

コンパクト対称空間の体積

信州大学教養 阿部孝順 (Kojun Abe)

—— 横田一郎 (Ichiro Yokota)

1. 序

コンパクト Riemann 多様体 $M = (M, g)$ に対し, M の体積 $\text{vol}(M)$ は

$$\text{vol}(M) = \int_M \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

で定義される. この定義より

$$\begin{aligned} \text{metric } g &\text{ を } ag \text{ (} a > 0 \text{ は定数) \text{ にかえると} \\ \text{vol}(M) &\text{ は } \sqrt{a}^{\dim M} \text{vol}(M) \text{ にかわる.} \end{aligned}$$

ことが分かる. このように, 体積は M の metric に関係する.

これから, コンパクト Lie 群 G とコンパクト対称空間 $M = G/K$ の体積を求めるのであるが, その metric として G の Killing 形式 B から誘導されたものを用いる. すなわち, 対称空間 $M = G/K$ に対し, 群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の標準分解と

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m} \cong T_0(M)$$

とするとき, g の Killing 形式 B (正しくは $-B$) を K, M に制限したものをを用いて, G, K, M に metric をいれる. そして, この metric を用いたときの体積をそれぞれ

$$\mu(G), \quad \mu_G(K), \quad \mu_G(M)$$

で表すことにする. ただし, metric が退化しているといけないので, 以下, 群 G の単純である と仮定する. さらに, G, M にコンパクトと連結は常に仮定しているので, この用語を省略する. 吾々の結果は次のようである.

$$S(n) = \frac{2^{(n+4)(n-1)/4}}{1! \cdots [\frac{n-2}{2}]! \Gamma(1 + \frac{1}{2}) \cdots \Gamma([\frac{n-1}{2}] + \frac{1}{2})} \pi^{(n+2)(n-1)/4}$$

symbol	space	volume
A_{n-1}	$SU(n)$	$\frac{2^{(n-1)(2n+3)/2} n^{n^2/2}}{1!2! \cdots (n-1)!} \pi^{(n-1)(n+2)/2}$
B_n	$Spin(2n+1)$	$\frac{2 \cdot 2^{n(4n+5)/2} (2n-1)^{n(2n+1)/2}}{1!3! \cdots (2n-1)!} \pi^{n(n+1)}$
C_n	$Sp(n)$	$\frac{2^{n(3n+1)} (n+1)^{n(2n+1)/2}}{1!3! \cdots (2n-1)!} \pi^{n(n+1)}$
D_n	$Spin(2n)$	$\frac{2 \cdot 2^{n(3n-1)} (n-1)^{n(2n-1)/2}}{1!3! \cdots (2n-3)!(n-1)!} \pi^{n^2}$
G_2	G_2	$\frac{2^{26} 3^2 \sqrt{3}}{5} \pi^8$
F_4	F_4	$\frac{2^{52} 3^{45}}{5^4 7^2 11} \pi^{28}$
E_6	E_6	$\frac{2^{134} 3^{29} \sqrt{3}}{5^5 7^3 11} \pi^{42}$
E_7	E_7	$\frac{2^{156} \sqrt{2} 3^{111}}{5^{10} 7^6 11^3 13^2 17} \pi^{70}$
E_8	E_8	?
AI	$SU(n)/SO(n)$	$\frac{2^{(n-1)(n+3)/2} n^{n(n+1)/4}}{1!2! \cdots (n-1)! S(n)} \pi^{(n-1)(n+2)/2}$
III	$SU(2n)/Sp(n)$	$\frac{2^{(n-1)(4n+3)/2} n^{n(2n-1)/2}}{2!4! \cdots (2n-2)!} \pi^{n^2-1}$

