

Artin-Schreier-Witt 理論の変形

—— u -calculus の視点から ——

筑波大数学系 竹内光弘

(Mitsuhiko Takeuchi)

	群	Lie 環
algebra A の	units $U(A)$	$A, xy - yx$
	$\text{Aut}(A)$	$\text{Der}(A)$
代数群 G の	rational points	Lie algebra
ホップ代数 H の	group-like elements	primitive elements

この表の左右の対応する概念はそれぞれ乗法と加法から、ある共通の手続きで統一的に得られる。乗法と加法の中間的概念として、基礎環の元 u に対する u -乗法を導入し、その手続きを u -乗法に対し適用して得られる概念とその若干の応用を論ずる。

可換環 R 上で考える。

加法と乗法を formal semigroup として捉える。

文字 X, Y の words ($XY, YXY, XYX, \emptyset$ など) のすべての R -線形結合の全体 $R\langle X, Y \rangle$ は R -algebra の構造をもつ。その元としての

$$\text{加法 } F_a(X, Y) = X + Y, \text{ 乗法 } F_m(X, Y) = XY$$

は次のリットで formal semigroup である。

Def $F(X, Y) \in R\langle X, Y \rangle$ が formal semigroup であるとは

$$(i) F(F(X, Y), Z) = F(X, F(Y, Z)) \text{ in } R\langle X, Y, Z \rangle,$$

$$(ii) \exists e_F \in R \text{ with } F(X, e_F) = X = F(e_F, X).$$

Thm R が reduced ならば, $e_F = 0$ なる formal semigroup は次のものに限る:

$$F_{a,b}(X, Y) = X + Y + aXY + bYX,$$

$$\text{すなわち } a, b \in R \text{ with } ab = 0.$$

Cor R が 整域 ならば, $e_F = 0$ なる formal semigroup は

$$F_u(X, Y) = X + Y + uXY \quad (u \in R)$$

及びその opposite に限る。

以下では, このタイプの formal semigroup を考察の対象とする.

F_u は加法 F_a と乗法 F_m の間の deformation と考えられる.

$u=0$ のとき $F_0 = F_a$, $u=1$ のとき $X \mapsto 1+X$ により

$F_1 \cong F_m$ である. $\varphi_u(X) = 1+uX$ は formal semigroup map

$$\varphi_u : F_u \longrightarrow F_m$$

を与える. 即ち, $\varphi_u(F_u(X, Y)) = F_m(\varphi_u(X), \varphi_u(Y))$, $\varphi_u(0) = 1$ が成立つ.

F_u はすべての R -algebra の上に, 0 を単位元とする半群の構造を定義する. A を任意の R -algebra とする.

Lem $a \in A$ が F_u -product に関して unit (このとき a は u -unit とよぶ) $\iff \varphi_u(a) = 1+ua$ が unit. この時 a の F_u -inverse は $a^* = -a\varphi_u(a)^{-1}$ である.

A の u -units の群を $G_u(A)$ とする. R -algebra に群を対応させる関手 G_u は加法群 G_a と乗法群 G_m の間の deformation を与えている: $G_0 = G_a$, $G_1 \cong G_m$.

G_u は faithfully flat R -algebra

$$H_u = R[X, \varphi_u(X)^{-1}]$$

を represent されている。即ち, $G_u(A) \cong \text{Alg}_R(H_u, A)$.

u -derivation と u -automorphism

R -linear map $f: A \rightarrow A$ が
 algebra map とは, $f(ab) = f(a)f(b)$, $f(1) = 1$,
 derivation とは, $f(ab) = af(b) + f(a)b$, $f(1) = 0$
 のことである ($a, b \in A$).

F_u に対応して次の中間的な概念が得られる.

Def $u \in R$ に対し, R -linear map $f: A \rightarrow A$ が
 u -derivation とは

$$f(ab) = af(b) + f(a)b + uf(a)f(b), \quad f(1) = 0$$

$$(a, b \in A)$$

が成立することを定める.

