

# プラズマ平衡に現れる Queer Differential Equation の 解の存在について

電気通信大学 中村正彰 (Masaaki Nakamura)

核融合を目指した、トカマク・プラズマの平衡に現れる  
非線形問題を紹介し、その解の存在定理を、J. Mossino[1]  
に従って、多価作用素の不動点定理を用いて示す。

## § 1. 多価作用素

$\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  ( $n=2,3$ ) の滑らかな境界をもった有界領域と  
する。  $B = \{v \in L^\infty(\Omega) \mid 0 \leq v(x) \leq |\Omega|, \text{ a.e. } x \in \Omega\}$  とする。

### 1.1. 多価作用素 $\beta: L^2(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$

$v \in L^2(\Omega)$  に対して  $\bar{\beta}(v)(x)$ ,  $\underline{\beta}(v)(x)$  を次のよう  
に定める。

$$\bar{\beta}(v)(x) = |\{y \in \Omega \mid v(y) \geq v(x)\}|$$

$$\underline{\beta}(v)(x) = |\{y \in \Omega \mid v(y) > v(x)\}|$$

ここで  $|\{ \cdot \}|$  は  $\{ \cdot \}$  のルベーグ測度である。

すると一般に

$$\bar{\beta}(v)(x) \geq \underline{\beta}(v)(x) \quad \text{a.e. } x \in \Omega$$

このとき  $\beta(v)(x)$  を次のように定める。

$$\beta(v)(x) = [\underline{\beta}(v)(x), \bar{\beta}(v)(x)], \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

一般に  $\beta(v)(x)$  は多価である。

(注)  $0 \leq \chi \leq |\Omega|$ ,  $|\{y \in \Omega \mid v(y) = \chi\}| = 0$  のとき

$$\bar{\beta}(v)(x) = \underline{\beta}(v)(x)$$

以上により  $\beta: L^2 \rightarrow B \subset L^\infty(\Omega)$  を定める。

$$\beta(v) = \{\xi \in B \mid \xi(x) \in \beta(v)(x), \text{ a.e. } x \in \Omega\}$$

### 1.2. カラテオドリ作用素 $\mathcal{J}: L^2 \rightarrow L^2$

$\mathcal{J}: \Omega \times [0, |\Omega|] \rightarrow \mathbb{R}$  で次の条件 i) ~ iii) を満たすものをカラテオドリ関数といい、 $\mathcal{J} \in \text{CAR}(\Omega)$  で表す。

G i)  $\mathcal{J}(x, \cdot)$  連続 a.e.  $x \in \Omega$

G ii)  $\mathcal{J}(\cdot, s)$  可測 a.e.  $s \in [0, |\Omega|]$

G iii)  $|\mathcal{J}(x, s)| \leq a(x) + b|s|^p$ ,  $a \in L^2$ ,  $1 \leq p < +\infty$ .

すると、

(1) G i), G ii) が満たされていると、任意の可測関数  $v(x)$  に対して  $\mathcal{J}(x, v(x))$  は可測関数となる。

(2)  $v \in L^\infty$  ならば  $\mathcal{J}(x, v(x)) \in L^2$ .

### 1.3. 作用素 $T: L^2 \rightarrow L^2$

$$\therefore \lambda = g(x, \mu) \in g(x, \beta(v)(x))$$

b) ほとんどすべての  $x \in \Omega$  に対して  $g(x, \beta(v)(x))$  は連結である。

c)  $K_i, i=1, 2$  は相対開集合で次の条件を満たすことができる。

$$g(x, \beta(v)(x)) = K_1 \cup K_2, \quad K_1 \cap K_2 = \emptyset$$

$K_i$  に対して  $F_i$  を次のように定める。

$$F_i = \{ \mu \in \beta(v)(x) \mid g(x, \mu) \in K_i \}, \quad i=1, 2.$$

すると

$$\beta(v)(x) = F_1 \cup F_2, \quad F_1 \cap F_2 = \emptyset, \quad F_i \text{ 開 } (\because G1)$$

