

平面 4 次曲線の不変式論と ワイル群 $W(E_7), W(E_6)$ の不変式論

塩田 徹治 (立教大学理学部)

1 昔

n 元 m 次式の (群 SL_n に関する) 不変式環を $S(n, m)$ とする。我々がここで扱うのは $n = 3, m = 4$ の場合である。3 元 4 次式 $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ は平面 4 次曲線をさだめ、それは特異点をもたないなら、種数 3 である。逆に、任意の種数 3 の代数曲線は超楕円的でないかぎり、平面 4 次曲線として実現される (いわゆる標準因子による埋め込みによる: 故にこの実現の仕方は、射影変換を除いて一意的である)。従って、 $S(3, 4)$ の構造は、種数 3 の代数曲線のモジュライ空間 $\mathcal{M}_3$ と密接に関係している。

三十余年前私は、この不変式環 $S(3, 4)$ について研究した。動機は種数 2 のモジュライ (と関連する 2 次のジーゲル・モジュラー形式) について、当時画期的だった Igusa の結果を、種数 3 の場合に拡張したいと思ったからである。また、やはり画期的で一世を風靡しつつあった Mumford の「幾何学的不変式論」(GIT) の一般論に、新たな具体的成果を加えたいと思ったこともある。

この (次数付き環) $S(3, 4)$ について、まず加法的構造、即ち各斉次部分の次元の母関数 (ポアンカレ級数) を、Weyl の指標公式を用いて決定した:

$$\frac{N(T)}{\prod_{d=1}^6 (1 - T^d) \cdot (1 - T^9)} \quad (T = t^3)$$

$$N(T) = 1 + T^3 + T^4 + T^5 + 2T^6 + 3T^7 + 2T^8 + 3T^9 + 4T^{10} + 3T^{11} + 4T^{12} + 4T^{13} + 3T^{14} + 4T^{15} + 3T^{16} + 2T^{17} + 3T^{18} + 2T^{19} + T^{20} + T^{21} + T^{22} + T^{25}.$$

この結果から環 $S = S(3, 4)$ の構造について幾つかの推測 (予想) ができる ([6, Appendix])。とくに

(1) 7 個の代数的に独立な不変式 $I_1, I_2, \dots, I_6, I_9$ ($\deg I_d = 3d$) が存在して、それらの生成する多項式環を P とすると、 S は P の上に整 (integral) となる。

(2) S は、上の 7 個に 6 個の適当な元 $J_3, J_4, J_5, J_6, J_7, J_7'(\deg J_d = 3d)$ を加えた 13 個の元で生成される。

(3) これらの生成元の間には 14 個の基本関係式が存在する (以下略)。

しかしこれらの推測を証明すること (ましてそれを $\mathcal{M}_3$ の有理性の証明につながることは) は難しく、私は目標を下げて $S(3, 4)$ のかわりに、もう少し易しい対象 $S(2, 8)$ を考察し、この環の構造定理を得た。これは、種数 3 の超楕円曲線のモジュライに対応する不変式環で、Igusa の結果を拡張する一つの方向であった ([6])。

より最近、といっても既に十数年前になるが、Dixmier [2] が上の (1) を完全に証明した。コンピュータなしでできているのはすごい。

余談 1 : その少し前、1984/85 年にパリに半年滞在したとき、Dixmier に初めて会った。Raynaud が紹介してくれたのだが、Dixmier は私に、あの不変式論をやったシオダか、ときいた。別の分野 (Operator algebra など) の大家と思っていた人からそうきかれて、ちょっと驚いた。はいと答えると、今でも興味をもっているか、ときく。その頃、私は代数的サイクルのことを主に考えていたので、あまり、と答えてしまったが、失敗だった。彼自身不変式を本気でやり始めていたのを知らなかったのだ。彼のはじめの問いは、私が [6] で Hilbert 以前の「古い」方法を使ったので、もっと年上と思われたのかもしれない。

余談 2 : E. Noether の最初の仕事は、3 元 4 次式の不変式および共変式についての研究であった。Gordan から出されたこの問題に、彼女は成功したとはいいがたい。実際、そこでのネガティブな経験が、後年 Abstract Algebra の建設へ向かった彼女の原動力だったとの説がある。

可換環論の視点から不変式環が研究されたのは、上の二つの時期の中ごろ、70 年代からだっただろうか ([3] など)。しかしこれについてふれる余裕はない。

最近のコンピュータ (computer algebra) の発達により、具体的に不変式を書き下すことも可能になってきた。それと共に、「古い」方法も見直されているようである。

2 今

三十年ほどを経て再び、平面 4 次曲線の不変式論を考えてみることになった。そのきっかけは、最近十年ほど取り組んでいるモデル・ヴェイユ格子の話に自然に、平面 4 次曲線の以下に述べるような標準形が登場したからである。その結果として、射影不変式環 $S(3, 4)$ は、全く別種の (有限) ワイル群 $W(E_7)$ または $W(E_6)$ の不変式論と関係付けられることとなった。

非斉次座標 x, t を $(x_0 : x_1 : x_2) = (1 : x : t)$ となるように定める。このと

き、平面4次曲線のタイプ E_7 の標準形とは、

$$f_\lambda = x^3 + x(p_0 + p_1t + t^3) + q_0 + q_1t + q_2t^2 + q_3t^3 + q_4t^4$$

$$\lambda = (p_0, p_1, q_0, \dots, q_4) \in \mathbf{A}^7$$

であり、また、タイプ E_6 の標準形とは、

$$f_\lambda = x^3 + x(p_0 + p_1t + p_2t^2) + q_0 + q_1t + q_2t^2 + t^4$$

$$\lambda = (p_0, p_1, p_2, q_0, q_1, q_2) \in \mathbf{A}^6$$

である。

いずれの場合にも Γ_λ を $f_\lambda = 0$ によって定義される平面4次曲線とする。
 $(x_0 : x_1 : x_2) = (0 : 1 : 0)$ はその上の変曲点である。