通常の derivation とは 0-derivation の事であり, f が
 1-derivation とは $1 + f$ が A の algebra endomorphism と
 いう事である. A の u -derivation の全体を $\text{Der}_u(A)$ とする.

Prop $\text{Der}_u(A) \subset \text{End}_R(A)$ は F_u -product で閉じている.

A の u -derivation f が $\text{End}_R(A)$ で u -unit である事は $\varphi_u(f) = 1 + uf$ が algebra A の automorphism である事と同値である. このとき $f \in A$ の u -automorphism とよぶ. f の F_u -inverse もまた u -derivation になる. 従って A の u -automorphism の全体を $\text{Aut}_u(A)$ とおけば,

Prop $\text{Aut}_u(A)$ は $G_u(\text{End}_R(A))$ の部分群となる.

$\text{Aut}_0(A) = \text{Der}_0(A) = \text{Der}(A)$ であり, $f \longleftrightarrow 1+f$ は群の同形 $\text{Aut}_1(A) \cong \text{Aut}(A)$ を与える.

u -primitive elements

H は R 上の ホップ代数 とする. その coalgebra structure $\Delta: H \longrightarrow H \otimes H$ 及び $\varepsilon: H \longrightarrow R$ であらうし, antipode $S: H \longrightarrow H$ であらうそう. H の元 x が primitive であるとは, $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, $\varepsilon(x) = 0$ が成立つ事である. このとき $S(x) = -x$ であり, H の primitive elements の全体 $P(H)$ は $[x, y] = xy - yx$ に関して H の Lie subalgebra となり, 更に R が標数 p なら $x \mapsto x^p$ でも閉じている. 一方 H の元 x が group-like であるとは, $\Delta(x) = x \otimes x$, $\varepsilon(x) = 1$ が成立つ事である. このとき $S(x) = x^{-1}$ であり, H の

group-like elements の全体 $G(H)$ は H の units $U(H)$ の subgroup をなす. formal semigroups F_a, F_m を用いて $x \in H$ が

$$\text{primitive} \iff \Delta(x) = F_a(x \otimes 1, 1 \otimes x), \quad \varepsilon(x) = 0,$$

$$\text{group-like} \iff \Delta(x) = F_m(x \otimes 1, 1 \otimes x), \quad \varepsilon(x) = 1$$

と rephrase できるから, 今考えている F_u ($u \in R$) に関連して次の定義を導入するのは自然である.

Def H の元 x が u -primitive とは

$$\Delta(x) = F_u(x \otimes 1, 1 \otimes x), \quad \varepsilon(x) = 0$$

が成立つ事と定める. H の u -primitive elements の全体を $P_u(H)$ とおく.

$P_0(H) = P(H)$, $P_1(H) = \{g^{-1} \mid g \in G(H)\}$ である. x が u -primitive なら $g_u(x)$ は group-like 中々可逆. 従って u -primitive elements は u -units である.

Prop ホップ代数 H に対し, $P_u(H)$ は $G_u(H)$ の subgroup をなす.

群関手 G_u を represent する R -algebra $H_u = R[X, \phi_u(X)^{-1}]$ は, X を u -primitive とする Hopf 代数の構造をもつ. 実際 $\Delta: H_u \longrightarrow H_u \otimes H_u$ は $\Delta(X) = F_u(X \otimes 1, 1 \otimes X)$ なる unique algebra map であり, ε, S も同様に定義される. このホップ代数 H_u は G_u を可換な R -algebra の圏に制限して得られる群関手 G_u を represent している. 即ち

$$G_u|_{\text{com.alg.}} = \text{Sp}_R H_u \quad (H_u \text{ の } \mathbb{A}^1\text{-}R\text{-群スキーム}).$$

とくに $H_0 = R[X], X \text{ primitive}; H_1 = R[X, (1+X)^{-1}], 1+X \text{ group-like. } H_1 \text{ は群環 } R[\mathbb{Z}] \text{ と同形である.}$

$\{G_u(A)\}_{u \in R}$ の構造

R -algebra A とホップ代数 H に対する $\text{Der}(A)$ 及び $P(H)$ は $[x, y] = xy - yx$ (さらに R が標数 p なら x^p) で閉じている. 個々の $u \in R$ でなく, u が R の元を走る family $\{G_u(A)\}, \{P_u(H)\}$ を考えると類似の構造をもつことが分る.