これは  $\beta(v)(x)$  が開区間 (= 連結) であることと

矛盾する。

c)  $g(x, \beta(v)(x)) \subset \mathbb{R}$  連結閉集合であるから凸集合。

d)  $\Gamma(v)$  は閉集合。

e)  $\gamma_n \in \Gamma(v), \gamma \rightarrow \gamma$  in  $L^2$  ならば  $\gamma \in \Gamma(v)$  を示す。

$$\gamma_n \rightarrow \gamma \text{ in } L^2$$

$$\Rightarrow \exists \gamma_{n_j} \text{ s.t. } \gamma_{n_j} \rightarrow \gamma \text{ a.e. } x.$$

$$\Rightarrow \gamma_n(x) \in \Gamma_1(v)(x) \text{ a.e. } x.$$

$$\Rightarrow \gamma \in \Gamma_1(v)$$

iii)  $\Gamma(v)$  は凸集合

8.  $\beta$  に  $g, \gamma$ . 多価作用素  $\Gamma: L^2 \rightarrow L^2$  を次のように定める。

$$\begin{aligned}\Gamma(v) &= g \circ \beta(v) \\ &= \{ \varphi \in L^2 \mid \exists \xi \in B \text{ such that } \xi \in \beta(v), \varphi = g \circ \xi \}.\end{aligned}$$

## § 2. 問題の紹介

### 問題 1.

次の方程式を満たす  $u \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  を求めよ。

$$-\Delta u \in g \circ \beta(u) \quad \text{in } \Omega$$

### 問題 2

次の方程式を満たす  $u \in H^2(\Omega)$  を求めよ。

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + u \begin{cases} = 0 & \text{if } u \geq 0 \\ \in g \circ \beta(u) & \text{if } u < 0 \end{cases} & \text{in } \Omega \\ u = \text{未知定数} & \text{on } \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = -1 \end{array} \right.$$

## § 3. 一般存在定理

### 3.1. 多価作用素 $\Gamma: L^2 \rightarrow L^2$ の性質

$\Gamma 1)$   $\Gamma(L^2(\Omega)) \subset L^2(\Omega)$  有界

$\Gamma 2)$  任意の  $v \in L^2(\Omega)$  に対し  $\Gamma(v) \neq \emptyset$ 、凸な

閉集合。

$\Gamma 3)$   $\Gamma$  が  $\Gamma$  ならば  $G(\Gamma) = \{(v, \varphi) \mid \varphi \in \Gamma(v)\} \subset L^2_s \times L^2_w \leftarrow$   
 び閉集合。

このとき

### 命題 3.1.

$\Gamma 1), \Gamma 2)$  の下で  $\Gamma 3)$  は

$\Gamma 3) \Leftrightarrow \Gamma: L^2_s \rightarrow L^2_w$  上半連続

ここで  $L^2_{s(w)}$  は 強(弱)位相で考えた  $L^2$  である。

### 3.2. 作用素 $A$

$V$  をヒルベルト空間で次の条件を満たすものとする。

$$H^1_0(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$$

このとき  $A: V \rightarrow V'$  は次の条件を満たすとする。

A1)  $A$  は連続

A2)  $A$  は制圧的 (coercive)

A3)  $R(A) = V'$

A4)  $K \subset V'$  凸閉集合とすると  $A^{-1}(K) \neq \emptyset$  も凸閉集

合。

$$(注1) \quad A \text{ coercive} \Leftrightarrow \lim_{\|v\| \rightarrow \infty} \frac{(Av, v)}{\|v\|} = \infty$$

$$(注2) \quad A \text{ 線形ならば } A1) \sim A3) \Rightarrow A4)$$

例1)  $V = H_0^1(\Omega)$ ,  $A = -\Delta$  とすると  $A1) \sim A4)$

はすべて満たされる。

例2)  $V = H^1(\Omega)$ ,  $A = -\Delta + 1$  とすると  $A1) \sim A4)$

はすべて満たされる。

(注3)  $V \subset L^2$  コンパクトであるから  $A^{-1}: V' \rightarrow V$  は

$L^2 \subset (H^1)' \subset V' \subset H^{-1}$  を考慮すると  $L^2$  に制限すれば

$L^2 \rightarrow L^2$  の作用素としてコンパクトである。従って

$L_w^2 \rightarrow L^2$  連続である。

### 3.3. 多価作用素の不動点定理. Ky Fan の定理

定理1 Ky Fan の不動点定理 [ ]

$E$ : ハウスドルフ・局所凸空間

$K \subset E$  凸コンパクト集合  $\neq \emptyset$

$T: K \rightarrow 2^K$  次の条件を満たす。

i)  $T$  は上半連続

ii) 任意の  $x \in K$  に対して  $T(x)$  は空でない凸閉集合。

$\Rightarrow x_0 \in K$  で  $x_0 \in T(x_0)$  なる元  $x_0$  が存在する。

### 3.4. 一般存在定理

定理2.

