

Chevalley 群の Springer 表現について

東京理科大 庄司俊明

Introduction

G を標数 p ($\neq 0$) の代数的閉体 k 上定義された連結代数群,
 $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とする. $\mathfrak{g}$ の nilpotent element A に対し, $\mathcal{B}_A$
をその Lie 環が A を含む様な G の Borel subgroup 全体のなす
variety とする. W を G の Weyl 群とする時, T. A. Springer は,
[10] で compact support を持った ℓ -adic cohomology $H_c^i(\mathcal{B}_A, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$
の上への W の表現を定義した. 但し $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ は ℓ -進数体 ($\ell \neq p$)
の代数的閉包を表わすものとする. $Z = Z_G(A)$ を G における
 A の centralizer とし, $C(A) = C_G(A) = Z/Z^\circ$ とおく, (Z° は Z
の単位元の連結成分). $d_A = \dim \mathcal{B}_A$ とすると top cohomology
 $H_c^{2d_A}(\mathcal{B}_A) = H_c^{2d_A}(\mathcal{B}_A, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ の次元は $\mathcal{B}_A$ の最大次元の既約成分の
個数に等しく, $C(A)$ の $H_c^{2d_A}(\mathcal{B}_A)$ への自然な作用は既約成分の
上への置換表現に一致する. 更に W の作用は $C(A)$ の作用と
可換になる. そこで $C(A)$ の既約指標 ϕ に対して

$C(A) \times W$ -module $H_c^{2d_A}(B_A)$ の ϕ -isotypic subspace の分解を $\phi \otimes \chi_{A,\phi}$ とおく. この時 Springer ([10]) は, この様にして定まる W の指標 $\chi_{A,\phi}$ が既約であり, W の既約指標は全て $\chi_{A,\phi}$ の形で (A, ϕ) の G -共役を除いて一意的に定まることを示した. これを Springer 表現という. この小論では $\chi_{A,\phi}$ を具体的に求めることを考える.

$G = GL_n$ の場合, G の nilpotent element A は n の partition λ によって parametrise され, 常に $C(A) = 1$ である. この時 λ の dual partition λ^* に対応する $W = S_n$ の既約指標を χ_{λ^*} とすると, $\chi_{A,1} = \chi_{\lambda^*}$ となることが知られている. (例えば Hotta-Shimomura [3], Hotta-Springer [4]). そこでここでは, G が classical group 及び F_4 型 Chevalley 群の場合を扱う. 方針としては, G の適当な parabolic subgroup P の Weyl 群 W_P について, $H_c^{2d_A}(B_A)$ の W_P -module としての構造を決定する. B_n 型, F_4 型, 及び D_n 型の大部分に於いて, W の既約指標はその W_P への制限によって決まるので, これにより $H_c^{2d_A}(B_A)$ の W -module としての構造も決めることが出来る.

§1. Unipotent variety

W の Springer 表現を定める為には, $\mathcal{B}_A$ の既約成分の上への $C(A)$ の作用を知る事が重要である. そこでまず $\mathcal{B}_A$ の既約成分の構成と, λ の上への $C(A)$ の作用を調べる.

$B \supset T$ を G の Borel subgroup, maximal torus とし, $W = N(T)/T$ とする. G の parabolic subgroup $P \supset B$ を固定する. $P = M \cdot U_P$ を P の Levi 分解, $W_P \subset W$ を P に対応する Weyl subgroup とする. $\mathcal{P}_A$ を λ の Lie 環が A を含む様な parabolic subgroup で, P と共役なものの作る variety とし, $p: \mathcal{B}_A \rightarrow \mathcal{P}_A$ を canonical な surjection とする. $\mathcal{P}_A$ の上には自然に Z が作用して,

$\mathcal{P}_A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ と $\mathcal{P}_A$ の Z -orbit への分解が得られる. $y_0 \in \mathcal{P}_A$ で P に対応する元を表わせば, $p^{-1}(y_0) = (P/B)_A \simeq \mathcal{B}_{A'}^M$ である. 但し $\mathcal{B}_{A'}^M$ は M , $A' = A$ の M -component, に関する $\mathcal{B}_A$ と同様の variety とする. 簡単の為 $y_0 \in Y_\lambda$ と仮定して, $X_\lambda = p^{-1}(Y_\lambda)$ とおく. そこで $\{X_i\}$ を $\mathcal{B}_{A'}^M$ の既約成分とすれば,

$X_\lambda = \bigcup_{\alpha \in Z} \alpha^\circ X_i$ であり, 各 $\alpha^\circ X_i$ は X_λ の既約成分となる.