<i>AIII</i>	$\frac{SU(m+n)}{S(U(m) \times U(n))}$	$\frac{1!2! \dots (m-1)! 1!2! \dots (n-1)!}{1!2! \dots (m+n-1)!}$ $\times 2^{2mn} (m+n)^{mn} \pi^{mn}$
<i>BDI</i>	$\frac{SO(m+n)}{SO(m) \times SO(n)}$	$(2(m+n-2))^{mn/2} \frac{S(m+n)}{S(m) S(n)}$
<i>DIII</i>	$SO(2n)/U(n)$	$2^{3n(n-1)/2} \frac{1!2! \dots (n-2)!}{1!3! \dots (2n-3)!}$ $\times (n-1)^{n(n-1)/2} \pi^{n(n-1)/2}$
<i>CI</i>	$Sp(n)/U(n)$	$2^{n(3n+1)/2} \frac{1!2! \dots (n-1)!}{1!3! \dots (2n-1)!}$ $\times (n+1)^{n(n+1)/2} \pi^{n(n+2)/2}$
<i>CII</i>	$\frac{Sp(m+n)}{Sp(m) \times Sp(n)}$	$\frac{1!3! \dots (2m-1)! 1!3! \dots (2n-1)!}{1!3! \dots (2m+2n-1)!}$ $\times 2^{6mn} (m+n+1)^{2mn} \pi^{2mn}$
<i>G</i>	$\frac{G_2}{(Sp(1) \times Sp(1))/\mathbf{Z}_2}$	$\frac{2^{13} 3}{5} \pi^4$
<i>FI</i>	$\frac{F_4}{(Sp(1) \times Sp(3))/\mathbf{Z}_2}$	$\frac{2^{23} 3^{23}}{5^3 7^2 11} \pi^{14}$
<i>FII</i>	$F_4/Spin(9)$	$\frac{2^{17} 3^{13}}{5^2 7 11} \pi^8$
<i>EI</i>	$\frac{E_6}{Sp(4)/\mathbf{Z}_2}$	$\frac{2^{55} 3^{15} \sqrt{3}}{5^3 7^2 11} \pi^{22}$
<i>EII</i>	$\frac{E_6}{(Sp(1) \times SU(6))/\mathbf{Z}_2}$	$\frac{2^{63} 3^{13}}{5^4 7^3 11} \pi^{20}$
<i>EIII</i>	$\frac{E_6}{(U(1) \times Spin(10))/\mathbf{Z}_4}$	$\frac{2^{50} 3^{11}}{5^3 7^2 11} \pi^{16}$
<i>EIV</i>	E_6/F_4	$\frac{2^{30} 3^{10} \sqrt{3}}{5 \cdot 7} \pi^{14}$
<i>EV</i>	$\frac{E_7}{SU(8)/\mathbf{Z}_2}$	$\frac{2^{74} 3^{55}}{5^7 7^5 11^3 13^2 17} \pi^{35}$
<i>EVI</i>	$\frac{E_7}{(SU(2) \times Spin(12))/\mathbf{Z}_2}$	$\frac{2^{67} 3^{51}}{5^6 7^4 11^3 13^2 17} \pi^{32}$
<i>EVII</i>	$\frac{E_7}{(U(1) \times E_6)/\mathbf{Z}_3}$	$\frac{2^{59} 3^{42}}{5^5 7^3 11^2 13^2 17} \pi^{27}$
<i>EVIII</i>	$E_8/S_s(16)$	?
<i>EIX</i>	$\frac{E_8}{(SU(2) \times E_7)/\mathbf{Z}_2}$	?

2. 体積を求めるための補題 2つ

体積を求める方法は決して一通りではないが、本講では主として次の補題を用いる。

補題 1. 対称空間 $M = G/K$ に対して

$$\mu(G) = \mu_G(K) \mu_G(M)$$

が成り立つ。

この補題は、 G, K, M のうち 2 つの体積が分かれば、残りの 1 つの体積が分かることを意味している。例えば、 K と M の体積を既知として G の体積を求めることを考えよう。 K の体積 $\mu(K)$ が既知であるとしても、それは K 自身の Killing 形式を用いた体積であろうから、それを G の Killing 形式を用いた体積 $\mu_G(K)$ に直さなければならぬ。同様なことが M に対しても起る。この辺の事情を次の例で理解することになろう。

例 2. $SO(n+1)/SO(n) = S^n \quad (n \geq 3)$

は対称空間であるから、補題 1 より

$$\mu(SO(n+1)) = \mu_{SO(n+1)}(SO(n)) \mu_{SO(n+1)}(S^n)$$

が成り立つ。 $\mu(SO(n))$ を既知として $\mu_{SO(n+1)}(SO(n))$ を求めよう。 $SO(n+1)$ の Lie 環 $\mathfrak{so}(n+1) = \{ X \in M(n+1, \mathbb{R}) \mid {}^t X = -X \}$ と

$$\mathfrak{so}(n+1) = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{s}^n$$