$\Omega$  滑らかな境界をもつ  $\mathbb{R}^n$  の有界領域。

$V$  ヒルベルト空間で  $H^1_0(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$  を満たす.

$A: V \rightarrow V'$  で  $A(1) \sim A(4)$  を満たす.

$\Gamma: L^2 \rightarrow V'$  で  $\Gamma(1) \sim \Gamma(3)$  を満たす.

$\Rightarrow$

$u \in V$  で  $u \in A^{-1} \circ \Gamma(u)$  を満たすものが存在する.

(証明)

$\Gamma(1)$  と  $A(2)$  により

$\exists B \subset V$  閉球 s.t.  $A \circ \Gamma(L^2(\Omega)) \subset B$ .

このとき

$B \subset V \subset H^1(\Omega) \subset L^2$  から  $B \subset L^2$  凸コンパクト集合.

従って  $A^{-1} \circ \Gamma(B) \subset B$ .

$\Gamma(2)$  により  $\forall v \in B$  に対して  $\Gamma(v)$  凸閉集合  $\neq \emptyset$ .

$A(4)$  により  $A^{-1} \circ \Gamma(v)$  凸コンパクト集合  $\neq \emptyset$ .

$\Gamma(3)$  により  $G(\Gamma) \subset L^2 \times L^2_{\omega}$  閉凸. 可分かつ上半連続

$A^{-1}: L^2_{\omega} \rightarrow L^2$  連続であるから  $A^{-1} \circ \Gamma$  上半連続.

従って, Ky Fan の定理により

$\exists u \in B$  s.t.  $u \in A^{-1} \circ \Gamma(u)$ . (q.e.d.)

(注)  $A$  が一価作用素のときは,  $Au \in \Gamma(u) \Leftrightarrow u \in A^{-1} \circ \Gamma(u)$

系 3.1.

$A$  が線形,  $l \in V'$  のとき  $\exists v \in V$  s.t.  $Au \in \Gamma(u) + l$ .

(注)  $A$  の定義域を  $D(A) = \{u \in V \mid Au \in L^2(\Omega)\}$  とし,

$D(A) \subset H^2(\Omega)$  とすると, 方程式の解  $u$  は,

$$u \in V \cap H^2(\Omega).$$

## § 4 問題の解決

## 4.1. 問題 1 の解の存在

$\Gamma_1(v) = g \circ \beta(v)$  が  $\Gamma 2)$ ,  $\Gamma 3)$  を満たすことを示す。

$\Gamma 2)$  の証明

i) 任意の  $v \in L^2$  に対して  $\Gamma_1(v) \neq \emptyset$  を示す。

ii)  $\Gamma_1(v)$  閉集合であることを示す。

a) 任意の  $x$  に対して  $\beta(v)(x)$  の  $x \in \Omega$  に対して  $g(x, \beta(v)(x))$  は閉集合。

$\therefore$   $\lambda_n \in g(x, \beta(v)(x))$ ,  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  ならば  $\lambda \in g(x, \beta(v)(x))$  を示す。

$\forall \lambda_n$  に対して  $\exists \mu_n \in \beta(v)(x)$  s.t.  $\lambda_n = g(x, \mu_n)$

$\exists \{\mu_{n_j}\} \subset \{\mu_n\}$  s.t.  $\mu_{n_j} \rightarrow \mu$ .

一方,  $\beta(v)(x)$  は閉区間であることを用いて,  $\mu \in \beta(v)(x)$

$g(1)$  に対して  $g(x, \mu_n) \rightarrow g(x, \mu)$



$\therefore \gamma_i \in \Gamma(v), i=1,2$ . したがって  $\gamma_x = (1-x)\gamma_1 + x\gamma_2 \in \Gamma(v)$  を示す。

ほとんどすべての  $x \in \Omega$  に対して  $\Gamma_1(v)(x)$ .