今, $c_p(A)$ を canonical map: $Z \rightarrow C(A)$ の $Z \cap P$ の像とし, $c'_p(A)$ を canonical map $Z \cap P \rightarrow Z_M(A') \rightarrow C_M(A')$ における $Z^\circ \cap P$ の像として定義する. 但し, $C_M(A') = Z_M(A')/Z_M^\circ(A')$ である. すると X_λ の既約成分, 及び λ の上への $C(A)$ の作用は, Spaltenstein [9] により次の様に決定される.

(i) $C_p(A)$ は $\{X_i\}$ の上に作用する. X_i の $C_p(A)$ -orbit を

$$\overline{X_i} \text{ と表わすと, } Z^\circ X_i = Z^\circ X_j \iff \overline{X_i} = \overline{X_j}$$

(ii) $C_p(A)$ は $\{\overline{X_i}\}$ の上に作用し, $a, b \in C(A)$ に対して,

$$a Z^\circ X_i = b Z^\circ X_j \iff \begin{cases} a^{-1}b \in C_p(A) \text{ かつ} \\ \overline{X_i} = a^{-1}b \overline{X_j} \end{cases}$$

従って Λ : 有限の場合には, B_A の全ての既約成分は $a Z^\circ X_i$ の closure という形で得られる. 一方, Spaltenstein [8] により B_A の既約成分は全て同次元であることが知られているので, $a Z^\circ X_i$ 達の中で最大次元のものを採り出せば, それが B_A の既約成分を全て与えることになる.

X_λ の既約成分は全て同次元であるから, そこで X_λ の次元を調べることも必要となる. それには次の lemma が有用である.

Lemma 1.1. p は very good とし, $Y_\lambda \ni y_0$ とする. その時

$$2 \dim(Z \cap P) \geq \dim Z + \dim Z_M(A').$$

ここで等号の成立する場合に, $\dim X_\lambda = \dim B_A$.

証明は, p : very good より $\dim B_A = \frac{1}{2}(\dim Z - r)$,
 $\dim B_{A'}^M = \frac{1}{2} \dim(Z_M(A') - r)$, 但し $r = \text{rank } G$, とする事を使えば容易に出る.

最後に $Z \backslash P_\lambda$ の parametrization に由して述べる.

$\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を A の G -共役を P -共役類に分けた集合とする.

$Z \backslash P_\lambda$ から $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ への写像 f を $f(ZgP) = g^{-1}A$ の P -共役類として定めれば, f は well-defined な, bijection を与える

ことと容易に確かめられる. 従って $Z \backslash P_\lambda$ の各元は $g^{-1}A$ の

P -共役類として parametrize できる.

注意 1.2. (i) G が classical group の場合, $P \in W_P$ が corank 1 の同じ type の Weyl subgroup に至る様に選ぶ. そして Spaltenstein [9], Srinivasan [11], により Λ は有限である.

$$ZgP = Zg'P \iff (g^{-1}A)' \text{ と } (g'^{-1}A)' \text{ が } M \text{ で共役,}$$

となる事が知られている. (右辺の ' は M -component を表す)

(ii) $G = F_4$ とする. $P \in W_P$ が C_3 型 とするものを取る. その時 A が $A_3 + \tilde{A}_1$ ($C(A) \simeq S_4$), または $C_3 + A_1$

($C(A) \simeq \mathbb{Z}_2$) の type の時を除いて Λ は有限集合となること

が確かめられる. (A の type については, Dynkin [2] 参照)

§2. Springer 表現

§1 の結果を cohomology module の上に翻訳する.

$\mathcal{P}_A$ の locally closed subvariety Y に対して $X = p^{-1}(Y)$ とおく. この時,

Lemma 2.1. $H_c^i(X)$ に canonical な $\mathcal{W}_p$ -module の構造を定義して, $H_c^i(\mathcal{B}_A)$ に対しては π の $\mathcal{W}$ -module の $\mathcal{W}_p$ への制限と一致する様になる.