[9, §1] で示したように、一つの変曲点を指定した平面4次曲線は上のいずれかの標準形に同型である。両者の区別は、考えている変曲点が、*ordinary* かまたは *special* か、即ち、変曲点における接線が Γ_λ と3重、または4重に接するかによるのである。

さて、各不変式 $I \in S(3, 4)$ を標準形 f_λ で評価する写像 $I \rightarrow I(f_\lambda)$ が、環の準同型写像

$$\phi : S(3, 4) \longrightarrow \mathbf{Q}[\lambda] = \mathbf{Q}[p_i, q_j]$$

を定義することは明らかである。これをタイプ E_7 または E_6 の評価写像とよび、 ϕ_7 または ϕ_6 とかく。

説明が前後したが、モーデル・ヴェイユ格子の理論によれば、ワイル群 $W(E_7)$ の不変式環 $R(E_7)$ は、自然に $\mathbf{Q}[\lambda]$ と同一視される：それは、次数付き多項式環で、生成元 p_i, q_j の次数は

$$E_7 \text{ の場合 : } wt(p_i) = 12 - 4i, \quad wt(q_j) = 18 - 4j$$

$$E_6 \text{ の場合 : } wt(p_i) = 8 - 3i, \quad wt(q_j) = 12 - 3j$$

で定める([1], [7], [8] 参照)。

他方、 $S = S(3, 4) = \bigoplus_d S_d$ を斉次部分への分解とすると、 $S_d \neq 0$ となるのは d が3の倍数のときに限る。

定理1 (i) タイプ E_7 の評価写像

$$\phi_7 : S(3, 4) \longrightarrow R(E_7) = \mathbf{Q}[p_0, p_1, q_0, q_1, q_2, q_3, q_4]$$

は $S(3, 4)$ から $R(E_7)$ へのウエイト比 $3 : 14$ の（つまり、すべての d について S_{3d} は $R(E_7)_{14d}$ にうつされる）単射準同型である。

(ii) $D \in S(3, 4)$ を平面 4 次曲線の判別式とする (この不変式は $D \in S_{27}$ かつ $D(f) \neq 0$ となるのは $f = 0$ が非特異、という性質で特徴付けられる)。このとき、 $\phi_7(D)$ は、定数倍を除き $R(E_7)$ の判別式 δ_7 に等しい。ここに、 δ_7 は $W(E_7)$ の基本交代式の平方でウェイト 126 である。

定理 2 (i) タイプ E_6 の評価写像

$$\phi_6 : S(3, 4) \longrightarrow R(E_6) = \mathbf{Q}[p_0, p_1, p_2, q_0, q_1, q_2]$$

は $S(3, 4)$ から $R(E_6)$ へのウェイト比 3 : 8 の準同型である。

(ii) $D \in S(3, 4)$ を平面 4 次曲線の判別式とすると、 $\phi_6(D)$ は定数倍を除き $R(E_6)$ の判別式 δ_6 に等しい。ここに、 δ_6 は $W(E_6)$ の基本交代式の平方でウェイト 72 である。

(iii) ϕ_6 は単射ではなく、 $\text{Ker}(\phi_6)$ は次数 60 の元を含む。(多分、生成元だろう)

証明は [12] を参照されたい。

References

- [1] Bourbaki, N.: Groupes et Algèbres de Lie, Chap. 4, 5 et 6, Hermann, Paris (1968); Masson (1981).
- [2] Dixmier, J.: On the projective invariants of quartic plane curves, Adv. in Math. 64, 279–304 (1987).
- [3] Hochster, M., Roberts, J.: Rings of invariants of reductive groups ..., Adv. in Math. 18, (1974).
- [4] Katsylo, P.: Rationality of the moduli variety of curves of genus 3, Comment. Math. Helv. 71, 507–524 (1996).
- [5] Mumford, D.: Geometric Invariant Theory, Springer-Verlag, 1965; 3rd ed. (with J. Fogarty, F. Kirwan), 1994.
- [6] Shioda, T.: On the graded ring of invariants of binary octavics, Am. J. Math. 89, 1022–1046 (1967).
- [7] — : Construction of elliptic curves with high rank via the invariants of the Weyl groups, J. Math. Soc. Japan 43, 673–719 (1991).

- [8] — : Theory of Mordell-Weil lattices, Proc. ICM Kyoto-1990, vol.I, 473-489 (1991).
- [9] — : Plane quartics and Mordell-Weil lattices of type E_7 , Comment. Math. Univ. St. Pauli 42, 61–79 (1993).
- [10] — : Weierstrass transformations and cubic surfaces, Comment. Math. Univ. St. Pauli 44, 109–128 (1995).
- [11] — : A uniform construction of the root lattices E_6, E_7, E_8 and their dual lattices, Proc. Japan Acad. 71A, 140–143 (1995).
- [12] — : Some new observation on invariant theory of plane quartics, to appear in Kodaira volume in Asian J. Math.
- [13] Schur, I. Vorlesungen über Invariantentheorie, Springer-Verlag, 1968.