

Minlos の定理の逆

九工大情報工 岡崎悦明 (Yoshiaki Okazaki)

1. Bochner 問題

(E, τ) を局所凸ハウスドルフ空間とし $\mathcal{B}_E$ を E' 上の (E から定まる) cylinder sets 全体から成る algebra とする。

$(E', \mathcal{B}_E)$ 上に cylinder set measure μ が与えられたとき, その特性関数を $\chi_\mu(x) = \int_{E'} e^{i\langle x, x' \rangle} d\mu(x')$ とおけば, $\chi_\mu(x): E \rightarrow \mathbb{C}$ は次の条件をみたす;

1. $\chi_\mu(x)$ は E 上 正定値

2. $\chi_\mu(x)$ は E の任意の有限次元部分空間上で連続。

逆に 1. 2. をみたす E 上の関数が与えられたとき, これを特性関数とする $(E', \mathcal{B}_E)$ 上の cylinder set measure が唯一存在する。

[問題] μ が σ -additive なる条件を $\chi_\mu(x)$ の (適当な位相 σ での) 連続性により特徴付けよ。

記号: $B(\tau, E) := \left\{ \chi(x): E \rightarrow \mathbb{C}; \exists \mu \text{ } \sigma\text{-additive such that} \right.$
 $\left. \chi(x) = \int_{E'} e^{i\langle x, x' \rangle} d\mu(x') \right\}$

$C(\sigma, E) := \left\{ \chi(x) : E \rightarrow \mathbb{C} ; E \text{ 上正定値, } \forall \text{有限次之部分空間} \right.$
 $\left. \text{上連続かつ位相 } \sigma \text{ について連続} \right\}$
 $(\sigma \text{ は } E \text{ 上の vector topology である})$

- 定義
1. σ が sufficient topology $\Leftrightarrow C(\sigma, E) \subset B(\tau, E)$
 2. σ が necessary topology $\Leftrightarrow B(\tau, E) \subset C(\sigma, E)$
 3. σ が necessary and sufficient topology
 $\Leftrightarrow C(\sigma, E) = B(\tau, E)$

3. の条件 $C(\sigma, E) = B(\tau, E)$ をみたす位相が一つでもあれば,
 $C(\sigma, E) = B(\tau, E)$ をみたす最弱の vector topology σ_0 が存在
 する。この σ_0 は S -topology と呼ばれる。Hilbert 空間に
 おいて $C(\sigma, E) = B(\tau, E)$ をみたす位相が二つ知られてい
 る。Sazonov が与えた S -位相と Gross が与えた measurable seminorms による位相である。次の結果が知られている。

定理 E を approximation property をもつ Banach 空間と
 し, E' (dual norm) は L^0 にうめ込み可能とする。
 この時 E 上に S -topology σ_0 が存在し, semi-metrics
 の系, $p_\nu(x) = \int_{E'} | \langle x, x' \rangle | / (1 + | \langle x, x' \rangle |) d\nu(x')$,
 ν は E' 上の $\sigma(E', E)$ -Radon, と与えられる (Mouchtari).

定理 (E, τ) が nuclear $\Rightarrow C(\tau, E) \subset B(\tau, E)$
(Minlos - Yamasaki)

定理 τ, σ を Hilbertian seminorm 型位相とし, $\text{Id}:$
 $(E, \tau) \rightarrow (E, \sigma)$ は Hilbert-Schmidt 型とする。
 $\Rightarrow C(\sigma, \tau) \subset B(\tau, E)$
(Yamasaki)

定理 (E, τ) を metrizable から Hilbertian seminorm 型位相とする。いま $\text{Id}:(E, \tau) \rightarrow (E, \sigma)$ が Hilbert-Schmidt 型なる最弱位相を σ_0 とすると, σ_0 は $\mathcal{S}$ -位相である。
(Yamasaki)

定理 (E, τ) を metrizable から Hilbertian seminorm 型位相とする。このとき, $C(\sigma, E) \subset B(\tau, E)$ ならば $\text{Id}:(E, \tau) \rightarrow (E, \sigma)$ は Hilbert-Schmidt 型である。
(Minlos - Yamasaki)

特に系として, (E, τ) が metrizable から Hilbertian seminorm 型位相のとき, $C(\tau, E) \subset B(\tau, E)$ ならば (ie, τ が sufficient topology ならば) (E, τ) は核型空間となる。

2. Minlos の定理 の 逆

[Minlos の定理 の逆問題 (Yamasaki p. 208)]

局所凸空間 (E, τ) にて, τ 自身が sufficient topology,
即ち, $C(\tau, E) \subset B(\tau, E)$, ならば (E, τ) は
核型空間であるか?

