

Ergodic properties of dynamical semi-groups
on operator algebras

新潟大・理・渡辺 誠治

§1. 序

作用素環上の正 (完全正) 写像は興味深い重要なトピックである。特に非可換作用素環の研究においては完全正写像が重要で有効な役割りを果たすことが知られている。

一方近年、作用素環上の dynamical semi-group (これは完全正写像のある種の半群として定義される) の理論が注目されている。これは開放系の統計力学を扱うための自然な数学的枠組のひとつとして、物理学者により取り上げられて研究がはじめられた ([2, 5])。そのために物理的に意味のある強い条件のもとで研究されていることが多く、数学 (又は作用素環論) 的観点から見た場合には、まだまだ不十分な点が多く、未完成なものである。我々はこのような作用素環上の半群を一般的、数学的観点から調べたい。

§2. 準備

M をヒルベルト空間 H 上の von Neumann 代数とする。

定義 2.1. M 上の正規正線型写像の σ -弱連続一径数半群 $\alpha = \{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ で $\alpha_0 = I$ (M 上の恒等写像) がすべての α_t が M の identity 1 を保存するものを考える。これを M 上の (quantum) dynamical semi-group という。

各 α_t が正則だから、半群の一般論により上の σ -弱連続性は条件 “ $\lim_{t \downarrow 0} \|p \circ \alpha_t - p\| = 0 \quad \forall p \in M_*$ (M の predual)” と同値である。

定義 2.2. α を M 上の dynamical semi-group, ξ を M に対する cyclicかつ separating norm one vector とする。 ω_ξ (ξ により定義される $B(H)$ 上の vector state) が α -不変のとき三組 (M, α, ξ) を dynamical system (d.s. と略す) という。又 d.s. (M, α, ξ) において、すべての α_t が 2-positive のとき (M, α, ξ) を 2-positive d.s. (2-P.d.s. と略す) という。Completely positive d.s. (C.P.d.s.) についても同様に定義する。

2-P.d.s. (M, α, ξ) に対して、 $T_t A \xi = \alpha_t(A) \xi$ ($A \in M$) により H 上の強連続縮小半群 $T = \{T_t\}_{t \geq 0}$ が定義される。この T を (M, α, ξ) に associate する (縮小) 半群という。これは確率空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の flow とそれによって定義される $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の作用素の半群

との関係の非可換版とさえされる。

次に $(M, \alpha, \xi), (N, \beta, \eta)$ を2つの C.P.d.s., $T = \{T_t\}_{t \geq 0}$, $S = \{S_t\}_{t \geq 0}$ をこれらに associate する半群とする。このとき, $(\alpha \otimes \beta)_t = \alpha_t \otimes \beta_t$ ($t \geq 0$) により, M と N の von Neumann テンソル積 $M \otimes N$ 上の dynamical semi-group $\alpha \otimes \beta$ が定義できる。明らかに vector state $\omega_{\xi \otimes \eta}$ は $\alpha \otimes \beta$ -不変である。
 $(M \otimes N, \alpha \otimes \beta, \xi \otimes \eta)$ を (M, α, ξ) と (N, β, η) の product d.s. と云う。さらに $T \otimes S = \{T_t \otimes S_t\}_{t \geq 0}$ は $(M \otimes N, \alpha \otimes \beta, \xi \otimes \eta)$ に associate する半群になる。

次に [1] で導入された dual dynamical system について考える。
 これはある場合には, α が一般に群でないことに起因する困難を除く働きをする。

補題 2.3. ([1]) π を von Neumann algebra M 上の unital な正線型写像, ξ を M に対する cyclic かつ separating vector で $\omega_\xi \circ \pi = \omega_\xi$ とする。このとき M' (M の可換子環) 上の unital な正線型写像 π' で $\omega_\xi(\pi(A)A') = \omega_\xi(A\pi'(A'))$ ($A \in M, A' \in M'$) となるものが一意に存在する。さらにこのとき π が 2-P. 又は C.P. なら π' もそれぞれ 2-P., C.P. になる。

この補題から任意の d.s. (M, α, ξ) に対して $\omega_\xi(\alpha_t(A)A') =$

$\omega_{\xi}(A\alpha'_t(A'))$ ($A \in M, A' \in M'$) をみたすような d. s. (M', α', ξ) が一意に存在することがわかる。この d. s. (M', α', ξ) を (M, α, ξ) の dual d. s. という。