に標準分解する. $\mathfrak{so}(n+1)$ の Killing 形式 B は

$$B(X, Y) = 2(n-1) \operatorname{tr}(XY)$$

である. さて, $X \in \mathfrak{so}(n) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(n+1)$ であるから

$$\mu_{\mathfrak{so}(n+1)}(\mathfrak{so}(n)) = \sqrt{\frac{2(n-1)}{2(n-2)}}^{\frac{n(n-1)}{2}} \mu(\mathfrak{so}(n))$$

である. 球面 S^n の体積は, $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ とし, $\mathbb{R}^{n+1}$ の metric を用いて

$$\mu(S^n) = \frac{n+1}{\Gamma(\frac{n+1}{2} + 1)} \pi^{\frac{n+1}{2}}.$$

であることはよく知られている. さて, 上記の $\mathfrak{s}^n$ は

$$\mathfrak{s}^n = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ -x_1 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ -x_n & & & \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(n+1) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

であるから, $X \in \mathfrak{s}^n$ に対し

$$-B(X, X) = 2(n-1)(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$$

である. よって

$$\mu_{\mathfrak{so}(n+1)}(\mathfrak{s}^n) = \sqrt{2(n-1)}^n \mu(S^n)$$

となる. 以上より

$$\mu(\mathfrak{so}(n+1)) = \sqrt{\frac{n-1}{n-2}}^{\frac{n(n-1)}{2}} \sqrt{2(n-1)} \mu(\mathfrak{so}(n)) \mu(S^n)$$

となる. $\mu(SO(3)) = 2^4 \sqrt{2} \pi^2$ を既知とすると, 帰納的に

$$\mu(SO(n+1)) = \sqrt{2(n-1)} \frac{n(n+1)}{2} \mu(S^1) \mu(S^2) \dots \mu(S^n)$$

を得る.

次の補題もしはしば用いるだろう.

補題3. 群 $\tilde{G}$ が群 G の次数 m の被覆群であれば

$$\mu(\tilde{G}) = m \mu(G)$$

が成り立つ.

例之は

$$\mu(\text{Spin}(n)) = 2 \mu(SO(n))$$

である.

3. 基礎となる対称空間

前節2の説明から分かるように, 群 G の体積を求めるには, 対称空間 S^n , $\mathbb{CP}_n$, $\mathbb{HP}_n$, $\mathbb{CP}_2$, $\mathbb{HP}_2$, E_{VII} の体積を知ればよい. これらの空間は G/K の形で次のように表示される.

$$SO(n+1)/SO(n) = S^n$$

$$SU(n+1)/(U(1) \times SU(n))/Z_n = \mathbb{CP}_n$$

$$Sp(n+1)/(Sp(1) \times Sp(n)) = \mathbb{HP}_n$$

$$F_4 / \text{Spin}(9) = \mathbb{CP}_2 (= FII)$$

$$E_6 / (U(1) \times \text{Spin}(10)) / Z_4 = \mathbb{C}P_2 (= EIII)$$

$$E_7 / (U(1) \times E_6) / Z_3 = EVII$$

$$G_2 / SU(3) = S^6$$

最後にあげた $G_2 / SU(3) = S^6$ は対称空間ではないが、体積に関しては上記と同様に取り扱うことができる。

4. 求体積の簡単な歴史

前節3にある対称空間のうち、射影空間 $RP_n, CP_n, HP_n, \mathbb{C}P_2$ の体積は Berger により求められている。その方法は Jacobi 場を用いるものである。(別法として、これらの空間の胞体分割を用いると、体積の定義に戻って計算することもできる)。 RP_n, CP_n, HP_n の体積を知ると、補題 1 を用いて、例 2 のようにすると、古典群 A_n, B_n, C_n, D_n の体積が求められる。この方法で実際に実行したのは Broughton (Algebras, Groups and Geometries (1987)) である。しかし、 A_n, D_n はよいが、 B_n, C_n のそれは違っている。

