

Essential Norms Of Integration Operators On Weighted Bloch Spaces

都立工業高専 米田力生 (Rikio YONEDA)

Tokyo metropolitan College of Technology

D を複素平面上の開単位円板とする。 $H(D)$ は、 D 上の解析関数全体とする。 $g \in H(D)$ に対して、作用素 I_g 、 J_g は

$$I_g(h)(z) := \int_0^z g(\zeta)h'(\zeta)d\zeta, \quad J_g(f)(z) := \int_0^z f(\zeta)g'(\zeta)d\zeta$$

と定義される。 $\alpha > 0$ に対して、 α -Bloch空間 B^α は

$$\|f\|_{B^\alpha} := \sup_{z \in D} (1 - |z|^2)^\alpha |f'(z)| < +\infty$$

を満たす D 上の解析関数全体からなる空間とする。また B^{α_0} は B^α の閉部分空間で $(1 - |z|^2)^\alpha |f'(z)| \rightarrow 0$ ($|z| \rightarrow 1^-$) を満たす空間とする。[1]、[2]では、作用素 J_g は荷重付き Bergman 空間上、Hardy 空間上で研究されている。また[5]では、次のような結果が示されている：

$g \in H(D)$ に対して、 J_g が $BMOA$ 上で有界である必要十分条件は

$$\sup_{I \subset \partial D} \left(\frac{(\log \frac{2}{|I|})^2}{|I|} \int_{S(I)} |g'(z)|^2 (1 - |z|^2) dA(z) \right) < +\infty$$

であり、 J_g が $BMOA$ 上でコンパクトである必要十分条件は

$$\lim_{|I| \rightarrow 0} \left(\frac{(\log \frac{2}{|I|})^2}{|I|} \int_{S(I)} |g'(z)|^2 (1 - |z|^2) dA(z) \right) = 0$$

である。ここで、 $S(I) = \{z : 1 - |I| \leq |z| < 1, \frac{z}{|z|} \in I\}$ for an arc I in ∂D とする。

[6]において、Bloch 空間上での作用素 J_g の研究を行い、次のような結果を証明した：

$g \in H(D)$ に対して、 J_g が B 上で有界である必要十分条件は

$$\sup_{z \in D} (1 - |z|^2) \left(\log \frac{1}{1 - |z|^2} \right) |g'(z)| < +\infty$$

であり、 J_g が B 上でコンパクトである必要十分条件は

$$\lim_{|z| \rightarrow 1^-} (1 - |z|^2) \left(\log \frac{1}{1 - |z|^2} \right) |g'(z)| = 0$$

$\alpha > 1$ のとき、 J_g が B^α 上で有界である必要十分条件は $g \in B$ であり、 J_g が B^α 上でコンパクトである必要十分条件は $g \in B_0$ である。

また、[7] において、Bloch 空間上での作用素 I_g の研究を行い、次のような結果を証明した：

$\alpha > 0$ に対して、 I_g が B^α 上で有界である必要十分条件は $g \in H^\infty$ であり、 I_g が B^α 上でコンパクトである必要十分条件は $g = 0$ である。

$\omega : [0, 1] \rightarrow R_+$ を continuous non-increasing function で $\omega(1) = 0$ 、 $\omega(r) > 0$ ($r \in [0, 1]$) を満たすものとする。 $\omega : D \rightarrow R_+$ は the radial extention $\omega(z) = \omega(|z|)$ とする。そのとき、荷重付き Bloch 空間 B_ω は

$$\|f\|_{B_\omega} := \sup_{z \in D} \omega(z) |f'(z)| < +\infty$$

を満たす D 上の解析関数全体からなる空間とする。The associated weighted $\tilde{\omega}$ は

$$\frac{1}{\tilde{\omega}(z)} := \sup_{\|f\|_{B_\omega} \leq 1} |f(z)|$$

として定義する。本研究では、荷重付き Bloch 空間上で、それらの essential norm について研究する。そして、次のような結果を得た：

定理 1. $\omega : [0, 1] \rightarrow R_+$ は continuous non-increasing function で $\omega(1) = 0$ 、 $\omega(r) > 0$ ($r \in [0, 1]$) を満たすものとする。 $\omega : D \rightarrow R_+$ は radial extention $\omega(z) = \omega(|z|)$ とし、 $\sup_{z \in D} \omega(z) n |z|^{n-1} \frac{1}{\tilde{\omega}(z)} < +\infty$ for any n と仮定する。もし J_g is bounded on B_ω ならば、そのとき

$$\|J_g\|_e \sim \lim_{s \rightarrow 1^-} \sup_{|z| > s} \frac{\omega(z)}{\tilde{\omega}(z)} |g'(z)|$$