$\gamma_i(x) \in \Gamma_1(v)(x)$ . かつ  $\Gamma_1(v)(x)$  凸閉集合

従って

$$\gamma_x(x) \in \Gamma_1(v)(x) \quad \text{a.e. } x \in \Omega$$

$$\therefore \gamma_x \in \Gamma_1(v)$$

$\Gamma_3$  の証明

(\*)  $v_n \rightarrow v$  in  $L^2$ ,  $\gamma_n \in \Gamma_1(v_n)$ ,  $\gamma_n \rightarrow \gamma$  in  $L^2$  ならば  $\gamma \in \Gamma_1(v)$  を示す。

$v_n \rightarrow v$  in  $L^2$  であるから 部分列  $\{n_k\}$  とおくと (1.2.5)

$$v_{n_k}(x) \rightarrow v(x) \quad \text{a.e. } x \in \Omega \quad \text{と } (1.2.5) \text{ である。}$$

Egoroff の定理により

$$\forall \eta > 0, \exists K_\eta \subset \Omega \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} |\Omega - K_\eta| \leq \eta, \\ v_{n_k}|_{K_\eta} \rightarrow v|_{K_\eta} \text{ 一様} \end{cases}$$

従って

$$\gamma(x) \in g(x, \beta(v)(x)) \quad \text{a.e. } x \in K_\eta$$

を示せば (\*) が成立する。

任意の正の数  $\varepsilon$  を固定して考える。

$$\exists m_0 = m_0(\eta, \varepsilon) \quad \text{s.t.} \quad m \geq m_0 \quad \text{ならば} \quad \sup_{K_\eta} |v_m(x) - v(x)| < \varepsilon$$

$m \geq m_0, x \in K_\eta$  と  $\delta \geq \varepsilon$

$$\begin{aligned} \underline{\beta}(v_m)(x) &= |\{y \in \Omega \mid v_m(x) - v_m(y) > 0\}| \\ &\geq |\{y \in K_\eta \mid v_m(x) > v_m(y)\}| \\ &\geq |\{y \in K_\eta \mid v(x) \geq v(y) + 2\varepsilon\}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &|\{y \in \Omega \mid v(x) - v(y) \geq 2\varepsilon\}| \\ &= |\{y \in K_\eta \mid v(x) - v(y) \geq 2\varepsilon\} \cup \{y \in \Omega - K_\eta \mid v(x) - v(y) \geq 2\varepsilon\}| \\ &\leq |\{y \in K_\eta \mid v(x) - v(y) \geq 2\varepsilon\}| + |\{y \in \Omega - K_\eta \mid v(x) - v(y) \geq 2\varepsilon\}| \\ &\leq |\{y \in K_\eta \mid v(x) - v(y) \geq 2\varepsilon\}| + \eta \end{aligned}$$

従って

$$\underline{\beta}(v_m)(x) \geq -\eta + |\{y \in \Omega \mid v(x) \geq v(y) + 2\varepsilon\}|$$

同様に

$$\overline{\beta}(v_m)(x) \leq \eta + |\{y \in \Omega \mid v(x) - v(y) \geq -2\varepsilon\}|$$

$$\{ = \}''$$

$$\sigma(a, x) = |\{y \in \Omega \mid v(x) - v(y) \geq a\}|$$

と  $\delta' < \varepsilon$

$$\beta(v) \subset [-\eta + \sigma(2\varepsilon, x), \eta + \sigma(-2\varepsilon, x)] = S(\eta, \varepsilon, x)$$

従って

$$v_m(x) \in \mathcal{I}(x, \beta(v_m)(x)) \subset \mathcal{I}(x, S(\eta, \varepsilon, x)), \text{ a.e. } x \in K_\eta$$

また

$$\{\phi \in L^2(K_\eta) \mid \phi(x) \in \mathcal{I}(x, S(\eta, \varepsilon, x)) \text{ a.e. } x \in K_\eta\} \text{ は}$$

閉集合。

— 5 —

$$f_m|_{K_\eta} \rightarrow f|_{K_\eta} \text{ in } L^2(K_\eta)$$

従って、

$$\forall \eta > 0, \forall \varepsilon > 0 \text{ に対して}$$

$$f(x) \in g(x, S(\eta, \varepsilon, x)) \text{ a.e. } x \in K_\eta$$

$$\varepsilon = \varepsilon_n \downarrow 0 \text{ と可決と}$$

$$\sigma(2\varepsilon, x) \uparrow \beta(v(x)), \sigma(-2\varepsilon, x) \downarrow \bar{\beta}(v(x)) \text{ a.e. } x \in \Omega$$

$$\therefore S(\eta, \varepsilon, x) \downarrow [-\eta + \beta(v(x)), \eta + \bar{\beta}(v(x))] \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