補題 1 は、対称空間 $M = G/K$ の体積は、群 G, K の体積より求められることを示している。すなわち、群 G の体積が分かるとすべてが解決する。そして Freudenthal は彼の著書 linear Lie groups で、 G が center-free である条件のもとで、 G の体積公式を次式で与えている。

$$\mu(G) = \frac{k 2^r m! \sqrt{D^{-1}}}{l! (\prod g_i) \tau} \pi^{l+r}$$

ここに, k = Weyl 群の位数, r = 次元, l = 階数, $m = \frac{1}{2}(r-l)$,
 $D = \det((p_i, p_j))$ ($p_1, \dots, p_l$ は simple ルート), $g_1, \dots, g_l$ は最大
 ルートの係数であり, さらに

$$\tau = (-1)^m \sum (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}) \dots (\alpha_{i_{2m-1}}, \alpha_{i_{2m}})$$

($\sum$ はすべてのルート $\alpha_1, \dots, \alpha_{2m}$ の置換を意味する) である. $k, r,$
 $l, m, D, \prod g_i$ は容易に求められる量であるので, τ の値
 が問題である. そして Freudenthal は A_1, A_2, B_2, G_2 の τ を求
 めている. 今は computer があるので, 更に

$$A_3, B_3, C_3, A_4 \text{ (要 24 時間)}$$

が求められる. しかし, F_4 の τ を直接求めると 10 年 ~ 100 年
 かかると概算される. さて, 上記の Freudenthal の体積公式に
 は miss がある. 正しくは次のようである. $\tilde{G}$ を単連結である
 として, 体積公式をかくと

$$\mu(G) = \frac{c k 2^r m! \sqrt{D^{-1}}}{\tau} \pi^{l+r}$$

(c = 中心の位数) となる (三石和之による). (注. $\mu(\tilde{G})$ の体積
 公式をもう少し変形すると, F_4 の体積を computer で 10 分で
 計算されるようになったが, E_8 の体積は computer を用いても
 計算できそうではないと思われる??).

5. 基本的対称空間の実現と体積

3節で与えた対称空間 $RP_n, CP_n, HP_n, \mathbb{L}P_2, \mathbb{L}CP_2, E/1$ の定義を与えよう. 注目すべきことは, これらはすべて同じ式 (少なくとも形式的には) で表されることである. 射影空間の代表として Cayley 射影平面 $\mathbb{L}P_2$ を用いて述べよう. (RP_n, CP_n, HP_n は $\mathbb{L}$ の代りにそれぞれ R, C, H とし, 3 の代りに $n+1$ に置き換えるとよい).

$\mathbb{L}$ を Cayley 代数とし

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(3, \mathbb{L}) = \{X \in M(3, \mathbb{L}) \mid X^* = X\}$$

とし, $\mathcal{J}$ に Jordan 積 $X \circ Y$, 内積 (X, Y) をそれぞれ

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX), \quad (X, Y) = \text{tr}(X \circ Y)$$

で与え, さらに Freudenthal 積 $X \times Y$ を

$$X \times Y = \frac{1}{2}(2X \circ Y - \text{tr}(X)Y - \text{tr}(Y)X + (\text{tr}(X)\text{tr}(Y) - (X, Y))E)$$

で与える. また

$$\mathbb{L}P_2 = \{A \in \mathcal{J} \mid A \times A = 0, A \neq 0\} / R^*$$

($/R^*$, すなわち, $A \sim B$ は $B = \lambda A$, $\lambda \in R$ とする) で定義する.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ とし, 点 } 0 = [E_1] \in \mathbb{L}P_2 \text{ における接空間}$$

$T_0(\mathbb{L}P_2)$ は

$$T_0(\mathbb{L}P_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{L} \right\}$$

となるので, $T_0(\mathcal{L}P_2)$ における内積を $\frac{1}{2}\langle X, Y \rangle$ で与える. 次に $\mathcal{L}^C P_2$ に移ろう. J^C を J の複素化とし, J^C にエルミート内積 $\langle X, Y \rangle$ を

$$\langle X, Y \rangle = (\tau X, Y)$$

で与える (ここに, τ は J^C における複素共役である). そこで

$$\mathcal{L}^C P_2 = \{ A \in J^C \mid A \times A = 0, A \neq 0 \} / C^*$$

を定義する. $0 = [E_1] \in \mathcal{L}^C P_2$ における接空間 $T_0(\mathcal{L}^C P)$ は

$T_0(\mathcal{L}P_2)$ の複素化になっており. $T_0(\mathcal{L}^C P_2)$ の内積を $\operatorname{Re} \langle X, Y \rangle$