となる。すなわち、 $C \cdot \lim_{s \rightarrow 1^-} \sup_{|z| > s} \frac{\omega(z)}{\tilde{\omega}(z)} |g'(z)| \leq \|J_g\|_e \leq \lim_{s \rightarrow 1^-} \sup_{|z| > s} \frac{\omega(z)}{\tilde{\omega}(z)} |g'(z)|$ を満たす定数 C が存在する。

定理 2. $\omega : [0, 1] \rightarrow R_+$ は continuous non-increasing function で $\omega(1) = 0$ 、 $\omega(r) > 0$ ($r \in [0, 1]$) を満たすものとする。 $\omega : D \rightarrow R_+$ は radial extention $\omega(z) = \omega(|z|)$ とし、 $c_n := \omega(r_n) n r_n^{n-1}$ and that $\{c_n\}$ converges to some positive constant c as $n \rightarrow \infty$ を満たす列 $\{r_n\} \subset [0, 1]$ が存在するものと仮定する。そのとき、もし I_g is bounded on B_ω ならば、

$$\|I_g\|_e = \lim_{s \rightarrow 1^-} \sup_{|z| > s} |g(z)|$$

となる。

上の定理 1 と定理 2 を利用して、次のような結果を証明することが出来る。

命題 1. ω_1, ω_2 は定理 1、定理 2 を満たすものとする。 $B_{\omega_1} \subset B_{\omega_2} \subset H^\infty$ のとき、 $g \in H(D)$ に対して、次は同値になる：

- (i) $gB_{\omega_1} \subset B_{\omega_2}$;
- (ii) $J_g : B_{\omega_1} \rightarrow B_{\omega_2}$ is bounded operator ;
- (iii) $\lim_{s \rightarrow 1^-} \sup_{|z| > s} \omega_2(z) |g'(z)| < +\infty$.

次は、上の命題 1 の例である：

例 1. $0 < \alpha \leq \beta < 1$ とする。 $g \in H(D)$ に対して、次は同値である：

- (i) $gB^\alpha \subset B^\beta$;
- (ii) $J_g : B^\alpha \rightarrow B^\beta$ is bounded operator ;
- (iii) $g \in B^\beta$.

命題 2. ω_1, ω_2 は定理 1、定理 2 を満たすものとする。 $B_{\omega_1} \subset H^\infty \subset B_{\omega_2}$ でかつ $\frac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)}$ is comparable to $(1 - |z|^2)^\beta$ ($\beta > 0$) のとき、 $g \in H(D)$ に対して、次は同値になる：

- (i) $gB_{\omega_1} \subset B_{\omega_2}$;
- (ii) $J_g : B_{\omega_1} \rightarrow B_{\omega_2}$ is bounded operator ;
- (iii) $\lim_{s \rightarrow 1^-} \sup_{|z| > s} \omega_2(z) |g'(z)| < +\infty$.

次は、上の命題 2 の例である：

例 2. $0 < \alpha < 1 \leq \beta$ とする。 $g \in H(D)$ に対して、次は同値である：

- (i) $gB^\alpha \subset B^\beta$;
- (ii) $J_g : B^\alpha \rightarrow B^\beta$ is bounded operator ;
- (iii) $g \in B^\beta$.

命題 3. ω_1 は定理 1、定理 2 を満たすものとする。 そのとき、 $g \in H(D)$ に対して、次は同値になる：

- (i) $gB_{\omega_1} \subset B_{\omega_1}$;
- (ii) $I_g, J_g : B_{\omega_1} \rightarrow B_{\omega_1}$ are bounded operators ;
- (iii) $g \in H^\infty$, $\lim_{s \rightarrow 1^-} \sup_{|z| > s} \frac{\omega_1(z)}{\tilde{\omega}_1(z)} |g'(z)| < +\infty$.

次は、上の命題 3 の例である：

例 3.1. $g \in H(D)$ に対して、次は同値である :

- (i) $gB \subset B$;
- (ii) $I_g, J_g : B \rightarrow B$ are bounded operators ;
- (iii) $g \in H^\infty$, $\sup_{z \in D} (1 - |z|^2) \left(\log \frac{1}{1 - |z|^2} \right) |g'(z)| < +\infty$.