この逆問題が一般には成り立たないことは山崎氏により注意
されている。実際 Hilbert 空間上の S -位相 σ_0 につい
ては $C(\sigma_0, H) = B(\sigma_0, H)$ であるが, H が無限
次元ならば σ_0 は核型ではない。山崎氏は関連した
次の問題も提出している。

[予想 (Yamasaki p. 208 ~ 211)]

(E, τ) を $\mathcal{H}$ 空間とすると $C(\tau, E) \not\subset B(\tau, E)$
であろう。

本報告において, Minlos の定理の逆問題を十分広い空
間にて解決し, 上記の山崎氏の予想が正しいことを報告
する。

核型空間を特徴付ける性質のうちで, cylinder 測度と関
連しているのは scalarly summable sequence によるもの
である。特に Pietsch による核型性条件が以下有用である。

(E, τ) を局所凸ハウスドルフ空間とする。

定義 点列 $(x_n) \subset E$ が scalarly summable

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, x' \rangle| < \infty \quad \text{for } \forall x' \in E'$$

点列 $(x_n) \subset E$ が absolutely summable

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) < \infty \quad \text{for } \forall \text{ conti. seminorm } p \text{ of } \tau$$

点列 $(x_n) \subset E$ が totally summable

$$\Leftrightarrow \exists B \subset E : \text{closed, absolutely convex, bounded} \\ \text{s.t. } \sum_{n=1}^{\infty} p_B(x_n) < \infty, \text{ ことに } p_B \text{ は } B \\ \text{の gauge である。}$$

記号: $sl^1(E) :=$ scalarly summable sequences 全体

$al^1(E) :=$ absolutely summable sequences 全体

$tl^1(E) :=$ totally summable sequences 全体

$sl^1(E), al^1(E), tl^1(E)$ はそれぞれ seminorm 系

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, x' \rangle| \quad (x' \in E')$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) \quad (p: \text{conti. seminorm})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_B(x_n) \quad (B: \text{closed, abs. convex, bounded})$$

により局所凸ハウスドルフ空間となる。以下で $al^1(E)$ の
 “有界集合”に言及するが、セミノルム系 $\sum_{n=1}^{\infty} p(x_n)$ (p は E 上の
 の conti. seminorm 全体) によるものである。

定義 (E, τ) が Property B を持つ

$(\Leftrightarrow)$

任意の有界集合 $\mathcal{B} \subset al^1(E)$ に対して,

$$\exists B \subset E \text{ bounded st } \sum_{n=1}^{\infty} p_B(x_n) \leq 1 \text{ for } \forall (x_n) \in \mathcal{B}$$

(Pietsch § 1.5.5)

(E, τ) が Property B をもつとは $al^1(E) = tl^1(E)$ である。

(E, τ) が metrizable または dual metrizable ならば
 Property B をもつ。また Property B をもつ空間の
 inductive limit, projective limit (いずれも可算個の場合)
 は再び Property B をもつ。

核型性を特徴付ける次の定理が以下基本的である。

定理 (E, τ) は Property B をもち、かつ $sl^1(E) = al^1(E)$
 とする。このとき strong dual E'_b は核型
 ある。
(Pietsch, Th. 4.2.11)

(E, τ) を barrelled space とし, $(x'_n) \in sl^1(E')$ とする
 と, $\varphi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x'_n \rangle|$, $x \in E$, は E 上の
 連続半ノルムである。従ってその特性関数 $e^{-\varphi(x)}$
 なる cylinder set measure μ が (E', β_E) 上に存在する。
 いま τ 自身が sufficient topology, 即ち, $C(\tau, E) \subset B(\tau, E)$,
 とすると, μ は σ -additive である。 μ が discrete な
 1-stable measure であることから 実は $\sigma(E', E)$ -Radon
 measure となっている ($\sigma(E', E)$ は weak* topology)。
 この事実から (x'_n) は E'_b (b は strong dual topology)
 において totally summable なることが証明され, $sl^1(E') = tl^1(E'_b)$
 となる。ここで E'_b が property B をもてば,
 $(E'_b)_b$ は核型であり, 従って (E, τ) 自身も核型となる。