で与える. 最後に, $\mathcal{P}^C = J^C \oplus J^C \oplus C \oplus C$ とし

$$EV// = \{ P \in \mathcal{P}^C \mid P \times P = 0, P \neq 0 \} / C^*$$

を定義する (しかし, $P \times P$ の定義は省略する). $0 = [(0, 0, 1, 0)] \in EV//$ における接空間 $T_0(EV//)$ は J^C と同一視できるので, その内積を $\operatorname{Re} \langle X, Y \rangle$ で与える.

次に, これらの内積から誘導された metric を用いたときの体積の表を記しておく.

	体積	metric
CP_n	$\frac{1}{n!} \pi^n$	$\frac{1}{2} \langle X, Y \rangle$
HP_n	$\frac{1}{(2n+1)!} \pi^{2n}$	$\frac{1}{2} \langle X, Y \rangle$
$\mathcal{L}P_2$	$\frac{3!}{11!} \pi^8$	$\frac{1}{2} \langle X, Y \rangle$

$$\mathcal{L}^C P_2 \quad \frac{78}{16!} \pi^{16} \quad \text{Re} \langle X, Y \rangle$$

$$E_{VII} \quad \frac{13110}{27} \pi^{27} \quad \text{Re} \langle X, Y \rangle$$

次節で、これらの空間、主として $\mathcal{L}^C P_2 = E_{III}$ の体積を求める方法を述べることにしよう。

(以上 横田記)

6. E_{III} の作積コンパクト例外群 E_6 は

$$E_6 = \{ \alpha \in \text{Iso}_{\mathbb{C}}(\mathcal{J}^{\mathbb{C}}) \mid \alpha X \times \alpha Y = \tau \alpha \tau (X \times Y), \\ \langle \alpha X, \alpha Y \rangle = \langle X, Y \rangle \}$$

で与えられ, 又そのリ-環 e_6 は

$$e_6 = \{ \phi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{J}^{\mathbb{C}}, \mathcal{J}^{\mathbb{C}}) \mid (\phi X, X \times X) = 0, \langle \phi X, Y \rangle + \langle X, \phi Y \rangle = 0 \}$$

で与えられる。

 $\mathbb{C}$ -線型写像 $\sigma: \mathcal{J}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{J}^{\mathbb{C}}$ を

$$\sigma \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & -x_3 & -\bar{x}_2 \\ -\bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ -x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \quad (\xi_k \in \mathbb{C}, x_k \in \mathbb{I})$$

と定義すると, $\sigma \in E_6$, $\sigma^2 = 1$. 又 E_6 の involution $\tilde{\sigma}$ を

$$\tilde{\sigma}(\alpha) = \sigma \circ \alpha \circ \sigma \quad (\alpha \in E_6) \text{ で与える。}$$

$$(E_6)^{\sigma} = \{ \alpha \in E_6 \mid \sigma \alpha \sigma = \alpha \} = U(1) \text{Spin}(10) \cong (U(1) \times \text{Spin}(10)) / \mathbb{Z}_4.$$

(「例外型単純リ-群」横田-即着, 現代数学社,

才III章を参照)。例外型対称空間 E_{III} は

$$E_{\text{III}} = \{ A \in \mathcal{J}^{\mathbb{C}} \mid A \times A = 0, A \neq 0 \} / \sim$$

$$; A \sim B \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \lambda \in \mathbb{C} (\lambda \neq 0) \mid \lambda A = B$$

で与えられる。 E_6 は E_{III} に推移的 $\mathbb{K}$ 作用して

$$E_{\text{III}} \cong E_6 / (E_6)^{\sigma} \cong E_6 / U(1) \cdot \text{Spin}(10).$$

 σ はリ-環 e_6 の involution $\tilde{\sigma}$ も自然に引き起こし, また

$$k = \{ \alpha \in E_6 \mid \tilde{\sigma}(\alpha) = \alpha \},$$

$$\mathcal{M} = \{\alpha \in E_6 \mid \sigma(\alpha) = -\alpha\}$$

とすると, 標準分解 $E_6 = \mathbb{R} \oplus \mathcal{M}$ を与える.