Prop R -algebra A に対し, 群の族 $\{G_u(A)\}_{u \in R}$ は次の operations をもっている:

(i) スカラー乗法. $u, v \in R$ に対し

$$G_{uv}(A) \longrightarrow G_u(A), a \mapsto va$$

は group hom. である.

(ii) u, v -bracket. $u, v \in R$ に対し

$$a \in G_u(A), b \in G_v(A) \text{ ならば } [a, b]_{u,v} \stackrel{\text{def}}{=} (ab - ba) \varphi_u(a)^{-1} \varphi_v(b)$$

は A の uv -unit である. その F_{uv} -inverse は $[b, a]_{v,u}$

である. $\varphi_{uv}([a, b]_{u,v}) = \varphi_u(a) \varphi_v(b) \varphi_u(a)^{-1} \varphi_v(b)^{-1}$ が成立つ.

(iii) R が標数 p (素数) ならば, $a \in G_u(A)$ に対し $a^p \in G_{u^p}(A)$ である.

とくは $G_0(A)$ は (i) ~ (iii) の構造で閉じている. これが A の (p -) Lie 構造というわけである.

例 (u, v -bracket の)

$$[a, b]_{0,0} = ab - ba.$$

$[,]_{1,1}$ は群 $G_1(A)$ の commutator.

$[,]_{1,0}$ は inner action と関係する. 即ち,

$a \in G_u(A)$ に対し

$$\text{id}_A + [a, -]_{1,0} = \text{inn}(1+a) \quad (1+a \text{ の inner 作用}),$$

とくは $[a, -]_{1,0}$ は 1-automorphism である.

(i) ~ (iii) の構造をもつ群の族 $\{G_u(A)\}_{u \in R}$ は、勿論その構造の間に何らかの関係を満たしているであろう。今その関係をすべて明らかにすることはできないが、とりあえず、この族 $\{G_u(A)\}$ を Lie family of groups (標数 p のときは p -Lie family ...) とよぶことにしよう。

Prop (a) R -algebra A に対し、 $\{Aut_u(A)\}_{u \in R}$ は $(p-)$ Lie family $\{G_u(End_R(A))\}_{u \in R}$ の subfamily である。即ち (i) ~ (iii) の operations に関して閉じている。

(b) R 上のホップ代数 H に対し、 $\{P_u(H)\}_{u \in R}$ は $(p-)$ Lie family $\{G_u(H)\}_{u \in R}$ の subfamily である。

(i) ~ (iii) の operations と可換な group hom. の family として $(p-)$ Lie family of groups の hom. が定義される。その例は次に述べる inner u -automorphism である。

Prop R -algebra A に対し

(a) $a \in G_u(A)$ ならば $inn_u(a) \stackrel{\text{def}}{=} [a, -]_{u,0}$ は A の u -automorphism である。 (inner u -automorphism とよぶ)。

$\varphi_u(inn_u(a))$ は $\varphi_u(a)$ による通常の inner action である。

(b) $inn_u : G_u(A) \longrightarrow Aut_u(A)$ は group hom.

(c) $\text{Im}(\text{inn}_u)$ は $\text{Aut}_u(A)$ の normal subgroup*. (その商群 $\overline{\text{Aut}}_u(A)$ は outer u -aut. の群とよぶ).

(d) $\{\text{inn}_u\}_{u \in R} : \{G_u(A)\}_{u \in R} \longrightarrow \{\text{Aut}_u(A)\}_{u \in R}$ は (p-) Lie family の hom. である.