補題 F, G を Banach 空間とし, $\psi: G \rightarrow F$ を連続線
 形写像, $\psi': F' \rightarrow G'$ を adjoint とする。 $(x'_i) \subset F'$,
 $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, x'_i \rangle| < \infty$ for $\forall x \in F$, とし,
 μ を特性関数 $\exp(-\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, x'_i \rangle|)$ なる
 F' 上の 1-stable cylinder set measure とする。
 今, 像 $\psi'(\mu)$ は G' 上の $\sigma(G', G)$ -Radon measure
 とすると, $\sum_{i=1}^{\infty} \|\psi'(x'_i)\|_{G'} < \infty$ である。

上の補題の証明は "任意の Banach 空間は ω type 1-stable" という事実の証明と完全に並行している。

補題 (E, τ) を barrelled とし, $\forall (x'_i) \in sl^1(E')$ に対し, $\exp(-\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, x'_i \rangle|)$ は $\sigma(E', E)$ -Radon measure の特性関数とする。このとき $sl^1(E') = tl^1(E'_b)$ となる。

証明 $\mu(K) > 0$ なる $\sigma(E', E)$ -compact convex set K をとる。 (E, τ) は barrelled より K は E'_b で有界であり, μ が 0-1 law をみたすことから $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} nK) = 1$ である。先の補題より $\sum_{i=1}^{\infty} p_K(x'_i) < \infty$ となる。

定義. barrelled space で strong dual E'_b が "property B" をもつものを "クラス $\mathcal{M}$ " と呼ぶ。

すでに注意したように LF-space, barrelled DF-space 等はクラス $\mathcal{M}$ である。

主定理 (E, τ) をクラス $\mathcal{M}$ とし, τ は sufficient topology とすると, (E, τ) は核型である。

証明 補題より $sl^1(E') = tl^1(E'_b)$ であり, Pietsch の定理
 から $(E'_b)'_b$ は核型となる。E は barrelled より
 (E, T) の位相は $(E'_b)'_b$ から導かれ, E も核型である。

この定理の証明においては, すべての cylinder set measure
 を考える必要はなく, 特性関数が $\exp(-\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, x'_i \rangle|)$
 の形のもの, discrete 1-stable cylinder measure, のみ
 を考えれば十分である。ところで Gaussian cylinder set
 measure のみを考えるとどうであろうか。次の結果は良
 く知られている。

定理 E を metrizableかつ Hilbertian seminorm をもつ
 空間とする。もし E' 上のすべての continuous
 Gaussian cylinder set measure が σ -additive
 ならば, E は核型である。

(Minlos - Yamasaki)

残念ながら一般の空間においては, すべての continuous
 Gaussian cylinder set measure on E' が σ -additive
 だからといって, E が核型であるとは限らない。Fréchet
 空間においても反例がある。

補題 E を Banach 空間とし, dual E' は cotype q ($2 \leq q < \infty$) とする。 $(x'_n) \subset E'$ に対し, μ を 特性関数が $\exp(-\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x'_n \rangle|^2)$ なる Gaussian cylinder set measure とする。 μ が $\sigma(E', E)$ -Radon であれば, $\sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\|_{E'}^q < \infty$ となる。

定理 $2 \leq q < \infty$ 。 (E, τ) を 局所凸ハウスドルフ空間とし, 基本 seminorm 系 $\{p_\alpha\}$ として, dual $(E, p_\alpha)'$ は cotype q なるものが存在するとする。
さらに, (E, τ) は $\mathcal{M}$ であり, $\mathcal{M}$ の E' 上の continuous Gaussian cylinder set measure は σ -additive とする。このとき E は核型である。

文献

1. Y. Okazaki and Y. Takahashi, The converse of Minlos' theorem (to appear in Publ. R.I. M.S., 30-5)
2. A. Pietsch, Nuclear locally convex spaces, Springer, 1972.
3. Y. Yamasaki, 無限次元空間上の測度 (I), 紀伊国屋, 1978.