot)$ は $\mathbb{R}_+$ 上 z 区分的連続で右連続、かつ有限区間で有限個の不連続点をもつ.

$\Pi \equiv$ 二のような policy π の全体.

各 $\pi \in \Pi$ に対応する jump process $Z^\pi = (Z_t^\pi)_{t \geq 0} = (X_t^\pi, t)_{t \geq 0}$

は、次の確率法則にレヒヤッフて定める;

$$P_{(x,s)}^\pi [V(x,s) \leq t] = 1 - \exp \left\{ - \int_s^{s+t} \lambda(x, s', \pi(x, s')) ds' \right\},$$

$$P_{(x,s)}^\pi [X_{t+s}^\pi \in \Lambda | V(x,s) = t] = Q(\Lambda | x, s+t, \pi(x, s+t)),$$

$$(x,s) \in Z, \quad t \geq 0, \quad \Lambda \in \mathcal{B}(S).$$

ここで、 $V(x,s)$ は時刻 s で、state x を出発し z random time $V(x,s)$ の間、 $\tau=1$ ととまる holding time である。

このとき、Blumental-Gettoor [1, Chap. I, §12] と同様

にして、 Z^π は Markov jump process になる。それで、

sample space Ω を次をみたす関数 $\omega: \mathbb{R}_+ \rightarrow Z$ の全体と

考えよう; (i) 各 $t \geq 0$ に対し z , $y \in S$ が存在して、

$$\omega(t) = (y, t).$$

(ii) 各 $t \geq 0$ に対し z , 左極限 $\omega(t-0)$

(3)

をもつ. (iii) 各 $t \geq 0$ に対し, $\omega(t) = (x, t)$ のとき,
 $h > 0$ が存在して すべて $h' \in [0, h]$ に対し, $\omega(t+h') = (x, t+h')$.
 各 $\omega, \omega' \in \Omega$ に対し,

$$\rho(\omega, \omega') = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{\rho_j(\omega, \omega')}{1 + \rho_j(\omega, \omega')}$$

により, Ω に距離付けると, Ω は Polish space になる. $\mathbb{E}$
 に対し, ρ_j は 区間 $[j-1, j)$ 上の Ω における Skorokhod
 metric である. 二の二については, Parthasarathy [11,
 Chap. VII, §6] と Kuratowski [9, Chap. III, §33] を参
 照されたい。

各 $0 \leq s \leq t$ に対し, $\mathcal{F}_t^s \equiv \sigma(\omega(s') : s \leq s' \leq t)$,
 $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_\infty^0$. 各 $\pi \in \Pi$, $s \geq 0$ に対し,

$$C_s(\pi) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{stopping time } \tau \text{ w.r.t. } \{\mathcal{F}_t^s\}_{t \geq s} \\ \text{すべて } x \in S \text{ に対し, } P_{(x,s)}^\pi(s \leq \tau < \infty) = 1 \end{array} \right\}$$

とかく。

$\pi \in \Pi$, $\tau \in C_s(\pi)$ に対応する期待利得:

$$\varphi_\tau^\pi(x, s) \equiv E_{(x,s)}^\pi [g(Z_\tau^\pi)] \quad (x, s) \in Z.$$

このとき, 問題は, optimal return $U^*(x, s) = \sup_{\pi \in \Pi, \tau \in C_s(\pi)} \varphi_\tau^\pi(x, s)$
 をみつけることである. $(x, s) \in Z$).

$\pi^* \in \Pi$ かつ $\tau \in C_s(\pi)$, $s \geq 0$ とする。組 (π^*, τ) が optimal

とは, すべて $(x, s) \in Z$ に対し, $U^*(x, s) = \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}(x, s)$ のとき
 (4)

にいう。

§ 3. Universal measurability

X, Y を Polish space の空でない Borel subset とする。

$P(X) \equiv X$ 上のすべての確率測度の全体。

$P(Y|X) \equiv X$ を与えたときの Y 上の条件付確率測度の全体。

$\bar{P}(X) \equiv p \in P(X)$ なる dirac 測度 p の全体。

$\bar{P}(Y|X) \equiv p \in P(Y|X)$ なる dirac 測度 p の全体。

X と Y の product space を XY とかく。

$H_n \equiv A\mathbb{R}_+^0\Omega \cdots A\mathbb{R}_+^0\Omega$ ($3n$ factors) $n \geq 1$,

$H \equiv A\mathbb{R}_+^0\Omega \cdots$, $\mathbb{R}_+^0 = \mathbb{R}_+ - \{0\}$, A は action space,

$\mathbb{R}_+^0 = \mathbb{R}_+ - \{0\}$, Ω は sample space.

$\tilde{P}(H) \equiv H$ 上の確率測度 $\tilde{p}$ なるものをみたすものの全体;

すべての $\tilde{p} \in \tilde{P}(H)$ に対し $\tilde{p} = p_1 p_2 p_3 \cdots$,
 $\tilde{p} = \tilde{p}'$,

$$p_1 \in \bar{P}(A\mathbb{R}_+^0),$$

$$p_2 \in \bar{P}(\Omega | A\mathbb{R}_+^0),$$

$$p_{2m+1} \in \bar{P}(A\mathbb{R}_+^0 | H_m),$$

$$p_{2m+2} \in \bar{P}(\Omega | H_m A\mathbb{R}_+^0), \quad m \geq 1.$$

(5)

$\tilde{P}(H)$ is σ^* -field を与える. $\tilde{P}(H)$ は Polish space の Borel subset となる. $\tilde{P}(H_m)$, $m \geq 1$ についても同様に定義する. (cf. [3])

各 $\pi \in \Pi$, $(x, s) \in Z$ に対して,

$$\mu(x, s) \equiv \inf \{t-s \mid \pi(x, s) \neq \pi(x, t), t > s\},$$

$$\nu_1 \equiv \min \{\nu(x, s), \mu(x, s)\}, \quad \nu_m \equiv \min \{\nu(\omega(\xi_{m-1})), \mu(\omega(\xi_{m-1}))\},$$

$$m \geq 2, \quad \xi_0 = s, \quad \xi_m = s + \nu_1 + \dots + \nu_m, \quad m \geq 1.$$

各 $\omega \in \Omega$, $m \geq 1$ に対して $\omega_m: \mathbb{R}_+ \rightarrow Z$ を $t \geq 0$ に対して

$$\omega_m(t) = \begin{cases} (x_{m-1}(\omega), t) & \text{if } t < \xi_m(\omega), \\ (x_m(\omega), t) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

と定める. $\mathbb{E} \in \mathbb{E}$ に対して $x_m(\omega)$ は $\omega(\xi_m) = (x_m(\omega), \xi_m(\omega))$, $m \geq 1$ となる state である.