最後に補題 2.3 の応用として d. s. の spaciality について考える。 (M, α, ξ) を 2-P. d. s., $T = \{T_t\}_{t \geq 0}$ をそれに associate する半群とする。このとき α_t と spacial map $T_t \cdot T_t^*$ の関係について次の定理を得る。

定理 2.4. (M, α, ξ) を 2-P. d. s. とする。このとき各 $t > 0$ に対して $\text{map} : A \rightarrow \alpha_t(A) - T_t A T_t^*$ は M から $B(H)$ への正写像である。さらに (M, α, ξ) が C. P. なら上の map は又 C. P. である。

また補題 2.3 を用いると [3, Theorem 1.1] の改良及び簡単な証明が得られる。

§.3. 固有値

(M, α, ξ) を 2-P. d. s., $T = \{T_t\}_{t \geq 0}$ をそれに associate する半群とする。 $\mathbb{C}^+ \equiv \{z \in \mathbb{C} ; \text{Im } z \geq 0\}$ とし、 $\mathbb{C}^+ \ni z$ に対して、 $H_z \equiv \{\xi \in H ; T_t \xi = e^{izt} \xi \quad \forall t \geq 0\}$ とおくと、 H_z は H の閉部分空間である。 $H_z \neq (0)$ のとき $z, H_z, \xi \in H_z$ をそれぞれ T の固有値, 固有空間, 固有ベクトルという。 E_z を H_z への直交射影, $E(T)$ を T の実固有値の全体とする。次に $\mathbb{C}^+ \ni z$ に対して、 $M_z = \{A \in M ;$

$\alpha_t(A) = e^{it\alpha} A \quad \forall t \geq 0$ は σ -弱閉部分空間となる。 $M \neq (0)$ のとき $M \neq \{0\}$, $A \in M$ をそれぞれ α の固有値, 固有空間, 固有作用素と云う。 α の実固有値の全体を $E(\alpha)$ で表わす。 $E(\alpha)$ は $\mathbb{R}$ の symmetric subset である。又 $M_0 \in M^\alpha$ とかく。

注意: $i\delta, iL$ をそれぞれ α, T の生成作用素とすると, 上で定義した固有値は (一般に非有界) 作用素 δ, L の固有値に他ならない。しかし以下の議論にとっては我々の定義のほうが都合がよい。

[7] において M から M_0 への正規忠実なノルム 1 の射影が存在することが示されているが, さらにくわしく次の定理が得られる。

定理 3.1. (M, α, ξ) を 2-p.d.-s. とするとき, 次の (1) ~ (3) が成立する。

(1) 任意の実数 λ と $A \in M$ に対して, $\frac{1}{t} \int_0^t e^{-i\lambda s} \alpha_s(A) ds$ は $t \rightarrow +\infty$ のとき強極限 ($E_\lambda(A)$ とかく) が存在する。

(2) $E(\alpha) \ni \lambda$ に対して, E_λ は M から M_λ への σ -弱連続ノルム 1 射影となる。

(3) $\{E_\lambda\}$ は次の性質をみたす。

$$(a) E_\lambda(A)\xi = E_\lambda A \xi \quad (A \in M),$$

$$(b) E_\lambda \circ \alpha_t = \alpha_t \circ E_\lambda = e^{it\lambda} E_\lambda \quad (t \geq 0),$$

$$(c) \omega_\xi \circ E_\lambda = 0 \quad (\lambda \neq 0),$$

$$(d) E_\lambda \circ E_\mu = 0 \quad (\lambda \neq \mu),$$

$$(e) E_\lambda(A, B A_2) = A_1 E_{\lambda - \mu - \nu}(B) A_2 \quad (B \in M, A_1 \in M_\mu)$$

$$A_2 \in M_\nu),$$

$$(f) \quad \varepsilon_\lambda(A)^* = \varepsilon_\lambda(A^*) \quad (A \in M).$$

ここで λ, μ, ν は実数とする。

この定理から、 $\lambda, \mu \in E(\alpha)$ に対して $M_\lambda M_\mu \subset M_{\lambda+\mu}$ であることがわかる。次に $\tilde{M}$ を $\{M_\lambda; \lambda \in E(\alpha)\}$ の linear span の σ -弱閉包 (これは von Neumann 代数になる)、 $\tilde{H}$ を $\{H_\lambda; \lambda \in E(\tau)\}$ の生成する閉部分空間とする。又 $H \supset K$ に対して、 K の生成する閉部分空間を $[K]$ で表わす。このとき α と τ の関係について次を得る。