以下では $\mathcal{B}_A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ は finite union であるとして仮定する. このとき Lemma 2.1 により $H_c^{2d_A}(\mathcal{B}_A) = \bigoplus_{\lambda} H_c^{2d_A}(Y_\lambda)$ と $\mathcal{W}_p$ -module の直和に分解できる. 但し $\dim Y_\lambda = \dim \mathcal{B}_A$ となる $\lambda \in \Lambda$ を動くものとする. ここで $X_\lambda = p^{-1}(Y_\lambda)$ について考えよう. $Y_\lambda \ni y_0$ について, $Y_0 = \mathbb{Z}^0 y_0$, $X_0 = p^{-1}(Y_0)$ とおくと, $C(A)$ の作用を考えると, $X_\lambda = \bigcup_a a X_0$ (disjoint union) とならねば. ここに $a \in C(A)/C_p(A)$ である.

更に X_0 の既約成分の上への $C_p(A)$ の作用は, $H_c^{2d_A}(X_0)$ の上に拡張できて, $C(A) \times \mathcal{W}_p$ -module の同型

$$H_c^{2d_A}(X_\lambda) \simeq \overline{\mathbb{Q}_\ell}[C(A)] \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}[C_p(A)]} H_c^{2d_A}(X_0)$$

を得る.

そこで問題は $H_c^{2d_A}(X_0)$ の $C_p(A) \times \mathcal{W}_p$ -module の構造に帰着

する. これに対しては, いくつかの仮定のもとに $C_p(A) \times \overline{W}_p$ -module として $H_c^{2d_A}(X_0) \simeq H_c^{2d_{A'}}(B_{A'}^M)^{C_p(A)}$ とおけることを示す.
但し $d_{A'} = \dim B_{A'}^M$, 右辺は $C_p(A)$ -不変な部分空間を表わすものとする.

仮定 (S) 次の様な性質を満たす Y_0 の open dense subvariety Y , étale covering $c: \hat{Y} \rightarrow Y$ with group Π (Π : finite), $\hat{Y}$ から $\mathbb{Z}^0 \wedge P$ の morphism s が存在する.

(i) $\hat{Y} \simeq A^k \times S$, ; S は 1次元以下の torus, A^k は k -次元 affine space.

(ii) 任意の $y \in \hat{Y}$ に対して, $s(y)y_0 = c(y)$

(iii) $s(\sigma(y))^{-1}s(y) \in \mathbb{Z}^0 \wedge P$ は $y \in \hat{Y}$ の取り方によらずに,

但し $\sigma \in \Pi$ とする.

Lemma 2.2. 仮定 (S) のもとに $\overline{W}_p$ -module として

$$H_c^{2d_A}(X_0) \simeq H_c^{2d_{A'}}(B_{A'}^M)^{\Pi'}.$$

但し Π' は (iii) によって定まる準同型 $\Pi \rightarrow \mathbb{Z}^0 \wedge P$ の像とする.
更に, もし Π' が $B_{A'}^M$ の automorphism group として $\mathbb{Z} \wedge P$ で不変ならば, 上の同型は $C_p(A) \times \overline{W}_p$ -module として取れる.

証明は $X \times_Y \hat{Y} \simeq p^{-1}(y_0) \times \hat{Y}$ とする事より, Springer 表現の定義に戻り Artin-Schreier covering に関する morphism に延長することによつて得られる.

注意 2.3. G が classical group の場合には, Srinivasan [11] により 仮定 (5') を満たす様な Δ を直接構成することができ.

以下, connected reductive group G に対して 仮定 (5') が満たされる条件を調べる.

Lemma 2.4. $P, Z \cap P$ の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{p}, \mathfrak{L}(Z \cap P)$ とし, A の子における centralizer を $Z_{\mathfrak{p}}(A)$ とおく. その時,
 $\mathfrak{L}(Z \cap P) = Z_{\mathfrak{p}}(A)$ ならば, $Y_0 \simeq Z^0/Z \cap P$

Lemma の仮定は, $Z_{\mathfrak{p}}(A)$ の次元を計算することにより Lemma 1.1 の不等式を利用して確かめることができる. 以下ではこの様な Y_0 についてのみ考えることにする.