$\Omega_m \equiv \omega_m (\omega \in \Omega)$ の全体, $m \geq 1$.

各 $m \geq 1$, $\omega \in \Omega$ に対して,

$$t_{m1} \equiv \mu(x_m(\omega), \xi_m(\omega)), \quad t_{mk} \equiv \mu(x_m(\omega), \xi_m(\omega) + t_{m1} + \dots + t_{m(k-1)}), \quad k \geq 2.$$

$$T_{mk}(\omega) \equiv \xi_m(\omega) + t_{m1} + \dots + t_{mk}, \quad m \geq 1, \quad k \geq 1.$$

$$D_{m\ell} \equiv \left\{ (\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega \mid \begin{array}{l} x_m(\omega) = x_\ell(\omega') \quad \text{かつ} \\ [\xi_m(\omega), \xi_m(\omega) + t_m] \cap [\xi_\ell(\omega'), \xi_\ell(\omega') + t_\ell] \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

$m \geq 1, 1 \leq \ell \leq m,$

(6)

$t \in \mathbb{R}^+$ 且 $t_n = \mu(w(\xi_n))$, $t'_2 = \mu(w'(\xi_2))$.

$I_{n\ell} : D_{n\ell}$ 上 の indicator.

各 $\pi \in \Pi$, $n \geq 1$, $s \geq 0$ に対して.

$$H_n^\pi(s) \equiv A \mathbb{R}_+^0 \Omega_1 \cdots A \mathbb{R}_+^0 \Omega_n,$$

$\mathcal{B}(H_n^\pi(s))$: $H_n^\pi(s)$ の Borel field.

Lemma 3.1. $\pi \in \Pi$, $z = (\alpha, s) \in Z$, $p \in \widetilde{\mathcal{P}}(H)$ とする。

このとき, $p = P_z^\pi$ であるための必要十分条件は, すべて $n \geq 1$ に対して, $E_{nm} \in \mathcal{B}(H_n^\pi(s))$, $m \geq 1$ が存在して, すべて $n \geq 1$ に対して, $p(E_{nm}) = P_z^\pi(E_{nm})$.

証明は長くなるので略す。

次の 2 つの lemma は, Strauch [16] の Lemma 7.1, 7.2 に類似した結果である。

Lemma 3.2. γ が ZH 上の任意の有界 Borel-可測関数であるとする。このとき, $p\gamma$ は $Z\widetilde{\mathcal{P}}(H)$ 上で Borel-可測である。

$M(H_n) \equiv H_n$ 上の有界な Borel-可測関数の全体, $n \geq 1$.

$$\Lambda \equiv \{(z, p) \in Z\widetilde{\mathcal{P}}(H) \mid p = P_z^\pi \text{ for some } \pi \in \Pi\}.$$

Lemma 3.3. Λ は, $Z\tilde{P}(H)$ の Borel subset である。

(証明) 簡単に示される;

$r_{nm}, n \geq 1 \in \tilde{P}(H_n)$ の点, ε separate する $M(H_n)$ の countable subset とする. $n \geq 1$.

各 $n \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned}\Lambda_{1n} &\equiv \left\{ (z, p) \in Z\tilde{P}(H) \mid \begin{aligned} &\int r_{1n}(a, t, \omega) dp(a, t, \omega) \\ &= \int r_{1n}(a, t, \omega) dP_z^{(a, t)}(\omega) dp(a, t) \end{aligned} \right\}, \\ \Lambda_{nn} &\equiv \left\{ (z, p) \in Z\tilde{P}(H) \mid \begin{aligned} &\int r_{nn}(a, t, \omega, \dots, a_n, t_n, \omega) dp(a, \dots, \omega) \\ &= \int r_{nn}(a, \dots, \omega) dP_{\omega(\xi_{n-1})}^{(a_n, t_n)}(\omega_n) dp(a, \dots, a_n, t_n) \end{aligned} \right\}, \\ &\quad n \geq 2,\end{aligned}$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}^+, \pi \in \Pi, z \in Z, \omega \in \Omega$ に対して, $\pi(z) = a, \mu(z) = t$,
 $\pi(\omega(\xi_n)) = a_{n+1}, \mu(\omega(\xi_n)) = t_{n+1}, n \geq 1$, $\pi \in \mathbb{P}_{\omega(\xi_{n-1})}^{(a_n, t_n)}$
 は, Ω_n 上の確率測度 $P_{\omega(\xi_{n-1})}^\pi$ を表わす。

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}_{ne} &\equiv \left\{ (z, p) \in Z\tilde{P}(H) \mid \left(\iint I_{ne} p_{2n+1}(a_e, \xi_e(\omega) + t_e - \xi_n(\omega) \mid \omega(\xi_n)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot dp dp = p \otimes p(D_{ne}) \right) \right\}, \\ &\quad n \geq 1, 1 \leq e \leq n.\end{aligned}$$

$$\bar{\Lambda}_f \equiv \left\{ (z, p) \in Z\tilde{P}(H) \mid p\left(\lim_{k \rightarrow \infty} T_{fk}(\omega) = \infty\right) = 1 \right\}, f \geq 1.$$

であるとき,

$$\Lambda = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_{1n} \right) \cap \left[\bigcap_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \Lambda_{nm} \right) \cap \left(\bigcap_{e=1}^{n-1} \hat{\Lambda}_{n+e} \right) \right\} \right] \cap \left(\bigcap_{f=1}^{\infty} \bar{\Lambda}_f \right)$$

となり, したがって Lemma 3.2 から Λ は, $Z\tilde{P}(H)$ の Borel subset である。□

Theorem 3.1. $\tau \in \mathcal{T}$ かつ $\forall z \in Z$ $\pi \in \Pi$, $s \geq 0$ に対し $z \in C_s(\pi)$

と仮定する。このとき、 $v^* = \sup_{\pi \in \Pi} \varphi_\pi^\pi$

は、 Z 上 Z universally measurable である。

(証明). $\omega_z \in \Omega$ initial state が $z \in Z$ であるような

sample path とすると、 $g(\omega_z(t))$ は $Z \times H$ 上の有界 Borel-

可測関数である。これと Lemma 3.2 から、 $\bar{v}(z, p) =$

$\int g(\omega_z(t)) d\mu$ は (z, p) の Borel-可測関数である。

とすると、 $v^*(z) = \sup_{p \in \Lambda_z} \bar{v}(z, p)$, $\Gamma = \Gamma' \cup \Lambda_z =$

$\{p \mid (z, p) \in \Lambda\}$. $B_\alpha = \Lambda \cap \{(z, p) \in Z \times H \mid \bar{v}(z, p) > \alpha\}$

とすると、Lemma 3.3 から、 B_α は Borel.