(e) $\{\text{Aut}_u(A)\}_{u \in R}$ の (p-) Lie structure は $\{\overline{\text{Aut}}_u(A)\}_{u \in R}$ 上の (p-) Lie structure を引き起す. 即ち $\{\overline{\text{Aut}}_u(A)\}$ は $\{\text{Aut}_u(A)\}$ の quotient (p-) Lie family である.

所で, R -algebra H_u は群関手 G_u を represent (する) のだから, $\{G_u\}_{u \in R}$ 上の (p-) Lie structure に対応する構造を $\{H_u\}_{u \in R}$ はもつ筈である. とくに R -algebra A が可換 (で R が標数 p) ならば (iii) の operation $a \mapsto a^p$, $G_u(A) \longrightarrow G_{u^p}(A)$ はアーベル群の hom. である. 対応するホップ代数の map

$$H_{u^p} \longrightarrow H_u$$

は, H_{u^p} の canonic な生成元を, H_u の canonic な生成元の p 乗に対応させる写像である. 即ち u -Frobenius map とよぶ.

* $F_u(f, \text{inn}_u a, f^*) = \text{inn}_u g_u(f)(a)$, $a \in G_u(A)$, $f \in \text{Aut}_u(A)$.

Crossed products

群 Γ が環 S に (左から) 環の自己同形として作用しているとき, Γ を base とする左 S -自由加群 $S * \Gamma$ に

$$(a * r)(b * \delta) = a \cdot r(b) * r\delta$$

$(a, b \in S, r, \delta \in \Gamma)$ なる環の構造が入る. これを S と Γ の crossed product とよぶ. 同様に, R 上の $(p-)$ Lie 環 L から, R -algebra A に対する $\text{Der}(A)$ への $(p-)$ Lie map が与えられていければ, $A \otimes U(L)$, ここで $U(L)$ は L の universal enveloping algebra, は R -algebra の構造をもつ. これらの crossed products において, π の作用は inner 化されている. 即ち $S * \Gamma$ においては

$$(1 * r)(a * 1)(1 * r^{-1}) = r(a) * 1$$

が, $A \otimes U(L)$ においては

$$[1 \otimes x, a \otimes 1] = x(a) \otimes 1 \quad (x \in L, a \in A)$$

がそれぞれ成立つ. 群や Lie 環の algebra への作用はホップ代数の作用として統一的に説明され, 上に述べた crossed products は algebra とそれに左から作用するホップ代数との smash products の特別な場合である.

R -algebra A の u -automorphism f を与えると, この f に関係して $A \otimes H_u$ は

$$Xa = aX + f(a) + u f(a)X, \quad a \in A$$

を満たす R -algebra の構造 (但し X は H_u の canonic な生成元) をたてつ。もちろんここで A と H_u はその sub-algebra とみている。これを $A *_f H_u$ とおき, A と H_u の f に関する crossed product とよぶ。ホップ代数の用語でいえば X の作用が f であるような, ホップ代数 H_u の A への左からの作用がただ一つ存在し, この作用に関する smash product $A \# H_u$ が $A *_f H_u$ である。上の式は

$$f = \text{inn}_u X|_A$$

と読める。つまり A の u -aut. f は $A *_f H_u$ における inner u -aut. $\text{inn}_u X$ の A への制限である。 $u=0$ のとき, つまり $f \in \text{Der}(A)$ のとき, $A *_f H_0 = A[X; f]$ はいわゆる, f に関する Ore extension であり, $u=1$ のときは, A の自己同形 $1+f$ に関する $\mathbb{Z}$ の A への作用についての $A_{1+f} * \mathbb{Z}$ が $A *_f H_1$ である。