ところで, p は very good であるから [1, E-II] により, A に対して G の parabolic subgroup Q , Levi subgroup $L \subset Q$ が canonical に定まって $Q = L \cdot U$ を Levi 分解とすれば

$Z = Z_Q(A) = Z_L(A) \cdot Z_U(A)$ は半直積で, $Z_L(A)$ は reductive, $Z_U(A)$ は Z の unipotent radical であり, $Z/Z^0 \simeq Z_L(A)/Z_L^0(A)$

とすることが知られている。そこで A の weighted Dynkin diagram $D(A)$ によって定まる $\mathfrak{g}$ の grading を $\mathfrak{g}_i$ で表かし, Q の対応する部分を U_i で表わす。従って, $U_0 = L$, $U = \prod_{i>0} U_i$ である。この時, P と Q に関して次の仮定をする。

仮定 (Q)

- (i) $Z^0 \cap P = (Z^0(A) \cap P) \cdot (Z_U(A) \cap P)$: 半直積,
- (ii) $U \cap P \simeq \prod_{i>0} (U_i \cap P)$ as varieties
- (iii) $Z^0(A) \cap P$ は $Z^0(A)$ の semi-parabolic subgroup, 又は semi-parabolic subgroup の Levi subgroup になる。

但し $H \subset G$ が semi-parabolic とは, H が G の maximal unipotent subgroup を含むものと定義する。

以上の仮定のもとで, 仮定 (S') の条件を確かめることができる。実際, この時 $Z_U(A) \simeq A^n$, $Z_U(A) \cap P \simeq A^n$, $Z_U(A)/Z_U(A) \cap P \simeq A^{n-m}$ であり, 更に section $\rho_R: Z_U(A)/Z_U(A) \cap P \rightarrow Z_U(A)$ が存在することが容易に分る。一方, $Z^0(A) = C$ とおくと, (iii) より $S(C \cap P)^\circ$ が C の parabolic subgroup となる様子を $\text{tome } S' \text{ (dim } S' \leq 1)$ が存在する。そこで étale covering $C/(C \cap P)^\circ \rightarrow C/(C \cap P)$ を考えて, $S'(C \cap P)^\circ$ に対応する C の big cell $V_C: S'(C \cap P)^\circ \subset C$ (V_C は $S(C \cap P)^\circ$ の opposite parabolic

subgroup の unipotent radical) を取れば,

$$C/(C \cap P)^\circ \supset V_C \cdot S(C \cap P)^\circ / (C \cap P)^\circ \simeq V_C \cdot S \simeq A^k \times S \quad \text{は,}$$

open dense な $C/(C \cap P)^\circ$ の subvariety であり, section s_C が存在する.

$$\text{そこで } Y = V_C \cdot S(C \cap P)^\circ Z_U(A) / (Z^\circ \cap P),$$

$$\hat{Y} = V_C \cdot S(C \cap P)^\circ Z_U(A) / (Z^\circ \cap P)^\circ \quad \text{とすれば,}$$

$$\hat{Y} \simeq V_C \cdot S(C \cap P)^\circ / (C \cap P)^\circ \times Z_U(A) / Z_U(A) \cap P \quad \text{であり,}$$

canonical map $c: \hat{Y} \rightarrow Y$ に対して, $\rho = (\rho_C, \rho_P)$ は

仮定 (b) の条件を満たすことが確かめられる. 更に, この時

Π' の $H_C^{\text{ad}}(B_{A,1}^M)$ の作用は $C_P(A)$ に一致することも容易に分る.

注意 2.6. $G = F_4$ の場合, $\dim Y_\lambda = \dim B_A$ となり $Y_\lambda \supset Y_0$

に対して, Lemma 2.4 の仮定は成立する. 又 nilpotent element

の P -共役類の分類の結果より仮定 (2) の条件は全て成立する.

§3. Identification

$G = Sp_m$, $O_m \subset GL_m$ を自然な inclusion とする. $A \in \mathfrak{g}$ を

$\mathfrak{gl}_m$ の元とみて m 次の Young diagram $d_m = d_m(A)$ で表わす事

にする. Sp_m , O_m の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{sp}_m$, $\mathfrak{o}_m$ とし, r_i を

$d_m(A)$ の長さ i の行の個数とすると, $A \in \mathfrak{gl}_m$ に対して

$$\begin{cases} A \in \mathcal{P}_m \iff \text{奇数 } i \text{ に対して } r_i \text{ は偶数} \\ A \in \mathcal{O}_m \iff \text{偶数 } i \text{ に対して } r_i \text{ は偶数} \end{cases}$$

となり, 又

$$Z_G(A) \text{ の reductive part } \simeq \begin{cases} \prod_{i: \text{even}} O_{r_i} \times \prod_{j: \text{odd}} Sp_{r_j} & (G = Sp_m) \\ \prod_{i: \text{odd}} O_{r_i} \times \prod_{j: \text{even}} Sp_{r_j} & (G = O_m) \end{cases}$$

である. 従って $Z_G(A)/Z_G^\circ(A) \simeq \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{a \text{ 個}} \simeq \mathbb{Z}_2^a$ である.