$C_\alpha = \{z \mid v^*(z) > \alpha\}$ とすると、これは B_α の projection

なので analytic. $\forall z \in C_\alpha$ は universally measurable

set である。□

§4. Optimal return

次の定義は、Shiryayev [14] に類似したものがある。

Definition 4.1. $f \in \mathcal{F}$. Z 上の $\bigvee$ universally measurable かつ
有界な

関数とする。

(i) 自然数 $N < \infty$ と $\pi \in \Pi$ に対し Z

f が (N, π) -excessive

(9)

$\Leftrightarrow$ 各 $(x, s) \in S \times [0, N)$ に対し $\mathbb{Z}$.

$$f(x, s) \geq E_{\alpha, s}^{\pi} [f(\mathbb{Z}_{\alpha}^{\pi})], \quad t \in [s, N],$$

$$\lim_{t \downarrow s} f(\mathbb{Z}_{\alpha}^{\pi}) \geq f(x, s) \quad P_{\alpha, s}^{\pi} - \text{a.s.}$$

(ii) $N < \infty$ に対し $\mathbb{Z}$

f が N -excessive

$\Leftrightarrow$ 各 $\pi \in \Pi$ に対し $\mathbb{Z}$, f が (N, π) -excessive.

(iii) f が excessive

$\Leftrightarrow$ 各 $N < \infty$ に対し $\mathbb{Z}$, f が N -excessive.

(iv) f が "majorant of q "

$\Leftrightarrow$ 各 $\mathbb{Z}$ の $z \in \mathbb{Z}$ に対し $\mathbb{Z}$, $f(z) \geq q(z)$.

Definition 4.2. $f \in \mathcal{E}$, "majorant of q " が N -excessive

な関数とする。

f : smallest N -excessive majorant of q

$\Leftrightarrow$ 任意の "majorant of q " かつ N -excessive 関数

数 h に対し $\mathbb{Z}$, 各 $\mathbb{Z}$ の $z \in S \times [0, N]$ に対し

$$f(z) \leq h(z).$$

(同様に $\mathbb{Z}$, smallest excessive majorant of q を定義する。)

各 N の自然数 $N < \infty$ と $\pi \in \Pi$ に対し $\mathbb{Z}$, 列 $\{v_n^{\pi}(t)\}_{n=0,1,2,\dots}$

を次の関係式で定める;

(10)

$$v_N^\pi(x, s) = \max \left\{ f(x, s), E_{(x, s)}^\pi [v_N^\pi(Z_{R_m(s)}^\pi)] \right\},$$

if $(x, s) \in S \times [0, N)$,

$$v_N^\pi(x, s) = f(x, s) \quad \text{otherwise,}$$

$$\text{f.e.l. } R_m(s) = \min_i \{ i \cdot 2^{-m} \mid i \cdot 2^{-m} > s \}.$$

各 $N < \infty$, $\pi \in \Pi$ に対し 2.

$$v_N^\pi(x, s) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} v_N^\pi(x, s), \quad (x, s) \in Z,$$

$$V_N^\pi(x, s) \equiv \begin{cases} \sup_{\tau \in C_s^\pi} \varphi_\tau^\pi(x, s) & \text{if } (x, s) \in S \times [0, N), \\ f(x, s) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

とおく. f.e.l. $C_s^\pi \equiv \{ \tau \in C_s^\pi \mid P_{(x, s)}^\pi(\tau \leq N) = 1, x \in S \}$.

各々の自然数 $m < \infty$, $N < \infty$ と各 $\pi \in \Pi$ に対し 2.

$$\Gamma_N^m \equiv \{ z \mid v_N^\pi(z) \leq f(z) + \frac{1}{m} \},$$

$$\sigma_N^m \equiv \inf \{ t \geq s \mid Z_t^\pi \in \Gamma_N^m \}, \quad s \geq 0,$$

とおく。

Theorem 4.1. 各々の $N < \infty$, $\pi \in \Pi$ に対し 2.

(i) すべて $(x, s) \in Z$ に対し $v_N^\pi(x, s) = V_N^\pi(x, s)$.

(ii) v_N^π は (N, π) -excessive.

(iii) 各 $x \in S$ に対し $v_N^\pi(x, \cdot)$ は $\mathbb{R}_+$ 上で右連続.

(iv) 各々の $m < \infty$ とすべて $(x, s) \in Z$ に対し 2.

$$v_N^\pi(x, s) \leq \varphi_{\sigma_N^m}^\pi(x, s) + \frac{1}{m}.$$

証明は長くなるので略す。

各 $N < \infty$ に対して

$$U^N(x, s) \equiv \begin{cases} \sup_{\pi \in \Pi, \tau \in C_S^N(\pi)} \varphi_\pi^\pi(x, s) & \text{if } (x, s) \in S \times [0, N), \\ f(x, s) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

とおく。

Theorem 4.2. 各 $N < \infty$ とすべし $(x, s) \in Z$ に対して

$$U^N(x, s) = \sup_{\pi \in \Pi} U_N(\pi)(x, s).$$

(証明). Theorem 4.1 の i) からすく。□

各 $N < \infty$, $n \geq 0$ に対して U_N^n を次の関係式で定める;

$$U_N^n(x, s) = \max \left\{ f(x, s), \sup_{\pi \in \Pi} E_{(x, s)}^\pi \left[U_N^n(\Sigma_{k_n(s)}^\pi) \right] \right\} \\ \text{if } (x, s) \in S \times [0, N),$$

$$U_N^n(x, s) = f(x, s) \quad \text{otherwise.}$$

また, $U_N(x, s) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_N^n(x, s)$, $(x, s) \in Z$ とおく。

Lemma 4.1. f を Z 上の有界な universally measurable

関数とする。このとき、各々の $\pi \in \Pi$, $(x, s) \in Z$, $r \in (s, \infty)$

に対して $\lim_{t \downarrow s} E_{(x, t)}^\pi [f(\Sigma_r^\pi)] = E_{(x, s)}^\pi [f(\Sigma_r^\pi)]$ 。

(証明). 各 $\pi \in \Pi$, $s < t < r$ に対して

$$\begin{aligned} E_{(x, s)}^\pi [f(\Sigma_r^\pi)] &= E_{(x, s)}^\pi [E_{\Sigma_s^\pi}^\pi [f(\Sigma_r^\pi)]] \\ &= (1 - G^\pi(x, s; t-s)) E_{(x, t)}^\pi [f(\Sigma_r^\pi)] \\ &\quad + \int_0^{t-s} G^\pi(x, s; dw) Q(dw | x, s+w, \pi(x, s+w)). \end{aligned}$$