アーベル拡大の群

有限群 Γ に対し, 可換環 R の Γ -ガロア拡大 とは, 可換忠実有限生成射影的 R -algebra S と, R -algebra の同形

$$S * \Gamma \text{ (crossed product)} \cong \text{End}_R(S)$$

ε 引起す group hom. $\alpha: \Gamma \longrightarrow \text{Aut}_R(S)$ となる pair (S, α) のことを定めよう. (R, S の可換性を仮定しないこともできる). その同形類の全体を $\text{Gal}(R, \Gamma)$ と記すことにする. R が体 k のときは, $\Pi \in k$ の分離閉包 k_Π の k 上の位相ガロア群とするとき, $\Pi \in \Gamma$ に自明に作用させれば

$$\text{Gal}(k, \Gamma) \cong H^1(\Pi, \Gamma) (= \text{Hom}_c(\Pi, \Gamma) / \Gamma\text{-inn})$$

なる同一視が成立つ. つまり Π から discrete 群 Γ への連続準同形全体を, Γ の元による共役で類別した集合と, k の Γ -ガロア拡大の同形類の集合の間に, 自然な 1:1 対応がある. 一般の可換環 R に対しては, Π に相当する群がちょっと考えられないので, その代りに $\text{Gal}(R, \Gamma)$ を用いると考えるとよい.

とくに Γ を可換とすると $\text{Gal}(R, \Gamma)$ は群の構造をもつ. R の 2 つの Γ -ガロア拡大 (S_i, α_i) , $i=1, 2$, に対し

$$S = \{x \in S_1 \otimes S_2 \mid I_1 \otimes \alpha_2 = \alpha_1 \otimes I_2 \text{ on } x\}$$

と置き, その上で $\alpha = I_1 \otimes \alpha_2 = \alpha_1 \otimes I_2$ とおけば, (S, α) は R の Γ -ガロア拡大になる. (S, α) の類と (S_i, α_i) の類の積と定める事により $\text{Gal}(R, \Gamma)$ はアーベル群となる.

単位元は, $|\Gamma|$ 個の R の直積 $\text{Map}(\Gamma, R)$ に, $(rf)(r') = f(r'r)$, $f \in \text{Map}(\Gamma, R)$, $r, r' \in \Gamma$ で Γ を作用させてえられる拡大の類であり, 逆元は $r \mapsto r^{-1}$ を通して作用させたものの類である. R を体 k とすれば, 有限 p -ベル群 Γ に対し

$$\text{Gal}(k, \Gamma) \cong H^1(\Pi, \Gamma) = \text{Hom}_c(\Pi, \Gamma)$$

は p -ベル群の同形となる.

有限群 Γ の代りに flat affine group $G = \text{Sp}_R H$ (H は R 上 flat な可換ホップ代数) を用いて, R の G -ガロア拡大 (S, α) を定義する事ができる. ここで S は忠実平坦可換 R -algebra, $\alpha: G \longrightarrow \text{Aut}_R(S)$ は R -群関手の hom., 但し $\text{Aut}_R(S)$ は任意の可換 R -algebra T に $\text{Aut}_T(T \otimes S)$ と対応させる群関手とあわせるものとする. さうに, 前の $S * \Gamma \cong \text{End}_R(S)$ に相当する

$$\beta: S \otimes S \cong S \otimes H$$

を満たすと仮定する. β は, G の S への作用 α と R -algebra map $\rho: S \longrightarrow S \otimes H$ (これを構造として, S は右 H comodule algebra である) と同一視し, ρ を左 S -linear に拡張したものである.

R の G -ガロア拡大 (S, α) の同形類の全体を $\text{Gal}(R, G)$ と記すことにしよう. 前に述べた $\text{Gal}(R, \Gamma)$ は, constant R -group Γ_R に対する $\text{Gal}(R, \Gamma_R)$ に他ならない. 体 k に対しては, 位相群 Π が discrete 群 $G(k_a)$ に連続に作用するが, k perfect or G algebraic smooth 等の条件の下で $\text{Gal}(k, G)$ はガロアコホモロジー $H^1(\Pi, G(k_a))$ と同一視される [1, III, §5, 3.5, 3.6]. また G が可換 (つまり H が cocommutative) ならば $\text{Gal}(R, G)$ は群構造をもつ.