$x \in \mathbb{C}^c$ に対して

$$F_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{x} \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_3(x) = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ \bar{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\bar{x} \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3(x) = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ -\bar{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく. 接空間 $T_0(E_{III})$ は

$$T_0(E_{III}) = \{F_2(x_2) + F_3(x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{C}^c\}$$

と表される. $p: E_6 \rightarrow E_{III}$ を自然な射影とし $p_*: E_6 \rightarrow T_0(E_{III})$ を p から誘導される写像とする. $Z = A_2(z_2) + A_3(z_3)$, $Z^\# = F_2(z_2) + F_3(z_3)$, $W = F_2(w_2) + F_3(w_3)$

$$(z_2, z_3, w_2, w_3 \in \mathbb{C}) \text{ とし } \tilde{Z}, \tilde{W}: \mathcal{J}^c \rightarrow \mathcal{J}^c \text{ を } \tilde{Z}(X) =$$

$$ZX - XZ, \tilde{W}(X) = W \circ X \quad (X \in \mathcal{J}^c) \text{ とおく. このとき}$$

$$p_*(\tilde{Z} + 2i\tilde{W}) = Z^\# + iW \text{ が成立する.}$$

$$X_{kj} = \frac{1}{\sqrt{2}} F_k(e_j) \quad (k=2,3, j=0,1,\dots,7) \text{ とおくと}$$

$\{X_{kj} \mid k=2,3, j=0,1,\dots,7\}$ は $T_0(E_{III})$ の $\mathbb{C}$ -基底でかつ正規直交系になっている. 対称空間 E_{III} の $\mathbb{C}$ -係数コホモロジー群 $H^*(E_{III}, \mathbb{C})$ は $T_0(E_{III})$ 上の $U(1) \cdot \text{Spin}(10)$ -不変な微分形式の集合とされる.

$H^*(E_{III}, \mathbb{C})$ は $T_0(E_{III})$ 上の $U(1) \cdot \text{Spin}(10)$ -不変な微分形式の集合とされる. E_{III} の $\mathbb{C}$ -係数 Chern 形式 c_1 は $T_0(E_{III})$ を $\mathcal{M}$ と同一視し, $\mathcal{M}$ 上では E_6 の括弧積の計算されることから, 具体的に c_1 を次の様に求めることができる.

$\{X_{kj}, iX_{kj} \mid k=2,3, j=0,1,\dots,7\}$ は $T_0(E_{III})$ の $\mathbb{R}$ 上正規直交基底となるが, この双対基底を $\{dx_{kj}, dx_{kj}' \mid k=2,3, j=0,1,\dots,7\}$ とする. このとき $0 \in E_{III}$ における Chern 形式 c_1 は, $c_1 = -\frac{12}{\pi} \sum_{k=2}^3 \sum_{j=0}^7 dx_{kj} \wedge dx_{kj}'$ と表されることがわかる.

Toda-Watanabe によって E_{III} の整係数コホモロジー群は $H^*(E_{III}) = \mathbb{Z}[t, w] / (p_1, p_2)$ ($t \in H^2, w \in H^8$, $p_1 = t^9 - 3w^2t, p_2 = w^3 + 15w^2t^4 - 9wt^8$) となることが知られている. これより $m = \frac{1}{78} t^{16}$ が $H^{32}(E_{III})$ の生成元となっていることがわかる. 又 Borel-Hirzebruch [1], §16 により, 2-形式 $\frac{1}{12} c_1$ は $H^2(E_{III})$ の生成元となっている.

上記のことより $\frac{1}{78\pi^{16}} 16! dx_{20} \wedge dx_{20}' \wedge \dots \wedge dx_{37} \wedge dx_{37}'$ は $H^{32}(E_{III})$ の生成元を代表している.

$$\therefore 1 = \int_{E_{III}} \frac{1}{78\pi^{16}} 16! dx_{20} \wedge \dots \wedge dx_{37}' = \frac{16!}{78\pi^{16}} \text{vol}(E_{III}).$$

$$\therefore \text{vol}(E_{III}) = \frac{78}{16!} \pi^{16}.$$

注: 例外型対称空間 E_{VII} についても同様の方法で, その体積を求めることができる.