(12)

$$\cdot P^\pi(y', s+w: x, dy) E_{(y, x)}^\pi [f(Z_r^\pi)],$$

$$\mathbb{P}^\pi \subset G^\pi(x, s; t) = P_{(x, s)}^\pi (\nu(x, s) \leq t), \quad t \geq 0,$$

$$P^\pi(x, s; t, \Lambda) = P_{(x, s)}^\pi (X_t^\pi \in \Lambda), \quad t \geq s, \quad \Lambda \in \mathcal{B}(S).$$

$$\|f\| = \sup_{z \in Z} |f(z)| \quad \text{とすると}$$

$$|E_{(x, s)}^\pi [f(Z_r^\pi)] - E_{(x, t)}^\pi [f(Z_r^\pi)]| \leq G^\pi(x, s; t-s) \|f\| + (t-s) \|f\|.$$

$$\|f\| < \infty, \quad G^\pi(x, s; t-s) \rightarrow 0 \quad (\text{as } t \rightarrow s) \quad \forall x \in Z.$$

$$\lim_{t \downarrow s} E_{(x, t)}^\pi [f(Z_r^\pi)] = E_{(x, s)}^\pi [f(Z_r^\pi)]. \quad \square$$

Lemma 4.2. すべて Z の $\pi \in \Pi$ に対して Z 上の f^π は、 Z 上の

有界 Z -universally measurable 実数値関数とする。 $(x, s) \in Z$ と

する。このとき、すべて Z の $\tilde{\pi} \in \Pi$ に対して $\liminf_{t \downarrow s} f^{\tilde{\pi}}(x, t) \geq f^{\tilde{\pi}}(x, s)$ ならば、任意の $\pi \in \Pi$ に対して

$$\liminf_{t \downarrow s} \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} f^{\tilde{\pi}}(Z_t^\pi) \geq \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} f^{\tilde{\pi}}(x, s) \quad P_{(x, s)}^\pi\text{-a.s.}$$

(証明). π を任意の policy とする。

$$\Omega^\pi(x, s) \equiv \{\omega \in \Omega \mid Z_s^\pi(\omega) = (x, s)\} \quad \text{とすると} \quad P_{(x, s)}^\pi(\Omega^\pi(x, s)) = 1.$$

まず、 $\forall \omega \in \Omega^\pi(x, s)$ に対して $h > 0$ が存在して、すべて

の $t \in [s, s+h)$ に対して $Z_t^\pi(\omega) = (x, t)$ である。

$$\liminf_{t \downarrow s} \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} f^{\tilde{\pi}}(x, t) \geq \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} f^{\tilde{\pi}}(x, s) \quad \text{を示せば十分である。}$$

とるから、条件より、

$$\liminf_{t \downarrow s} \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} f^{\tilde{\pi}}(x, t) \geq \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} \liminf_{t \downarrow s} f^{\tilde{\pi}}(x, t) \geq \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} f^{\tilde{\pi}}(x, s). \quad \square$$

各 $\pi \in \Pi$, $N < \infty$, $s \geq 0$, $n \geq 0$ に対し $\mathbb{Z}$.

$$C_s^{N,n}(\pi) \equiv \left\{ \tau \in C_s^N(\pi) \mid \tau = s \text{ or } k \cdot 2^{-n}, k = 0, 1, 2, \dots, N \cdot 2^{-n} \right\}.$$

任意の $\tau \in C_s^N(\pi)$ と各 $n \geq 0$ に対し $\mathbb{Z}$.

$$\tau(n) = \begin{cases} s & \text{if } \tau = s, \\ k \cdot 2^{-n} & \text{if } (k-1) \cdot 2^{-n} \leq \tau < k \cdot 2^{-n}, s < \tau < N, \\ N & \text{otherwise,} \end{cases}$$

とおくと $\tau(n) \in C_s^{N,n}(\pi)$.

Theorem 4.3. 各 $N < \infty$ に対し $U^N = u_N$ on $\mathbb{Z}$.

(証明). 明らかに $S \times [N, \infty)$ 上では $U^N = u_N$.

$N < \infty$, $(x, s) \in S \times [0, N)$ を任意とする。Furukawa [6] の Theorem 4.1 から、各 $n \geq 0$ に対し $\mathbb{Z}$. U_N^n は 離散時間の 場合の意味で、smallest N -excessive majorant of q である。したがって $\mathbb{Z}$. Shiriyayev [14, chap. II] の Lemma 5 より、任意の $\pi \in \Pi$, $\tau \in C_s^N(\pi)$ に対し $\mathbb{Z}$.

$$U_N^n(x, s) \geq E_{(x, s)}^\pi [U_N^n(Z_{\tau(n)}^\pi)] \geq E_{(x, s)}^\pi [q(Z_{\tau(n)}^\pi)] = \varphi_{\tau(n)}^\pi(x, s).$$

path $\omega \in \Omega$ と q の性質から

$$\lim_{h \rightarrow 0+0} q(Z_{x+h}^\pi(\omega)) = q(Z_x^\pi(\omega)), \quad x \geq 0,$$

したがって、 $n \rightarrow \infty$ とすると $U_N(x, s) \geq \varphi_\tau^\pi(x, s)$.

よって、 $U_N(x, s) \geq U^N(x, s)$.

一方、[6] の Theorem 3.2 から、各 $n \geq 0$ に対し $\mathbb{Z}$.

$$U_N^n(x, s) = \sup_{\pi \in \Pi, \tau \in C_s^{N,n}(\pi)} \varphi_\tau^\pi(x, s).$$

$$C_s^{N,n}(\pi) \subset C_s^N(\pi) \quad \forall \pi \in \mathcal{T}, \quad U_N^n(x,s) \leq U^N(x,s).$$

$$n \rightarrow \infty \text{ とすると, } U_N(x,s) \leq U^N(x,s). \quad \square$$

Theorem 4.4 各 $N < \infty$ に対して

(i) U_N は $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ universally measurable.

(ii) U_N は smallest N -excessive majorant of q .

