

PRIMENESS OF TWISTED KNOTS

日本大学 文理学部

茂手木 公彦 (KIMIHICO MOTEGI)

V を 3-sphere S^3 内に標準的に埋め込まれた solid torus とし. $f_n: V \rightarrow V$ を V 上の自己同相写像で

$$\begin{aligned} [\text{meridian}] &\rightarrow [\text{meridian}] \\ [\text{longitude}] &\rightarrow [\text{longitude}] + n [\text{meridian}] \end{aligned}$$

となるものとする。

この f_n を用いて S^3 の自明な knot $K(\subset V)$ を次のように変形することを考える。

$$\begin{array}{ccc} S^3 \supset V & \xrightarrow{f_n} & V \subset S^3 \\ \cup & & \cup \\ K & & f_n(K) \end{array}$$

こうして新しく得られた knot $f_n(K)$ を K_n と表わし. twisted knot と呼ぶ。

ここでは twisted knot の素性 (primeness) について考えてみよう。

$\text{wrap}_V(K)$ は K の V における wrapping 数 (= K と V の meridian disk の幾何的交点数の最小数) を表わす。

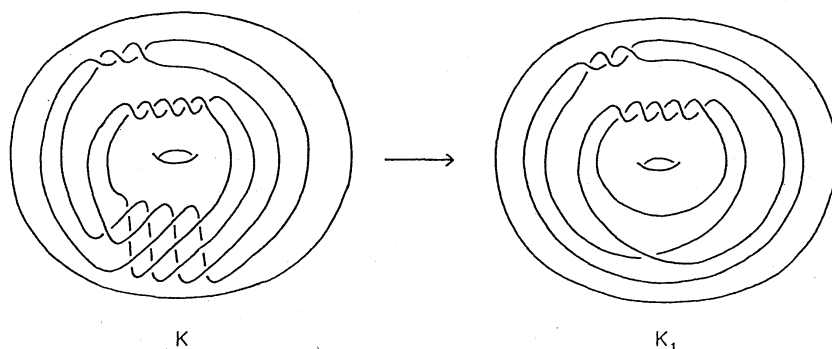
$\text{wrap}_V(K) = 2$ のときは “unknotting 数が 1 の knot は prime” (Scharlemann [S]) の一般化として次が示されている。

定理 1 (Scharlemann-Thompson [S-T], Gordon, Zhang [Z])

$\text{wrap}_V(K) = 2$ のとき, twisted knot K_n は prime.

では, $\text{wrap}_V(K) \geq 3$ のときも同様な事が成り立つのだろうか? 実は $\text{wrap}_V(K) \geq 3$ で成り立たない。

例 (M-Shibuya [M-S])



この例では, K は trivial knot であり, K_1 は torus knot $T(2,3)$ と torus knot $T(2,5)$ の connected sum $T(2,3) \# T(2,5)$ になっている。上の例は $\text{wrap}_V(K) = 4$ であるが, 大山氏(早大)

は. $\text{wrap}_V(K) = 3$ で, $K_1 \cong T(2,3) \# (8\text{の字 knot})$ となる例を構成している. また, 安原氏(早大), 寺垣内氏(神戸大)により様々な例が構成されている. それらの例については, 本講究録の寺垣内氏の講義録に詳しい解説がある. ([T])

しかし, 次の定理は twisted knot は composite knot にはなりにくい事を物語っている.

定理 2

$|n| > 5 \Rightarrow K_n$ は prime

更に, $\{K_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は 高々 5 個の composite knot しか含み得ない.

1. K の自明性と $V\text{-int } N(K)$

以下 $\text{wrap}_V(K) \geq 2$ (i.e. K は V 内の 3-ball に含まれず, core にもなっていない) と仮定する.

K が S^3 内では trivial knot になっているということから K の V への入り方にどのような条件がつくのだろうか?

$V\text{-int } N(K)$ の Jaco-Shalen [J-S], Johannson [Jo] による torus 分解を考える.

∂V を含む piece を P_0 , $\partial N(K)$ を含む piece を P_1 と表わす. ($P_0 = P_1$ のときもある.)

P_i ($i=0,1$) は. Seifert fibred 多様体 であるか.
hyperbolic 多様体 であり ([M-B]). 更に, Seifert fibred
のときは, cable space か composing space になる ([J-S]).
 K の S^3 での自明性から次がわかる.

補題 1.1

- (1) P_0 は composing space ではない.
- (2) P_1 は Composing space ではない.

2. Twisting, Dehn filling と torus 分解

V の meridian-longitude を (μ, λ) で表わす. このとき, ∂V 上の simple loop γ は $p\lambda + q\mu$ ($(p,q)=1$) と表わされる.

twisted knot K_n の exterior $S^3 - \text{int } N(K)$ は.
 $V - \text{int } N(K)$ を ∂V 上の loop $\lambda + (-n)\mu$ に沿って
Dehn filling することによって得られる.

$$\text{i.e. } S^3 - \text{int } N(K) \cong (V - \text{int } N(K)) \bigcup_{\lambda + (-n)\mu = \{*\} \times D^2} S^1 \times D^2$$

また、 S^3 内の knot k が prime かどうかを判定する際に
次が有効.