例 3.2. $g \in H(D)$ に対して、次は同値である :

- (i) $gB_{\log} \subset B_{\log}$;
- (ii) $I_g, J_g : B_{\log} \rightarrow B_{\log}$ are bounded operators ;
- (iii) $g \in H^\infty$, $\sup_{z \in D} (1 - |z|^2) \left(\log \frac{1}{1 - |z|^2} \right) \left(\log \left(\log \frac{1}{1 - |z|^2} \right) \right) |g'(z)| < +\infty$.

ここで、 $B_{\log}$ は、 $\|f\|_{B_{\log}} = \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) \left(\log \frac{1}{1 - |z|^2} \right) |f'(z)| < +\infty$ を満たす D 上の解析関数全体とする。

命題 4. ω_1 は定理 1、定理 2 を満たすものとする。ある定数 $\gamma > 0$ に対して、 $\frac{\omega_1(z)}{\bar{\omega}_1(z)} \leq \gamma(1 - |z|^2)^\alpha$ ($\alpha \geq 1$) のとき、 $g \in H(D)$ に対して、次は同値になる :

- (i) $gB_{\omega_1} \subset B_{\omega_1}$;
- (ii) $I_g : B_{\omega_1} \rightarrow B_{\omega_1}$ is bounded operator ;
- (iii) $g \in H^\infty$.

次は、上の命題 4 の例である :

例 4. $\alpha > 1$ とする。 $g \in H(D)$ に対して、次は同値である :

- (i) $gB^\alpha \subset B^\alpha$;
- (ii) $I_g : B^\alpha \rightarrow B^\alpha$ is bounded operator ;
- (iii) $g \in H^\infty$.

命題 5. ω_1, ω_2 は定理 1、定理 2 を満たすものとし、 $\beta > 0$ とする。 $B_{\omega_1} \subset B_{\omega_2}$ のとき、 $\frac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)}$ is comparable to $(1 - |z|^2)^\beta$ かつ $\frac{\omega_1(z)}{\bar{\omega}_1(z)}$ is comparable to $(1 - |z|^2)$ と仮定すると、 $g \in H(D)$ に対して、次は同値になる :

- (i) $gB_{\omega_1} \subset B_{\omega_2}$;
- (ii) $J_g : B_{\omega_1} \rightarrow B_{\omega_2}$ is bounded operator ;
- (iii) $I_g : B_{\omega_1} \rightarrow B_{\omega_2}$ is bounded operator ;

$$(iv) \quad \lim_{s \rightarrow 1^-} \sup_{|z| > s} \frac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)} |g'(z)| < +\infty ;$$

$$(v) \quad \lim_{s \rightarrow 1^-} \sup_{|z| > s} \frac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)} |g(z)| < +\infty .$$

次は、上の命題5の例である：

例 5. $1 < \alpha < \beta$ とする。 $g \in H(D)$ に対して、次は同値である：

- (i) $gB^\alpha \subset B^\beta$;
- (ii) $I_g : B^\alpha \rightarrow B^\beta$ is bounded operator ;
- (iii) $J_g : B^\alpha \rightarrow B^\beta$ is bounded operator ;
- (iv) $g \in B^{\beta-\alpha+1}$;
- (v) $\sup_{z \in D} (1 - |z|^2)^{\beta-\alpha} |g(z)| < +\infty .$

参考文献

- [1] A.Aleman and A.G.Siskakis, An integral operator on H^p , Complex Variables, 28(1995),149-158.
- [2] A.Aleman and A.G.Siskakis, Integration operators on Bergman spaces, Indiana Univ. Math.J.46(1997),337-356.
- [3] A. Montes-Rodriguez, The essential norm of composition operators on Bloch spaces, Pacific J.Math.188(1999),339-351.
- [4] A. Montes-Rodriguez, Weighted composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions, J.London Math.Soc.(2)61(2000),872-884.
- [5] A.G.Siskakis and R.Zhao, A Volterra type operator on spaces of analytic functions, Contemporary Mathematics.232(1999),299-311.
- [6] R.Yoneda, Integration operators on weighted Bloch space, to appear in Nipponkai Math. Journal.
- [7] R.Yoneda, Multiplication operators, integration operators and companion operators on weighted Bloch spaces, in preprint.
- [8] R.Yoneda, Essential Norms Of Integration Operators And Multipliers On Weighted Bloch Spaces, in preprint.
- [9] K.Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker, New York 1990.
- [10] K.Zhu, Analytic Besov Spaces, J.Math.Anal.Appl.157(1991), 318-336.
- [11] K.Zhu, Bloch type spaces of analytic functions, Rocky Mout.J.Math.23(1993), 1143-1177.
- [12] K.Zhu, Multipliers of BMO in the Bergman metric with applications to Toeplitz operators, J.Funct.Anal.87(1989),31-50.