従って、

$$\forall \eta > 0, \text{ a.e. } x \in K_\eta \text{ に対して}$$

$$f(x) \in g(x, [-\eta + \beta(v(x)), \eta + \bar{\beta}(v(x))])$$

次に、

$$\eta = \eta_n \downarrow 0 \text{ と可決と } K_\eta \uparrow$$

つまり

$$\eta' \leq \eta \Rightarrow (x \in K_\eta \Rightarrow x \in K_{\eta'})$$

$$\therefore \forall \eta' > 0, \text{ a.e. } x \in K_{\eta'}, \forall \eta' \leq \eta \text{ に対して}$$

$$f(x) \in g(x, [-\eta + \beta(v(x)), \eta' + \bar{\beta}(v(x))])$$

$$\therefore \eta' \downarrow 0 \text{ と可決と}$$

$$f(x) \in g(x, [\beta(v(x)), \bar{\beta}(v(x))]) \quad (\text{q.e.d.})$$

$$V = H_0^1(\Omega), A = -\Delta \text{ と可決して } A(1) \sim A(4) \text{ に対して}$$

満たす  $u$ 、解の正則性により、 $u \in H^2 \cap H^1_0$  である。

#### 定理 4.1.

$$\exists u \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega) \text{ s.t. } -\Delta u \in T_1(u)$$

#### 4.2. 問題 2 の解の存在

$$V = \{ v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\partial\Omega} = \text{定数} \},$$

$$D(A) = V, \quad A = -\Delta + I$$

とすれば  $A1) \sim A4)$  はすべて満たす。

さらに

$$l \in V' \text{ 对 } l(v) = -v|_{\partial\Omega} \text{ 与え } A^{-1}l \in H^2$$

$T_2(v)$  を次のように定める。

$$T_2(v) = h(-v)T_1(v)$$

ここで

$$h(-v)(x) = [ \underline{h}(-v)(x), \bar{h}(-v)(x) ],$$

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}, \quad \underline{h}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$T_1), T_2)$  は明らかに満たす。

$T_3)$  の証明。

$T_1$  に対する証明のときと同じ仮定の下に

$$h(x) \in T_2(v)(x) \quad \text{a.e. } x \in K_\gamma$$

を示せばよい。

同様に、 $\varepsilon > 0$ ,  $m \geq m_0$  を固定して考えよう。

a.e.  $x \in K_\gamma$  に対して

$$\beta(v_m(x)) \subset [-\gamma + \sigma(2\varepsilon, x), \gamma + \sigma(-2\varepsilon, x)] = S(\gamma, \varepsilon, x)$$

より、

$$\underline{h}(-v_m(x)) \geq \underline{h}(-v(x) - \varepsilon),$$

$$\bar{h}(-v_m(x)) \leq \bar{h}(-v(x) + \varepsilon),$$

$$\therefore \underline{h}(-v_m(x)) \subset [\underline{h}(-v(x) - \varepsilon), \bar{h}(-v(x) + \varepsilon)] = T(\varepsilon, x)$$

よって、 $m \geq m_0$ , a.e.  $x \in K_\gamma$  に対して

$$\gamma_m(x) \in \underline{h}(-v_m(x)) \cap \gamma(x, \beta(v_m(x))) \subset T(\varepsilon, x) \cap \gamma(x, S(\gamma, \varepsilon, x))$$

$T(\varepsilon, x) \downarrow \underline{h}(-v(x))$  ( $\varepsilon \downarrow 0$ ) であり、"値に

$m \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\gamma' \rightarrow 0$  とおくと、

$$\gamma(x) \in T_2(v(x)) \quad \text{a.e. } x \in K_\gamma \quad (\text{q.e.d.})$$

さらに系3.1. と  $u \in H^2(\Omega)$  ならば、

$$u - \Delta u = 0 \quad \text{on } \{u=0\}$$

であることから、解の存在が示される。

#### 定理 4.2.

$$\exists u \in H^2(\Omega) \quad \text{s.t.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + u \begin{cases} = 0 & \text{if } u \geq 0 \\ \in g \circ \beta(u) & \text{if } u < 0 \end{cases} \\ u = \text{未知定数} \\ \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = -1 \end{array} \right.$$

### 文献

- [1] J. Mossino, Some nonlinear problems involving a free boundary in plasma physics, J. of Diff. Eq. 1979, vol. 34 No. 1. pp. 114-138.
- [2] F. Terkelsen, A short proof of Faw's fixed point theorem, Proc. A.M.S. 1974, vol. 42. pp. 643-644.
- [3] M.A. Krasnosel'skii, Topological methods in the theory of nonlinear integral equation, 1964, Pergamon.