$G = Sp_m$ の時は, $a = \#\{r_i \mid r_i \neq 0, i \text{ は偶数}\}$,

$G = O_m$ の時は, $a = \#\{r_i \mid r_i \neq 0, i \text{ は奇数}\}$ である.

そこで r_i に対応する $Z_G(A)/Z_G^\circ(A)$ の generator を

a_i と表わすことにする. $a_i^2 = 1$ であり, 奇数 i に対して $a_i = 1$

($G = Sp_m$), 又は 偶数 i に対して $a_i = 1$ ($G = O_m$) である.

次に $W = W_n$ を C_n 型 Weyl 群とする. W の既約指標は

n の partition の pair (λ, μ) , $|\lambda| + |\mu| = n$ と bijective に対応

する. 但し partition $(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ に対して $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$

と表わす. partition pair $\tau = (\lambda, \mu)$ に対応する W の既約指標

を $\chi_\tau = \chi_{(\lambda, \mu)}$ と表わすことにする. 一方 D_n -型 Weyl 群は

W の index 2 の subgroup W_0 と同一視できる. その時 W_0 の

既約指標の全体は unordered partition pair (λ, μ) , $|\lambda| + |\mu| = n$

と bijective に対応する. 但し (λ, λ) は 2 回数えるものとする.

実際, W の既約指標 $\chi_{(\lambda, \mu)}$ に対して, $\lambda \neq \mu$ ならば

$\chi_{(\lambda, \mu)}|_{W_0}$ も既約であり, $\lambda = \mu$ ならば $\chi_{(\lambda, \mu)}|_{W_0} = \chi_1 + \chi_2$ と同じ次数の W_0 の既約指標の和に分解する.

今, $\tau = (\lambda, \mu)$ ordered pair (又は unordered pair) に
対して, $\lambda^* = (\lambda_i)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$,

$$\mu^* = (\mu_i), \quad \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_s \quad \text{をえれえれ}$$

$(\lambda), (\mu)$ の dual partition (Young diagram の dual に対応する partition) とし, $d_\tau = (d_i)$ を次の様に定義する.

$$(C) \quad G = \mathrm{Sp}_{2n}$$

まず数列 $\{\nu_i\}$ を, $\nu_{2i-1} = \mu_i$ ($1 \leq i \leq s$), $\nu_{2i} = \lambda_i$ ($1 \leq i \leq r$)
 $\nu_i = 0$ その他, と定める. そして, $d_\tau = (d_i)$ を帰納的に次の
様に定める.

$$\text{i)} \quad \nu_i \geq \nu_{i+1} \Rightarrow d_i = 2\nu_i,$$

$$\text{ii)} \quad \nu_i = \nu_{i+1} - 1 \Rightarrow d_i = 2\nu_i + 1, \quad d_{i+1} = 2\nu_i + 1,$$

$$\text{iii)} \quad \nu_i \leq \nu_{i+1} - 2 \Rightarrow d_i = 2\nu_{i+1} - 2, \quad d_{i+1} = 2\nu_i + 2,$$

$$(B) \quad G = \mathrm{O}_{2n+1}$$

まず $\{\lambda_i\}, \{\mu_j\}$ を $i > r, j > s$ に對して $\lambda_i = \mu_j = 0$ とし
全ての自然数に拡張しておく. そして $d_\tau = (d_i)$ を次の様に定める.