(証明). (i). Theorem 4.1-(i), 4.2, 4.3 より

$$U_N(x,s) = \begin{cases} \limsup_{m \rightarrow \infty} \sup_{\pi \in \mathcal{T}} \varphi_{sN}^{\pi,m}(x,s) & \text{if } (x,s) \in S \times [0,N), \\ q(x,s) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

Theorem 3.1 により, $\sup_{\pi \in \mathcal{T}} \varphi_{sN}^{\pi,m}$ は $S \times [0,N) \times \mathbb{Z}$ 上

universally measurable である。 U_N は $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 上

universally measurable である。

(ii). 最初に, 任意の $\pi \in \mathcal{T}$ と各 $(x,s) \in S \times [0,N)$ に対して

$$\lim_{x \downarrow s} U_N(\tilde{Z}_x^{\pi}) \geq U_N(x,s) \quad P_{(x,s)}^{\pi} - \text{a.s.} \text{ を示す。 } n \geq 0 \text{ と}$$

任意にとる。 Lemma 4.1 から, 各 $k=1,2,\dots,N \cdot 2^{-n}$,

$$(x,s) \in S \times [N-k \cdot 2^{-n}, N-(k-1) \cdot 2^{-n}) \text{ に対して}$$

$$\lim_{x \downarrow s} E_{(x,x)}^{\tilde{\pi}} [U_N^n(\tilde{Z}_{\tilde{R}_n(s)}^{\tilde{\pi}})] = E_{(x,s)}^{\tilde{\pi}} [U_N^n(\tilde{Z}_{\tilde{R}_n(s)}^{\tilde{\pi}})] \text{ for all } \tilde{\pi} \in \mathcal{T}.$$

これと Lemma 4.2 から, 任意の $\pi \in \mathcal{T}$ と各 $k=0,1,\dots,N \cdot 2^{-n}$,

$$(x,s) \in S \times [N-k \cdot 2^{-n}, N-(k-1) \cdot 2^{-n}) \text{ に対して}$$

$$\liminf_{x \downarrow s} \sup_{\tilde{\pi} \in \mathcal{T}} E_{\tilde{Z}_x^{\pi}}^{\tilde{\pi}} [U_N^n(\tilde{Z}_{\tilde{R}_n(s)}^{\tilde{\pi}})] \geq \sup_{\tilde{\pi} \in \mathcal{T}} E_{(x,s)}^{\tilde{\pi}} [U_N^n(\tilde{Z}_{\tilde{R}_n(s)}^{\tilde{\pi}})]$$

$$P_{(x,s)}^{\pi} - \text{a.s.}.$$

$1 \leq k \leq 2$, U_N^m の定め方から、任意の $\pi \in \mathbb{T}$ と各 k ,
 $(x, s) \in S \times [N - k \cdot 2^{-m}, N - (k-1) \cdot 2^{-m})$ に対して、

$$\liminf_{k \downarrow s} U_N^m(x_k^\pi) \geq U_N^m(x, s) \quad P_{(x, s)}^\pi - \text{a.s.},$$

すなわち、これは任意の $\pi \in \mathbb{T}$ と各 $(x, s) \in S \times [0, N)$ に対して成立する。 $U_N = \sup_{m \geq 0} U_N^m$ での 2^m , $m \rightarrow \infty$ とすると、任意の $\pi \in \mathbb{T}$ と各 $(x, s) \in S \times [0, N)$ に対して、

$$(4.1) \quad \liminf_{k \downarrow s} U_N(x_k^\pi) \geq U_N(x, s) \quad P_{(x, s)}^\pi - \text{a.s.}.$$

すなわち、各 $\pi \in \mathbb{T}$, $(x, s) \in S \times [0, N)$ と π の 2 の $t \in [s, N]$ に対して、 $U_N(x, s) \geq E_{(x, s)}^\pi [U_N(x_t^\pi)]$ を示す。

$\pi \in \mathbb{T}$ と $(x, s) \in S \times [0, N)$ を任意にとる。 $t = s$ のとき、明らかに、 $U_N(x, s) = E_{(x, s)}^\pi [U_N(x_s^\pi)]$ 。

各 $t \in T_s^N \equiv \{k \cdot 2^{-m} \mid k \cdot 2^{-m} > s, k = 1, 2, \dots, N \cdot 2^{-m}, m = 0, 1, \dots\}$ に対して、 $t = k \cdot 2^{-m}$ とする n と k がとれる。 U_N^m の定め方から、

$$U_N^m(x, s) \geq E_{(x, s)}^\pi [U_N^m(x_{k \cdot 2^{-m}}^\pi)] = E_{(x, s)}^\pi [U_N^m(x_t^\pi)].$$

$m \rightarrow \infty$ とすると、

$$(4.2) \quad U_N(x, s) \geq E_{(x, s)}^\pi [U_N(x_t^\pi)].$$

各 $t \in T_s^N \cup \{s\}$ に対しては、列 $\{t_m\}_{m=1}^\infty \in T_s^N$ $t_m \in T_s^N$ $m = 1, 2, \dots$, $t_m \downarrow t$ ($\text{as } m \rightarrow \infty$) と取りようにとれる。(4.1),

(4.2) と Fatou の lemma より、

$$U_N(x, s) \geq E_{(x, s)}^\pi [\liminf_{m \rightarrow \infty} U_N(x_{t_m}^\pi)] \geq E_{(x, s)}^\pi [U_N(x_t^\pi)].$$

さらに U_N は、明らかに、"majorant of q ".

N -excessive かつ U_N の "smallest" 性については、省略する。□

任意の $\pi \in \Pi$, $\tau \in C_S(\pi)$ と各 $(x, s) \in Z$ に対し、

$P_{(x,s)}^\pi(\tau < \infty) = 1$ であり、また、 q は有界な Z 上の関数。明らかに、

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \int_{\{\tau > N\}} q^-(Z_N^\pi) dP_{(x,s)}^\pi = 0, \quad \tau \in C_S(\pi), \quad q^- = \max\{0, -q\}.$$

$U \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} U_N$ とおく。

Theorem 4.5. (i) U は Z 上 Z' universally measurable.

(ii) U は、smallest excessive majorant of q .

(iii) Z 上 Z' $U = U^*$.

(iv) 各 $x \in S$ に対し $U(x, \cdot)$ は $\mathbb{R}_+$ 上 Z 右連続。

(証明). (i), (ii) は Theorem 4.4 から簡単に示される。

(iii) $\pi \in \Pi$, $(x, s) \in Z$, $\tau \in C_S(\pi)$ を任意にとる。各 $N < \infty$ に対し $\tau_N \equiv \min(\tau, N)$ とおくと、 $\tau_N \in C_S^N(\pi)$ かつ Z_N^π の Z' 、

$$\begin{aligned} \int_{\{\tau \leq N\}} q(Z_N^\pi) dP_{(x,s)}^\pi &= E_{(x,s)}^\pi[q(Z_N^\pi)] - \int_{\{\tau > N\}} q(Z_N^\pi) dP_{(x,s)}^\pi \\ &\leq U^N(x, s) + \int_{\{\tau > N\}} q^-(Z_N^\pi) dP_{(x,s)}^\pi. \end{aligned}$$

$N \rightarrow \infty$ とすると、 $E_{(x,s)}^\pi[q(Z_N^\pi)] \leq U(x, s)$ 。

(17)