7 E_6 の体積

前節で述べたことより $\tilde{A}_3(1) \in e_6$ でまた $p_*(\tilde{A}_3(1)) = -F_3(1) \in T_0(E_{III})$ をみれば。又 E_6 の Killing form B_{E_6} の計算より $B_{E_6}(\tilde{A}_3(1), \tilde{A}_3(1)) = -96$ がみられる。5節で導入した $T_0(E_{III})$ の内積から導かれる E_{III} 上のリーマン計量を g_c と表すことにすると $g_c(F_3(1), F_3(1)) = 2$ をみれば。

$$\therefore \mu(E_{III}) = 48^{16} \text{vol}(E_{III}) = 2^{65} 3^{17} 13/161 \cdot \pi^{16}.$$

[6], 才四章により 包含写像

$$\phi: U(1) \longrightarrow U(1) \times_{\mathbb{Z}_4} \text{Spin}(10) \hookrightarrow E_6$$

は

$$\phi(\theta) \begin{pmatrix} \xi_1 & \alpha_2 & \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\alpha}_2 & \xi_2 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \bar{\alpha}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^4 \xi_1 & \theta \alpha_2 & \theta \bar{\alpha}_2 \\ \theta \bar{\alpha}_2 & \theta^2 \xi_2 & \theta^2 \alpha_1 \\ \theta \alpha_2 & \theta^2 \bar{\alpha}_1 & \theta^2 \xi_3 \end{pmatrix}, \quad \theta \in U(1),$$

$\alpha_k \in \mathbb{C}$, $\xi_k \in \mathbb{C}$ ($k=1, 2, 3$) で与えられる。 $\phi_*: u(1) \rightarrow e_6$ を ϕ の誘導写像とし, $\alpha = \phi_*(i)$ とする ($u(1) \cong i\mathbb{R}$)。

このとき $B_{E_6}(\alpha, \alpha) = -288$ と存する。

$$\therefore \mu_{E_6}(\phi(U(1))) = 2^3 \sqrt{2} \cdot 3\pi.$$

$$\therefore \mu_{E_6}(U(1) \times_{\mathbb{Z}_4} \text{Spin}(10)) = \frac{2^{88} 3^{18} \sqrt{3}}{5^2 3} \pi^{26}.$$

$$\therefore \mu(E_6) = \mu_{E_6}(U(1) \times_{\mathbb{Z}_4} \text{Spin}(10)) \cdot \mu(E_{III}) = \frac{2^{149} 3^{35} \sqrt{3} \cdot 13}{5^2 \cdot 7 \cdot 161} \pi^{42}.$$

注 6, 7節の方法により, 同様に $\mu(E_7)$ が計算される。

References

- [1] A. Borel and F. Hirzebruch, *Characteristic classes and homogeneous spaces*, Amer. J. Math., 80(1958), 458-538.
- [2] T. Imai and I. Yokota, *Simply connected compact simple Lie group $E_{7(-133)}$ of type E_7* , J. Math. Kyoto Univ., 21(1981), 383-395.
- [3] H. Toda and T. Watanabe, *The integral cohomology ring of F_4/T and E_6/T* , J. Math. Kyoto Univ., 14(1974), 257-286.
- [4] T. Watanabe, *The integral cohomology ring of the symmetric space $EVII$* , J. Math. Kyoto Univ., 15(1975), 363-385.
- [5] I. Yotoka, *Simply connected compact simple Lie group $E_{6(-78)}$ of type E_6 and involutive automorphisms*, J. Math. Kyoto Univ., 20(1980), 447-472.
- [6] 横田一郎, 例外型単純リー群, 現代数学社, (1990).
- [7] K. Abe and I. Yokota, *Volumes of compact hermitian symmetric spaces $EIII$ and $EVII$* preprint.
- [8] _____, *Volumes of compact symmetric spaces*, in preperation.

(以上 参考文献)