さて加法群 G_a と乗法群 G_m に対しては

$$\text{Gal}(R, G_a) = 0, \quad \text{Gal}(R, G_m) = \text{Pic}(R)$$

が知られている [1, III, §9, 6.6, 4.7]. $u \in R$ に対する G_u については次の表示を得る:

Thm $\text{Gal}(R, G_u) \cong \text{Pic}_u(R).$

ここで u -Picard 群 $\text{Pic}_u(R)$ は $M \in \text{Pic}(R)$ と R/uR -加群の同形 $\theta: R/uR \cong M/uM$ の対 (M, θ) の同形類の全体が積 $(M_1, \theta_1) \cdot (M_2, \theta_2) = (M_1 \otimes M_2, \theta_1 \otimes \theta_2)$ に関し てなすアーベル群をあらわす. 明らかに $\text{Pic}_0(R) = 0$, $\text{Pic}_1(R) = \text{Pic}(R)$ である.

$G = Sp_R H$ に対し R の G -ガロア拡大 (S, α) と, α を右 H comodule algebra の構造 $\rho: S \rightarrow S \otimes H$ と同一視して, (S, ρ) のことばで表現できる事を前に述べた. その観点によれば, 可換性の仮定は全不要になるから, 一般の R 上のホップ代数 H と R -algebra A に対し, A の H -ガロア拡大 (B, ρ) を考える事ができる. $\rho: B \rightarrow B \otimes H$ は右 H comodule 構造である algebra map,

$$A = \{ b \in B \mid \rho(b) = b \otimes 1 \}$$

とし, ρ の引き起す左 B -linear map は同形と仮定する:

$$\rho: B \otimes_A B \xrightarrow{\cong} B \otimes H$$

(さらに, B_A 又は ${}_A B$ の忠実平坦を仮定した方がより理論が得られる事もある). H が R 上有限生成射影的な場合の基礎理論は [2] に述べられている. このとき B_A と ${}_A B$ は上の条件から有限生成射影的になる.

このような H -ガロア拡大の中で, 通常のカロア拡大の normal base の存在に相当する条件をみたす拡大は left 拡大と言われる [3]. たとえば $H = R[\Gamma]$ と群環のホップ代数とすると, A の $R[\Gamma]$ -ガロア拡大とは Γ -graded.

R -algebra $B = \bigoplus_{\sigma \in \Gamma} B_\sigma$ s.t. $B_\sigma B_\tau = B_{\sigma\tau}$, $B_1 = A$ の事

で, B が *left* とは 各 $\sigma \in \Gamma$ に対し B_σ が unit を 3 分すること, つまり B が Passman [4] の H に対して crossed product $A * \Gamma$ をなすことである.

R -algebra A の H -left 拡大 B の (A, H) -同形類の全体を $\text{Cleft}(A, H)$ と書いてみよう. [3, Thm. 11, p. 815] に述べられているように, ある cohom. description ができる.

Thm $u \in R$ に対し $\text{Cleft}(A, H_u) \cong \overline{\text{Aut}}_u(A)$.

つまり A の *left* H_u -拡大の同形類は, A の outer u -aut. と 1:1 に対応する. $f \in \text{Aut}_u(A)$ に対応する A の *left* H_u -拡大は, 前に述べた crossed product $A *_f H_u$ である. これは H_u の coalgebra 構造から来る自然な H_u -comodule 構造をもつ. $f, g \in \text{Aut}_u(A)$ に対し

$$f \equiv g \pmod{\text{Inn}_u(A)} \iff A *_f H_u \underset{(A, H_u)}{\cong} A *_g H_u$$

である事, 及び $A *_f H_u$ たちがすべての *left* H_u 拡大を尽くす事が定理の内容である.

ここで, 有限 p -ベル群 Γ に対する群 $\text{Gal}(R, \Gamma)$ に戻ろう. とくに巡回群 $\mathbb{Z}/(m)$ に対し

$$\text{Gal}(R, m) = \text{Gal}(R, \mathbb{Z}/(m))$$

(R の m 次巡回拡大のなす群)

を考える. 以下最後まで, R は素標数 $p \leq m$ とする.