$\vee \pi \in \Pi$ かつ Z 、 π と π は、任意の Z 、 $U^*(x, s) \leq U(x, s)$ 。

逆に、 U^* と U^N の定義より、各 $N < \infty$ に対して、 $U^N(x, s) \leq U^*(x, s)$ 。 $N \rightarrow \infty$ とすると、 $U(x, s) \leq U^*(x, s)$ 。

(iv). (ii) により、 U は、excessive であるので、Blumenthal-Gettoor [1, Chap. II, Theorem 2.12] から、各 $(x, s) \in Z$ に対して Z 、mapping $t \rightarrow U(Z_t^\pi)$ は $[s, \infty)$ 上で右連続、 $P_{(x, s)}^\pi$ -a.s.。 各 $\pi \in \Pi$ 、 $(x, s) \in Z$ に対して、

$\hat{\Omega}^\pi(s) \equiv \left\{ \omega \in \Omega \mid t \rightarrow U(Z_t^\pi) \text{ が } [s, \infty) \text{ 上で右連続} \right\}$ とすると、各 $\pi \in \Pi$ 、 $(x, s) \in Z$ に対して、 $P_{(x, s)}^\pi(\hat{\Omega}^\pi(s) \cap \Omega^\pi(x, s)) = 1$ 、さらに、 $\omega \in \hat{\Omega}^\pi(s) \cap \Omega^\pi(x, s)$ に対して、 $h > 0$ が存在して、ある Z の $t \in [s, s+h)$ に対して、 $Z_t^\pi(\omega) = (x, t)$ 。したがって、各 $\pi \in \Pi$ 、 $(x, s) \in Z$ に対して、

$\lim_{t \downarrow s} U(x, t) = \lim_{t \downarrow s} U(Z_t^\pi) = U(Z_s^\pi) = U(x, s)$ $P_{(x, s)}^\pi$ -a.s.。
ゆえに、各 $x \in S$ に対して、 $U(x, \cdot)$ は $\mathbb{R}_+$ 上で右連続。□

§ 5. Optimality equation

$F \equiv Z$ 上の有界 Borel-可測な関数の全体。

各 $\pi \in \Pi$ に対して、 $\tilde{F}^\pi \in$ 、各 $(x, s) \in Z$ に対して、 $\lim_{t \downarrow 0} E_{(x, s)}^\pi[f(Z_{s+t}^\pi)] = f(x, s)$ とする F 上の $f \in F$ の全体とおく。

各 $\pi \in \Pi$ 、 $f \in \tilde{F}^\pi$ に対して、

$h(x, s) \equiv \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \{ E_{(x, s)}^\pi [f(Z_{s+t}^\pi)] - f(x, s) \}, (x, s) \in Z,$
 が存在して、 $h \in \tilde{F}^\pi$ のとき、 $h = \mathcal{A}^\pi f$ と書き、operator $\mathcal{A}^\pi$ の定義域を $\mathcal{D}(\mathcal{A}^\pi)$, 并 $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \equiv \bigcap_{\pi \in \Pi} \mathcal{D}(\mathcal{A}^\pi)$ とおく。

Lemma 5.1. $f \in F$ は、 $\frac{d^+}{ds} f$ が存在して有界かつ、各 $x \in S$ に対して、 $\frac{d^+}{ds} f(x, \cdot)$ が $\mathbb{R}_+$ 上で右連続であるような関数とする。このとき、 $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ 、かつ、任意の $\pi \in \Pi$ と各 $(x, s) \in Z$ に対して、

$$\mathcal{A}^\pi f(x, s) = \frac{d^+}{ds} f(x, s) + \lambda(x, s, \pi(x, s)) \left[\int_S f(y, s) Q(dy | x, s, \pi(x, s)) - f(x, s) \right].$$

(証明). Stone [15] と同様にして証明できる。([15] の Lemma 3.1)

$\Gamma \subset Z$ が次の二つをみたすとき、 Γ を admissible stopping set という； 各 $x \in S$ と任意の有限区間 I に対して、非負の整数 $m < \infty$ と $\{\Gamma_n\}_{n=0}^m$ が存在して、

(i) $\Gamma_0 = \emptyset$ かつ $\Gamma_n, n=1, 2, \dots, m$ は closed または left-closed 区間

(ii) $\Gamma(x) \cap I = \bigcup_{n=0}^m \Gamma_n$, $x \in I$ 且 $\Gamma(x) = \{s \geq 0 \mid (x, s) \in \Gamma\}$.

任意の $\pi \in \Pi$ と admissible stopping set Γ に対して、

$$\tau_\Gamma \equiv \inf \{s \geq 0 \mid Z_s^\pi \in \Gamma\}, \quad s \geq 0,$$

とおく。すると、すべての $\pi \in \Pi$, $s \geq 0$ に対して $\tau_\Gamma \in C_s(\Pi)$

となる admissible stopping set Γ の全体とする。

h ; $0 < h \leq \infty$ は fix する。各 $\pi \in \Pi$, $(x, s) \in Z$, $P \in \mathcal{J}$ に対して $\delta_1(P) \equiv \min\{h, v(x, s), \tau_P - \eta_0\}$ とおく。 $\tau_P = s$ なら $\eta_0 = s$ 。同様に $\delta_1(P)$ とおく。

$\delta_n(P) \equiv \min\{h, v(\sum_{i=1}^n \eta_i), \tau_P - \eta_{n-1}\}$, $n \geq 2$, とおく。 $\tau_P = s$ なら $\eta_m = s + \delta_1(P) + \dots + \delta_m(P)$, $m \geq 1$ 。

任意の $\pi \in \Pi$ と、各 $(x, s) \in Z$, $\Lambda \in \mathcal{B}(S)$, $w \geq 0$ に対して

$H^\pi(x, s, \Lambda, w) \equiv P_{(x, s)}^\pi [X_{\eta_1}^\pi \in \Lambda \text{ かつ } \delta_1(P) \leq w]$, $P \in \mathcal{J}$, とおく。

Definition 5.1. $P \in \mathcal{J}$ とする。

$\pi^* \in \Pi$ が P -optimal

$\Leftrightarrow$ すべて $(x, s) \in Z$ に対して $\varphi_{\tau_P}^{\pi^*}(x, s) = \sup_{\pi \in \Pi} \varphi_{\tau_P}^\pi(x, s)$ 。

$\pi^* \in \Pi$ が P -optimal とする。各 $\pi \in \Pi$ に対して

$\psi^\pi(x, s) \equiv \int_Z \varphi_{\tau_P}^{\pi^*}(y, s+w) H^\pi(x, s, dy, dw)$, $(x, s) \in Z$, とおく。