補題 2.1. ($[G1][J-S]$)

$S^3 \supset k$ が composite knot

$\Leftrightarrow S^3 - \text{int} N(k)$ を torus 分解した際に $\partial N(k)$ を含む
piece が composing space

この補題により、 $S^3 - \text{int} N(K_n)$ を torus 分解した際、
 $\partial N(K_n)$ を含む piece が composing space でないことを示せば
 K_n が prime となる.

$S^3 - \text{int} N(K_n)$ の torus 分解は P_0 の ∂V に沿った
Dehn filling によって決まる. $P_0(p/q)$ で P_0 を ∂V 上の loop
 $p\lambda + q\mu$ に沿って Dehn filling して得られた多様体を表
わす.

補題 1.1. により P_0 は cable space が hyperbolic
多様体なので、それぞれの場合について調べる.

命題 2.3.

P_0 を cable space とする.

このとき、 $n \neq 1$ (or $n \neq -1$) なる任意の n に対して

K_n は prime knot.

この証明は. P_0 の Seifert fibration の filling solid torus $\wedge$ の拡張を調べることによってなされる.

補題 2.4.

P_0 を hyperbolic 多様体とする.

このとき. $P_0(\frac{1}{o})$ は hyperbolic ではない。

補題 2.5.

P_0 が hyperbolic であり. $P_0(-\frac{1}{m})$ 及び $P_0(-\frac{1}{n})$ はともに hyperbolic ではないとする.

このとき. $|m-n| \leq 5$.

この補題は Gordon による強力な定理([G2] [G3]) の帰結である.

以上の補題により次を得る.

命題 2.6.

P_0 が hyperbolic のとき. $|n| > 5$ なる任意の n に対し K_n は prime knot.

更に, $\{K_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は高々5ヶの composite knot しか
含み得ない.

命題 2.3 及び 命題 2.6 より 定理 2 が得られる.

Mathieu により全ての knot は twisted knot か? [M] という
問題が提出されていたが, 最近になって宮崎氏, 安原氏によ
って否定的に解決された. ([Mi], [Y]).

最後に twisted knot に関する予想をあげておく.

予想

- (1) twisted knot K_n が composite になるのは $n=1$
か $n=-1$ の一対のみ.
- (2) twisted knot K_n の prime factors は高々2つ.

(1) に関しては, Mathieu の結果 [M] と 定理 2 を合わせると次の
事まではわかる.

$\text{wind}_V(K)$ を K の V における winding 数 (= K と V の
meridian disk の代数的交点数) を表わす.

系 3

$\text{wind}_v(k)$ が 2, 3, 5 を因数にもたないとする.

このとき $n \neq \pm 1$ なる任意の n に対して K_n は
prime knot.

REFERENCES

- [G1] Gordon, C.McA., *Dehn surgery and satellite knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **275** (1983), 687–708.
- [G2] ———, *When are tori created by Dehn surgery ?*, Conference Report for the International Conference on Knot Theory and Related Topics (1990), 18–19.
- [G3] ———, *Boundary slopes of punctured tori in 3-manifolds*, (to appear.).
- [J-S] Jaco, W. and Shalen, P., *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **220**, 1979.
- [Jo] Johansson, K., *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, Lecture Notes in Math., Vol. 761. Springer-Verlag, 1979.
- [M] Mathieu, Y., *Sur des noeuds qui ne sont pas déterminés par leur complément et problèmes de chirurgie dans les variétés de dimension 3*, These, L'Université de Provence (1990).
- [Mi] Miyazaki, K., Conference Report for “Knot theory and its applications ” (in Japanese), 1991.
- [M-B] Morgan, J. and Bass, H., *The Smith conjecture*, Pure and Applied Math. Academic Press, 1984.
- [M-S] Motegi, K. and Shibuya, T., *Are knots obtained from a plain pattern always prime ?*, Kobe J. Math. (to appear).
- [T] Teragaito, M., *Composite knots trivialized by twists*, preprint.
- [S] Scharlemann, M., *Unknotting number one knots are prime*, Invent. Math. **82** (1985), 37–55.
- [S-T] Scharlemann, M. and Thompson, A., *Unknotting number, genus, and companion tori*, Math. Ann. **280** (1988), 191–205.
- [Y] Yasuhara, A., *On slice knots in the complex projective plane*, Revista Math. (to appear).
- [Z] Zhang, X., *Unknotting number one knots are prime : a new proof*, Proc. Amer. Math. Soc. **113** (1991), 611–612.