$m = p^n$ に対する $\text{Gal}(R, p^n)$ は次のように表示される:

Thm (Artin-Schreier-Witt) R が標数 p ならば

$$W_n(R) \xrightarrow{F-I} W_n(R) \longrightarrow \text{Gal}(R, p^n) \longrightarrow 0$$

なる完全列がある.

ここで W_n は長さ n の Witt ベクトルの群, F は Frobenius map, $F(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = (a_0^p, a_1^p, \dots, a_{n-1}^p)$ を示す. 通常は R を体 $k \times L$, $\text{Gal}(k, p^n) \in \text{Hom}_c(\Pi, \mathbb{Z}/(p^n))$ とした時の完全列が popular である [S, X, §3 a), p. 163].

$u \in R$ に対し, $\text{Gal}_u(R, p^n)$ を次のように定めよう. その元は, 次の pair (S, d) の同形類である: S は可換 R -algebra で R -progenerator, $d \in \text{Der}_u(S)$, $d^{p^n} = 0$ (従って d は u -aut.), $\{1, d, \dots, d^{p^n-1}\}$ は $\text{End}_R(S)$ の左 S -free base. $\text{Gal}_u(R, p^n)$ はアーベル群 Γ に対する $\text{Gal}(R, \Gamma)$ と同様の群構造をもつ. $u = 1$ に対し $\text{Gal}_1(R, p^n)$ は $\text{Gal}(R, p^n)$ と自然に同形である.

$\text{Gal}_u(R, p^n)$ に対し, Artin-Schreier-Witt と類似の表示は得られないだろうか? 中島[6]は小さい n に対し部分的にその間に答えている.

$$u^{p^{-1}} : W_n(R) \longrightarrow W_n(R)$$

$\varepsilon(u^{p^{-1}}, 0, \dots, 0)$ との Witt 乗法, つまり $u^{p^{-1}}(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = (u^{p^{-1}}a_0, u^{p^2-p}a_1, \dots, u^{p^n-p^{n-1}}a_{n-1})$ とする. 長さ n の Witt ベクトル $\underline{X} = (X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$, $\underline{Y} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1})$ の和 ε

$$\underline{X} + \underline{Y} = (S_0, S_1, \dots, S_{n-1}), \quad S_i = S_i(\underline{X}, \underline{Y})$$

とする. $S_0 = X_0 + Y_0$, $S_1 = X_1 + Y_1 - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p} \binom{p}{i} X_0^i Y_0^{p-i}$ である. $\underline{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in W_n(R)$ に対し, 多項式環 $R[\underline{X}] = R[X_0, X_1, \dots, X_{n-1}]$ の次の relation

$$F(\underline{X}) = u^{p^{-1}}\underline{X} + \underline{a}$$

による quotient algebra $\varepsilon S_{\underline{a}}$ であらう. したがって

$$S_{\underline{a}} = R[\underline{X}] / (X_i^p - S_i(u^{p^{-1}}\underline{X}, \underline{a}), i=0, \dots, n-1)$$

も, と具体的に

$$X_0^p = u^{p^{-1}}X_0 + a_0,$$

$$X_1^p = u^{p^2-p}X_1 + a_1 - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p} \binom{p}{i} (u^{p^{-1}}X_0)^i a_0^{p-i} \text{ etc.}$$

Lem (a) $R[X]$ は

$$d(X_i) = \frac{S_i(\underline{X}, \underline{u}) - X_i}{u}, \quad i=0, 1, \dots, n-1$$

で定まる u -derivation $d \in \mathfrak{t} > \cdot = z$ $\underline{u} = (u, u^p, \dots, u^{p^{n-1}})$
 $\times L$, $R = \mathbb{Z}[u]$ または $\mathbb{F}_p[u]$ (u 不定元) と思, z 計算
 する.

(b) $d^{p^n} = 0$.

(c) この d は, $\forall \underline{a} \in W_n(R)$ に対 L , $S_{\underline{a}}$ の u -derivation
 ε を引き起す.