Lemma 5.2. $P \in \mathcal{J}$ とする。 $\pi^* \in \Pi$ が P -optimal

ならば、すべて $(x, s) \in Z$ に対して

$$\varphi_{\tau_P}^{\pi^*}(x, s) = \sup_{\pi \in \Pi} \psi^\pi(x, s)。$$

(証明). Stone [15] の Theorem 5.1 と同様に示す。証明を省略する。

$$\Gamma^* \equiv \{z \in Z \mid u^*(z) = g(z)\} \quad \text{とおく。 持て } \Gamma^* = \Gamma^*$$

とおく。さらに、subset $B \subset Z$ に対し、

$$S(B) \equiv \{x \in S \mid (x, s) \in B \text{ for some } s \geq 0\}$$

とする。

Theorem 5.1. $\Gamma^* \in \mathcal{J}$ かつ、 $S(\Gamma^*)$ 上で $\frac{d^+}{ds} g$ が存在し有界で、各 $x \in S(\Gamma^*)$ に対し、 $\frac{d^+}{ds} g(x, \cdot)$ は $\mathbb{R}_+$ 上で右連続であると仮定する。このとき、

(π^*, ρ^*) : optimal

$$\iff (i) \quad \varphi_{\rho^*}^{\pi^*} \in \mathcal{Q}(X)$$

$$(ii) \quad \varphi_{\rho^*}^{\pi^*} : \text{majorant of } g$$

$$(iii) \quad \varphi_{\rho^*}^{\pi^*} \text{ が次の関係式を満たす；}$$

$$\begin{cases} \max_{\pi \in \Pi} \int H^\pi f(z) = 0 & \text{for all } z \notin \Gamma^*, \\ f(z) = g(z) & \text{for all } z \in \Gamma^*. \end{cases}$$

(証明). (π^*, ρ^*) が optimal とする。 $\Gamma^* \in \mathcal{J}$ かつの Γ^*

π^* は明らかに Γ^* -optimal。

$(x, s) \notin \Gamma^*$ とすると $\Gamma^* \in \mathcal{J}$ かつの Γ^* 、 $h > 0$ が存在して、

すべての $h' \in [0, h]$ に対し $(x, s+h') \notin \Gamma^*$ 。それ故、

$$\delta_1(\Gamma^*) = \min \{h, \nu(x, s)\} \quad \text{としてよい。 Lemma 5.2 によ$$

り、任意の $\pi \in \Pi$ に対し、

$$\varphi_{\rho^*}^{\pi^*}(x, s) \geq \int_Z \varphi_{\rho^*}^{\pi^*}(y, s+w) H^\pi(x, s, dy, dw)$$

(21)

$$\begin{aligned}
&= (1 - G^\pi(x, s; h)) \varphi_{\pi^*}^{\pi^*}(x, s+h) + \\
&+ \int_0^h G^\pi(x, s; dw) \int_S \varphi_{\pi^*}^{\pi^*}(y, s+w) Q(dy | x, s+w, \pi(x, s+w)) \\
&= \exp\left\{-\int_0^h \lambda(x, s+s', \pi(x, s+s')) ds'\right\} \cdot \varphi_{\pi^*}^{\pi^*}(x, s+h) \\
&+ \int_0^h \lambda(x, s+w, \pi(x, s+w)) \exp\left\{-\int_0^w \lambda(x, s+s', \pi(x, s+s')) ds'\right\} \cdot \\
&\cdot \int_S \varphi_{\pi^*}^{\pi^*}(y, s+w) Q(dy | x, s+w, \pi(x, s+w)) dw.
\end{aligned}$$

π と Q の性質から、十分小さい h をとると、

$$\begin{aligned}
\varphi_{\pi^*}^{\pi^*}(x, s) &\geq \exp\left\{-\int_0^h \lambda^\pi(x, s+s') ds'\right\} \cdot \varphi_{\pi^*}^{\pi^*}(x, s+h) \\
&+ \int_0^h \lambda^\pi(x, s+w) \exp\left\{-\int_0^w \lambda^\pi(x, s+s') ds'\right\} \cdot \\
&\cdot \int_S \varphi_{\pi^*}^{\pi^*}(y, s+w) Q^\pi(dy | x, s) dw,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{すなわち、} \lambda^\pi(x, s+s') \equiv \lambda(x, s+s', \pi(x, s)), \quad s' \in [0, h] \\
&Q^\pi(\cdot | x, s) \equiv Q(\cdot | x, s, \pi(x, s)).
\end{aligned}$$

λ は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}$ 上、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h} [\varphi_{\pi^*}^{\pi^*}(x, s) - \varphi_{\pi^*}^{\pi^*}(x, s+h)] \\
(5.1) \quad &\geq \frac{1}{h} \int_0^h \lambda^\pi(x, s+w) \exp\left\{-\int_0^w \lambda^\pi(x, s+s') ds'\right\} \cdot \\
&\cdot \left[\int_S \varphi_{\pi^*}^{\pi^*}(y, s+w) Q^\pi(dy | x, s) - \varphi_{\pi^*}^{\pi^*}(x, s+h) \right] dw.
\end{aligned}$$

(5.1) において、 $\pi = \pi^*$ とすると等式が成立する。 λ が有界であるので、 $\varphi_{\pi^*}^{\pi^*}$ も有界。これと λ の有界性から、

(22)

(5.1) において、 $\pi = \pi^*$ とすると右辺は有界である。 $\varepsilon = 0$ とき、
十分小さい $h > 0$ に対して、

$$|\varphi_{\rho^*}^{\pi^*}(x, s) - \varphi_{\rho^*}^{\pi^*}(x, s)| \leq h \cdot L.$$

これは、すべての $(x, s) \in \Gamma^*$ に対して、 $\varphi_{\rho^*}^{\pi^*}(x, s)$ は s で右連続
であることを示している。したがって、(5.1) で、 $\pi = \pi^*$

とし、 $h \rightarrow 0+$ とすると、 $\frac{d^+}{ds} \varphi_{\rho^*}^{\pi^*}$ が $(\Gamma^*)^c$ 上に存在し、有
界であり、さらに、すべての $(x, s) \in \Gamma^*$ に対して、 $\frac{d^+}{ds} \varphi_{\rho^*}^{\pi^*}(x, s)$
は s で右連続である。よって、(5.1) において $h \rightarrow 0+$ とす
ると、任意の $\pi \in \Pi$ に対して、

$$-\frac{d^+}{ds} \varphi_{\rho^*}^{\pi^*}(x, s) \geq \lambda^{\pi}(x, s) \left[\int_S \varphi_{\rho^*}^{\pi^*}(y, s) Q^{\pi}(dy | x, s) - \varphi_{\rho^*}^{\pi^*}(x, s) \right]$$