命題 3.2. $E(\alpha) = E(\tau)$, さらに $[M_\lambda \xi] = H_\lambda$, $[\tilde{M} \xi] = \tilde{H}$,
 $M_\lambda H_\mu \subset H_{\lambda+\mu} \quad (\lambda, \mu \in E(\alpha)).$

次に $T' = \{T'_t\}_{t \geq 0}$ を dual d.s. (M', α', ξ) に associate する半群とすると、 $T'_t = T_t^*$ ($t \geq 0$) である。従って次を得る。

命題 3.3. $E(\alpha) = E(\alpha')$.

§.4. 積の固有空間

$(M, \alpha, \xi), (N, \beta, \eta)$ を 2 つの C.P.d.s., 及びこれらに associate する半群をそれぞれ $T = \{T_t\}_{t \geq 0}, S = \{S_t\}_{t \geq 0}$ とする。又積に associate する半群を $T \otimes S = \{T_t \otimes S_t\}_{t \geq 0}$ とする。このとき定理 3.1 で得られた 1/1 ル 1 の射影は von Neumann 代数の積に対して well beha-

ved でない (不動点の空間上への射影を除いて) ので $\alpha \otimes \beta$ の代りに $T \otimes S$ の固有空間を考える。以下の目的のためにはこれで十分である。
 $T, S, T \otimes S$ の実固有値 λ に対する固有空間上への (定理 3.1 で得られた) 射影をそれぞれ $E_\lambda^T, E_\lambda^S, E_\lambda^{T \otimes S}$ とおく。このとき

定理 4.1. 任意の $\lambda \in E(T \otimes S)$ に対して

$$E_\lambda^{T \otimes S} = \sum E_{\lambda'}^T \otimes E_{\lambda''}^S$$

ここで λ', λ'' は $\lambda' + \lambda'' = \lambda, \lambda' \in E(T), \lambda'' \in E(S)$ なるように動く。

系 4.2. $E(\alpha \otimes \beta) = E(\alpha) + E(\beta)$

$$\equiv \{\lambda + \mu; \lambda \in E(\alpha), \mu \in E(\beta)\}$$

系 4.3. $M^\alpha \otimes N^\beta = (M \otimes N)^{\alpha \otimes \beta}$ が成立するのは $E(\alpha) \cap E(\beta) =$

(0) のときに限る。特に $M^\alpha \otimes M^\alpha = (M \otimes M)^{\alpha \otimes \alpha}$ となるのは $E(\alpha) = (0)$ のときに限る。

§.5. エルゴード性

d. s. (M, α, ξ) は $M^\alpha = \mathbb{C}1$ のとき ergodic であるという。

次の定理は [4] において C. p. d. s. に対して示されている。

定理 5.1. d. s. (M, α, ξ) に対して次の (1) ~ (4) は同値である。

- (1) (M, α, ξ) が ergodic,
- (2) α -不変正規状態は ω_ξ だけである,
- (3) ω_ξ は M 上のすべての α -不変状態から成る凸集合の端点,
- (4) (M, α', ξ) が ergodic.

エルゴード性はまた clustering 性によっても特徴づけられる。

定理 5.2. (M, α, ξ) のエルゴード性は次の条件に同値である。

“すべての $A, B \in M$ に対して,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \omega_\xi(\alpha_s(A)B) ds = \omega_\xi(A) \omega_\xi(B) \quad \text{”}。$$

定理 3.1 より 2-P.d. λ . (M, α, ξ) が ergodic のとき $E(\alpha)$ は $\mathbb{R}$ の部分群になり, $E(\alpha) \ni \lambda$ に対して M_λ は $\mathbb{C}U_\lambda$ (U_λ は M のユニタリ元) なる形をしていることがわかる。これは [1] で具体的に構成的方法で示されている。

Ergodic d. λ . の積は必ずしも ergodic とは限らない。

積のエルゴード性は実固有値によって決まる。即ち

定理 5.3. $(M, \alpha, \xi), (N, \beta, \eta)$ を 2 つの C.P.d. λ . とする。このとき $(M \otimes N, \alpha \otimes \beta, \xi \otimes \eta)$ が ergodic となるのは, (M, α, ξ) と (N, β, η) が ergodic であって $E(\alpha) \cap E(\beta) = (0)$ のときに限る。