(d) $(S_{\underline{a}}, d)$ の類は $\text{Gal}_u(R, p^n)$ に属する.

$$\text{たとえば } d(X_0) = 1, d(X_1) = u^{p-1} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p} \binom{p}{i} u^{i-1} X_0^{p-i}.$$

Thm (A-S-W deformation) [7]. R が標数 p のとき
 $\underline{a} \in W_n(R)$ に対 L , $\pi(\underline{a}) = [S_{\underline{a}}, d] \in \text{Gal}_u(R, p^n)$ と
 まゝと次の完全列が成立つ:

$$W_n(R) \xrightarrow{F - u^{p-1}} W_n(R) \xrightarrow{\pi} \text{Gal}_u(R, p^n) \rightarrow 0.$$

本来の A-S-W 列は R -group scheme の完全列

$$0 \rightarrow (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_R \rightarrow W_{nR} \xrightarrow{F - I} W_{nR} \rightarrow 0$$

に, あるコホモロジー的平続きを施すことにより得られる.
 deform された上の完全列についても同様の事情が成立する.

ホップ代数 $H_u = R[X, f_u(X)^{-1}]$ に対し,

$$H(u, p^n) = R[X]/(X^{p^n})$$

はその quotient Hopf algebra (n 回 iterated u -Frobenius map $H_{u, p^n} \rightarrow H_u$ の Hopf-cokernel) である. $H(1, p^n)$ は $R[\mathbb{Z}/(p^n)]$ と同形だから

$$S_{p_R} H(1, p^n)^* \cong (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})_R.$$

定義からすぐ分るように

$$\text{Gal}_u(R, p^n) = \text{Gal}(R, S_{p_R} H(u, p^n)^*)$$

と同一視される. ($H(u, p^n)^*$ は dual Hopf algebra を表わす).

Thm 標数 p の可換環 R 上の group scheme の exact 列

$$0 \rightarrow S_{p_R} H(u, p^n)^* \rightarrow W_{n_R} \xrightarrow{F-u^{p^n-1}} W_{n_R} \rightarrow 0$$

が存在する [7].

この exact 列に, 通常の A-S-W 列を得る場合と同じ
手続きを施せば, 我々の A-S-W の deformation がえられ
る. 所で $S_{p^r} H(u, p^n)^*$ は u -Frobenius map

$$G_u \xrightarrow{p^n} G_{u p^n}$$

の kernel $p^n G_u$ の Cartier dual $(p^n G_u)^D$ であるから, この exact
列は

$$(p^n G_u)^D \cong {}_{F-u} W_n \quad (\star)$$

と読みとれる. $u=0$ のときこれは $(p^n G_a)^D \cong {}_F W_n$ とな
り, これは Artin-Hasse の duality

$$({}_F^n W_m)^D \cong {}_F^m W_n \quad [1, V, \S 4, 4.7]$$

の special case ($m=1$) に他ならない. とすれば $(\star)$ はも, と
一般の u の duality の特別な場合であるかもしれない.

ここには述べた u -calculus をとくに標数 p の $u=0$ と標
数 0 の $u=1$ の向の deformation と捉え代数幾何に応用する
事については, 関口氏による次項の報告を参照されたい.

文献

- [1] Demazure-Gabriel, Groupes algébriques, North-Holland, 197
- [2] Kreimer-Takeuchi, Hopf algebras and Galois extensions of an algebra, Indiana U. Math. J. 30 (1981) 675-692.
- [3] Doi-Takeuchi, Cleft comodule algebras for a bialgebra, Com. Alg. 14 (1986), 801-818.
- [4] Passman, Algebraic crossed products, Contemp. Math. 43 (1985) 209-225.
- [5] Serre, Corps locaux, Hermann, 1968.
- [6] Nakajima, A certain type of commutative Hopf Galois extensions and their groups, Math. J. Okayama U. 27 (1982), 137-152.
- [7] 竹内, Artin-Schreier-Witt 理論の deformation, 「数学」寄稿 (to appear).