これは、すべての $z \in \Gamma^*$ に対して、

$$\max_{\pi \in \Pi} \lambda^{\pi} \varphi_{\rho^*}^{\pi^*}(z) = 0.$$

また、 $(x, s) \in \Gamma^*$ に対しては、 $\varphi_{\rho^*}^{\pi^*}(x, s) = g(x, s)$ 、そして、

$\varphi_{\rho^*}^{\pi^*}$ は Lemma 5.1 での f の条件を満たす。したがって、

$\varphi_{\rho^*}^{\pi^*} \in \mathcal{Q}(\mathcal{A})$ 。さらに、明らかに、 $\varphi_{\rho^*}^{\pi^*} \geq g$ なのだから、必
要性は証明された。

次に十分性を示す。(i) ~ (iii) を仮定する。 $\varepsilon = 0$ とき、任
意の $\pi \in \Pi$ とる $(x, s) \in \Gamma^*$ に対して、

$$\lambda^{\pi} \varphi_{\rho^*}^{\pi^*}(x, s) \leq 0.$$

$\pi \in \Pi$, $m < \infty$, $N < \infty$ を任意にとる。すべての $z \in Z$ に対
して、

$$u^*(z) \geq v_N^{\pi}(z) \geq g(z) \quad \text{なのだから、} \Gamma^* \subset \Gamma_N^m(\pi).$$

$\nu \in \mathcal{P}^m \rightarrow \mathbb{Z}$, $\mathcal{P}_N^m \subseteq \mathcal{P}^*$ とおき, それを $\mathbb{Z}$.

$$(5.2) \quad E_{(x,s)}^\pi \left[\int_s^{\mathcal{P}_N^m} \mathcal{A}^\pi \varphi_{\mathcal{P}^*}^{\pi*}(\mathcal{Z}_t^\pi) dt \right] \leq 0, \quad (x,s) \notin \mathcal{P}^*.$$

これは, Dynkin [4, p133] の Corollary から,

$$E_{(x,s)}^\pi \left[\int_s^{\mathcal{P}_N^m} \mathcal{A}^\pi \varphi_{\mathcal{P}^*}^{\pi*}(\mathcal{Z}_t^\pi) dt \right] = E_{(x,s)}^\pi [\varphi_{\mathcal{P}^*}^{\pi*}(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}_N^m}^\pi)] - \varphi_{\mathcal{P}^*}^{\pi*}(x,s).$$

= 0 と (5.2) から,

$$\varphi_{\mathcal{P}^*}^{\pi*}(x,s) \geq E_{(x,s)}^\pi [\varphi_{\mathcal{P}^*}^{\pi*}(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}_N^m}^\pi)], \quad (x,s) \notin \mathcal{P}^*.$$

$\varphi_{\mathcal{P}^*}^{\pi*} \geq q$ かつ $\mathbb{Z}$. Theorem 4.1 の (iv) から,

$$\varphi_{\mathcal{P}^*}^{\pi*}(x,s) \geq E_{(x,s)}^\pi [q(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}_N^m}^\pi)] \geq \mathcal{U}_N(\pi)(x,s) - \frac{1}{m},$$

$(x,s) \notin \mathcal{P}^*.$

$\nu \in \mathcal{P}^m \rightarrow \mathbb{Z}$, $\pi \in \Pi \Rightarrow \mathcal{U}_2$ supremum $\mathcal{U} \in \mathbb{Z}$, $m \rightarrow \infty$
 $N \rightarrow \infty$ とすると, Theorem 4.2, 4.3, 4.5 より,

$$\varphi_{\mathcal{P}^*}^{\pi*}(x,s) \geq \mathcal{U}^*(x,s), \quad (x,s) \notin \mathcal{P}^*.$$

また, $(x,s) \in \mathcal{P}^*$ に対しても, $\mathcal{P}^* = 0$ かつ $\mathbb{Z}$. $\varphi_{\mathcal{P}^*}^{\pi*}(x,s)$
 $= q(x,s) = \mathcal{U}^*(x,s)$. ゆえに, すべて $\mathbb{Z}$ の $\mathcal{Z} \in \mathbb{Z}$ に対しても,

$$\varphi_{\mathcal{P}^*}^{\pi*}(\mathcal{Z}) = \mathcal{U}^*(\mathcal{Z}). \quad \square$$

参考文献

- [1]. R.M. Blumenthal and R.K. Gettoor, Markov Processes and Potential Theory, Academic Press, New York, (1968).
- [2]. B. Doshi, Continuous time control of Markov processes

- on an arbitrary state space : discounted rewards, *Ann. Statist.* 4 (1976), 1219-1235.
- [3]. L. Dubins and D. Freedman, Measurable sets of measure, *Pacific J. Math.* 14 (1965), 1211-1222.
- [4]. E. D. Dynkin, *Markov Processes-I*, Springer-Verlag, Berlin, (1965).
- [5]. A. G. Fakseer, Optimal stopping of a Markov process, *Theory Prob. Appl.*, 16 (1971), 694-696.
- [6]. N. Furukawa, Functional equations and Markov potential theory in stopped decision processes, *Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ., Ser. A*, 29 (1975), 329-347.
- [7]. A. Hordijk, *Dynamic Programming and Markov Potential Theory*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, (1974).
- [8]. P. Kakumanu, Continuously discounted Markov decision model with countable state and action space, *Ann. Math. Statist.*, 42 (1971), 919-926.
- [9]. K. Kuratowski, *Topology-I*, Academic Press, New York, (1966).
- [10] B. L. Miller, Finite state continuous time Markov decision processes with an infinite planning horizon, *J. Math. Anal. Appl.*, 22 (1968), 552-569.

- [11]. K. R. Parthasarathy, Probability Measures on Metric Spaces, Academic Press, New York, (1967).
- [12]. S. R. Pliska, Controlled jump processes, Stoch. Proc. Appl., 3 (1975), 259-282.
- [13]. U. Rieder, On stopped decision processes with discrete time parameter, Stoch. Proc. Appl., 3 (1975), 365-383.
- [14]. A. N. Shiryaev, Statistical sequential analysis, Transl. Math. Monograph., Amer. Math. Soc., (1973).
- [15]. L. D. Stone, Necessary and sufficient conditions for optimal control of semi-Markov jump processes, SIAM J. Control, 11 (1973), 187-201.
- [16]. R. E. Strauch, Negative dynamic programming, Ann. Math. Statist., 37 (1966), 871-890.
- [17]. M. E. Thompson, Continuous parameter optimal stopping problems, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 19 (1971), 302-318.
- [18]. M. Yasuda, On the existence of optimal control in continuous time Markov decision processes, Bull. Math. Statist., 15 (1972), 7-17.