$$\text{i)} \quad \mu_i \geq \lambda_i - 1 \Rightarrow d_{2i-1} = 2\mu_i + 1,$$

$$\text{ii)} \quad \mu_i = \lambda_i - 2 \Rightarrow d_{2i-1} = 2\mu_i + 2, \quad d_{2i} = 2\mu_i + 2,$$

$$(ii) \quad \mu_i \leq \lambda_i - 3 \Rightarrow d_{2i-1} = 2\lambda_i - 3, \quad d_{2i} = 2\mu_i + 3,$$

$$(i)' \quad \lambda_i \geq \mu_{i+1} + 1 \Rightarrow d_{2i} = 2\lambda_i - 1,$$

$$(ii)' \quad \lambda_i = \mu_{i+1} \Rightarrow d_{2i} = 2\lambda_i, \quad d_{2i+1} = 2\lambda_i$$

$$(iii)' \quad \lambda_i \leq \mu_{i+1} - 1 \Rightarrow d_{2i} = 2\mu_{i+1} - 1, \quad d_{2i+1} = 2\lambda_i + 1.$$

$$(D) \quad G = O_{2n}$$

辞書式順序に於いて, $\lambda^* \geq \mu^*$ と仮定する. $\{\lambda_i\}, \{\mu_j\}$ は

(B) の場合と同様にする. この時 $d_\tau = (d_i)$ を次の様に定める.

$$(i) \quad \lambda_i \geq \mu_i + 1 \Rightarrow d_{2i-1} = 2\lambda_i - 1,$$

$$(ii) \quad \lambda_i = \mu_i \Rightarrow d_{2i-1} = 2\lambda_i, \quad d_{2i} = 2\lambda_i,$$

$$(iii) \quad \lambda_i \leq \mu_i - 1 \Rightarrow d_{2i-1} = 2\mu_i - 1, \quad d_{2i} = 2\lambda_i + 1,$$

$$(i)' \quad \mu_i \geq \lambda_{i+1} - 1 \Rightarrow d_{2i} = 2\mu_i + 1,$$

$$(ii)' \quad \mu_i = \lambda_{i+1} - 2 \Rightarrow d_{2i} = 2\mu_i + 2, \quad d_{2i+1} = 2\mu_i + 2,$$

$$(iii)' \quad \mu_i \leq \lambda_{i+1} - 3 \Rightarrow d_{2i} = 2\lambda_{i+1} - 3, \quad d_{2i+1} = 2\mu_i + 3.$$

容易に分る様に, $d_\tau = (d_i)$ は有限個の項を除いて 0 であり
それ以外の場合に G の nilpotent element の共役類を定める. そ
こで対応する nilpotent element を A_τ と表わす.

一方, $C_G(A_\tau) = Z_G(A_\tau)/Z_G^0(A_\tau)$ の linear character ϕ_τ を
次の様に定める.

$$\phi_{\tau}(a_i) = \begin{cases} -1 & a_{\tau} \text{ における長さ } i \text{ の行から上の} \\ & \text{定義式 (iii) } (G = \mathrm{Sp}_m), \text{ また (iii)', (iii)'' } \\ & (G = \mathrm{O}_m) \text{ のとき } d_j \text{ と表わされるとき,} \\ 1 & \text{その他} \end{cases}$$

す. $G = \mathrm{O}_m$ の場合は, ϕ_{τ} の $C_G(A_{\tau})$ の上への制限を
同様の記号で表わすものとする. この時,

Theorem 3.1.

(i) $G = \mathrm{Sp}_{2n}$ または $G = \mathrm{SO}_{2n+1}$ とする. partition pair $\tau = (\lambda, \mu)$
に対して (A_{τ}, ϕ_{τ}) を対応させる写像は G の Springer 表現を
explicit に与える. 即ち, (A_{τ}, ϕ_{τ}) に対応する Springer 表現の
指標を $\chi_{A_{\tau}, \phi_{\tau}}$ とすれば, $\chi_{A_{\tau}, \phi_{\tau}} = \chi_{\tau}$ とする.

(ii) $G = \mathrm{SO}_{2n}$ とする. $\tau = (\lambda, \mu)$, $\lambda \neq \mu$ の場合は (i) と同様,
 $\tau = (\lambda, \lambda)$ の場合は, $\phi_{\tau} = 1$ で $\chi_{\tau} = \tilde{\chi}_{A_1, 1} + \tilde{\chi}_{A_2, 1}$ とする.
但し χ_{τ} は τ に対応する W_n の指標, A_i は A の SO_{2n} での
共役類の代表元, $\tilde{\chi}_{A_i, 1}$ は $(A_i, 1)$ に対応する W_0 の
Springer 表現の指標を表わすものとする.