§.6. 混合性

定義 6.1. d. λ . (M, α, ξ) は次の条件をみたすとき弱混合(強混合)であるといわれる。

“すべての $A, B \in M$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t |\omega_\xi(\alpha_s(A)B) - \omega_\xi(A) \omega_\xi(B)| ds = 0$$

$$\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_\xi(\alpha_t(A)B) = \omega_\xi(A) \omega_\xi(B) \right) \quad \text{”}$$

このとき明らかに“強混合 $\Rightarrow$ 弱混合 $\Rightarrow$ ergodic”である。

定理 6.2. d.λ. (M, α, ξ) に対して次の4つの条件を考える。

- (1) (M, α, ξ) が弱混合,
- (2) 任意の $t > 0$ に対して, $\{A \in M; \alpha_t(A) = A\} = \mathbb{C}1$,
- (3) $E(\alpha) = (0)$ かつ (M, α, ξ) が ergodic,
- (4) (M', α', ξ) が弱混合.

このとき $(4) \Leftrightarrow (1) \rightarrow (2) \rightarrow (3)$.

さらにも (M, α, ξ) が 2-P. なら上の4条件と次の条件はすべて同値である。

- (5) すべての $\eta_1, \eta_2 \in H$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t |(T_s \eta_1, \eta_2) - (\eta_1, \xi)(\xi, \eta_2)| ds = 0.$$

(M, α, ξ) が C.P. ならば, 弱混合性はさらに積のエルゴード性によって特徴づけられる。即ち

定理 6.3. C.P.d.λ. (M, α, ξ) に対して次の(1) ~ (3)は同値である。

- (1) (M, α, ξ) が弱混合,
- (2) $(M \otimes M, \alpha \otimes \alpha, \xi \otimes \xi)$ が ergodic,
- (3) $(M \otimes M, \alpha \otimes \alpha, \xi \otimes \xi)$ が弱混合.

次に強混合性に関して次の定理を得る。

定理 6.4. d.λ. (M, α, ξ) に対して次の(1) ~ (4)は同値。

- (1) (M, α, ξ) が強混合,
- (2) 全ての $A \in M, A' \in M'$ に対して $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_{\xi}(\alpha_t(A)A') = \omega_{\xi}(A)\omega_{\xi}(A')$,
- (3) 全ての正規状態 $\phi \in M_*$ と $A \in M$ に対して $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(\alpha_t(A)) = \omega_{\xi}(A)$,
- (4) (M', α', ξ) が強混合.

エルゴード性の場合とちがって, 混合性は d. l. の積に関して compatible である. 即ち

定理 6.5. $(M, \alpha, \xi), (N, \beta, \eta)$ を 2 つの C. P. d. l. とする. このとき $(M \otimes N, \alpha \otimes \beta, \xi \otimes \eta)$ が弱 (強) 混合なのは $(M, \alpha, \xi), (N, \beta, \eta)$ がともに弱 (強) 混合のときに限る.

References

- [1] S. Albeverio and R. Høgh-Krohn, Frobenious theory for positive maps of von Neumann algebras, Comm. Math. Phys. 64 (1978), 83 - 94.
- [2] D.E. Evans and J.T. Lewis, Dilations of irreversible evolutions in algebraic quantum theory, Comm. Dubl. Inst. Adv. Studies Ser. A, 24 (1977).
- [3] D.E. Evans, Completely positive quasi-free maps on the CAR algebras, Comm. Math. Phys. 70 (1979), 53 - 68.
- [4] A. Frigerio, Quantum dynamical semi-groups and approach to equilibrium, Lett. Math. Phys. 2 (1977), 79 - 87.
- [5] G. Lindblad, On the generators of quantum dynamical semi-

- groups, Comm. Math. Phys. 48 (1970), 119 - 130.
- [6] E. Størmer, Spectra of ergodic transformations, J. Functional Anal. 15 (1974), 202-215.
- [7] S. Watanabe, Ergodic theorems for dynamical semi-groups on operator algebras, Hokkaido Math. J. 8(1979), 176 - 190.
- [8] S. Watanabe, Asymptotic behavior and eigenvalues of dynamical semi-groups on operator algebras, Preprint.