注意 3.2. $G = \mathrm{SO}_{2n}$ の場合, W_F への制限を考える関係上
これ以上は決まらないが, $\tau = (\lambda, \lambda)$ の場合には, A_1, A_2
は共に parabolic type の nilpotent element になる. 従って

$\mathfrak{a}_i$ を A_i に対応する parabolic subgroup で決まる G の
部分 root system とすると Hotta - Springer [4] により,
 $\mathfrak{a}_i$ に対応する Macdonald 表現 $\mu_{\mathfrak{a}_i}$ により
 $\chi_{A_i, 1} = \text{sgn} \otimes \mu_{\mathfrak{a}_i}$ と表わすことができる. 従って, この
場合にも identification は可能になる.

最後に $G = F_4$ の場合を扱う. §1 に述べたことから G の
nilpotent element の P -共役類を決定し, その centralizer の次元を
調べることによって $\mathfrak{a}_\alpha$ の既約成分を決定できる. (§1 に
述べた例外の場合は, 別に扱う必要がある). それに対して
条件 (2) の成立することを確認, (3) の場合の結果を使えば
 F_4 の場合にも W_P の制限を決めることができる. F_4 の
character table (T. Kondo [5]) によれば, W の既約指標
は全て W_P の制限によって決まるから, これから identification
が出来る. 結果は表 I に示す通りである. 表 I において
第一列は, nilpotent element の共役類の代表元を表わし,
第三列の既約指標 $\chi_{i,j}$ は F_4 の character table において
degree i の j 番目の指標を表わす. 但し, $\chi_4, \chi_{12}, \chi_{16}$ は
それぞれ degree の isolated character である. $A_3 + \bar{A}_1$ の場合に
下の記号は対応する $C(A) \simeq S_4$ の既約指標を表わす Young diagram
を意味する.

表 I

 F_4 の Springer 表現

A の type	$C(A)$	既約指標
ϕ	1	$\chi_{1,1}$
A_1	1	$\chi_{2,3}$
$\tilde{A}_1$	Z_2	$\chi_{4,1}, \chi_{2,1}$
$A_1 + \tilde{A}_1$	1	$\chi_{9,1}$
A_2	Z_2	$\chi_{8,3}, \chi_{1,3}$
$\tilde{A}_2$	1	$\chi_{8,1}$
$A_2 + \tilde{A}_1$	1	$\chi_{4,3}$
$A_1 + \tilde{A}_2$	1	$\chi_{6,1}$
B_2	Z_2	$\chi_{9,3}, \chi_4$
$A_1 + B_2$	Z_2	$\chi_{16}, \chi_{5,2}$
$A_3 + \tilde{A}_1$	S_4	$\chi_{12}, \chi_{9,2}, \chi_{6,2}, \chi_{1,2}$ $\square\square\square\square$ $\square\square$ $\square$ $\square$
B_3	1	$\chi_{8,2}$
C_3	1	$\chi_{8,4}$
$C_3 + A_1$	Z_2	$\chi_{9,4}, \chi_{2,2}$
B_4	Z_2	$\chi_{4,4}, \chi_{2,4}$
F_4	1	$\chi_{1,4}$

References

- [1] Borel, A et al. ; Seminar in algebraic groupes and related finite groups. Lecture Notes in Math. 131, Springer.
- [2] Dynkin, E. B. ; Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras. A. M. S. Translations (2) 6, (1957) 111 - 244.
- [3] Hotta, R. and Shimomura, N. ; The fixed point subvarieties of unipotent transformations on generalized flag varieties and the Green functions — combinatorial and cohomological treatments centering GL_n . To appear
- [4] Hotta, R and Springer, T. A. ; A specialization theorem for certain Weyl group representations and an application to the Green polynomials of Unitary groups.
Inventiones Math. 41, (1977) 113 - 127.
- [5] Kondo, T. ; The characters of the Weyl group of type F_4 .
J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec I, 11 (1965) 145 - 153.
- [6] Shoji, T. ; On the Springer representations of the Weyl groups of classical algebraic groups. To appear
- [7] Shoji, T. ; On the Springer representations of Chevalley groups of type F_4 . To appear

- [8] Spaltenstein, N. ; On the fixed point set of a unipotent element on the variety of Borel subgroup.
To appear
- [9] Spaltenstein, N. ; Sous groupes de Borel contenant un unipotent donné. To appear
- [10] Springer, T.A. ; Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups.
Inventiones Math. 36. (1976), 173-207.
- [11] Srinivasan, B. ; Green polynomials of finite classical groups. Comm. in Algebra 5, (1977) 1241-1259.