

複素解析空間上の formal Poincare and Dolbeault 補題について

京大 数理解 藤 不 明

X は複素多様体, Y は X の解析的部分集合, $U = X - Y$,

$j: U \rightarrow X$ は包含写像とする。また Ω_X, E_X は各々 X 上 holomorphic,

$\mathcal{C}^\infty$ の, de Rham 複体とする。 J は X 内 Y の定義イデアル

ル, $\bar{J}$ は J の共役イデアル, $\mathcal{J} = (J + \bar{J})E_X$, ($E_X = E_X^0$ は X 上複素数値 $\mathcal{C}^\infty$ 函数の層) とおく。この時, Ω_X, E_X の Y に関する完備化,

$\hat{\Omega}_X, \hat{E}_X$ は次のように定義する。

$$\hat{\Omega}_X = \varprojlim \Omega_X / J^{n+1} \Omega_X, \quad \hat{E}_X = \varprojlim E_X / \mathcal{J}^{n+1} E_X$$

この時次が成立する。

定理 1. $0 \rightarrow \mathcal{C}_Y \rightarrow \hat{E}_X \xrightarrow{d} \hat{E}_X^1 \rightarrow \hat{E}_X^2 \rightarrow \cdots$

は $\mathcal{C}_Y$ の resolution を与え、 $\rightarrow$ の列は完全列。ここに $\mathcal{C}_Y$

は Y の $\mathbb{C}$ のファイバーとして定まる constant sheaf.

同様に formal Dolbeault complex

$$\hat{E}_X^{0, \cdot} = \varprojlim E_X^{0, \cdot} / \mathcal{J}^{n+1} E_X^{0, \cdot}$$

を考える。

定理 2. $0 \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_X \rightarrow \hat{\mathcal{E}}_X^{0,1} \rightarrow \hat{\mathcal{E}}_X^{0,2} \rightarrow \hat{\mathcal{E}}_X^{0,3} \rightarrow \dots$

は $\hat{\mathcal{O}}_X$ の resolution を与える。 ($\hat{\mathcal{O}}_X = \hat{\Omega}_X^0$)

定理 1, 2 をあわせて直ちに次の系を得る。

系. $0 \rightarrow \mathcal{C}_Y \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_X \rightarrow \hat{\Omega}_X^1 \rightarrow \hat{\Omega}_X^2 \rightarrow \dots$ (formal analytic Poincaré lemma).

Sasakura [11], Hartshorne [4].

今 $\mathcal{F}^\infty \mathcal{E}_X = \varprojlim_n \mathcal{F}^{n+1} \mathcal{E}_X = \bigcap_n \mathcal{F}^{n+1} \mathcal{E}_X$ とおくと 実 1.2 定理 1 より詳しく次の成立する。

定理 1'. 次の可換図式が存在し、各行は完全列、かつ F 行は E 行の resolution を与える。

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & j_! \mathcal{C}_U & \rightarrow & \mathcal{C}_X & \rightarrow & \mathcal{C}_Y \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{F}^\infty \mathcal{E}_X & \rightarrow & \mathcal{E}_X & \rightarrow & \hat{\mathcal{E}}_X \rightarrow 0 \end{array}$$

(ここに $j_!$ は direct image with proper supports, 従って $j_! \mathcal{C}_U$ は定数層 $\mathcal{C}_U$ を Y 上零とおくことに X に拡張したものである。)

注意 1. 定理 2' に対応する図式は、次のようになる。

$$(2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & j_! \mathcal{O}_U & \rightarrow & \mathcal{O}_X & \rightarrow & \hat{\mathcal{O}}_X \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_X / \mathcal{O}_X \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{F}^\infty \mathcal{E}_X^{0,0} & \rightarrow & \mathcal{E}_X^{0,0} & \rightarrow & \hat{\mathcal{E}}_X^{0,0} \rightarrow 0 \end{array}$$

よって、定理 2' は、 $\mathcal{H}^0(\mathcal{F}^\infty \mathcal{E}_X^{0,0}) \cong j_! \mathcal{O}_U$, $\mathcal{H}^1(\mathcal{F}^\infty \mathcal{E}_X^{0,0}) \cong \hat{\mathcal{O}}_X / \mathcal{O}_X$,

$\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\infty \mathcal{E}_X^{0,0}) = 0$, $i \geq 2$ を意味し、逆にこれより定理 2' を帰結する。

注意 2. Y が 局所既約 なう $\mathcal{J} = \{ \phi \in \mathcal{E}_X; \phi(y) = 0 \ \forall y \in Y \}$ となり Y 上消える C^∞ 函数の全体。(cf. Kantor [7], Malgrange [8])

証明は次の2段階にわかれる。

Step 1. Y が X 内の divisor with normal crossings の場合に
具体的に構成により、定理を示す。

$\tilde{X}$ 非特異かつ

Step 2. 一般の場合は、 $f: \tilde{X} \rightarrow X$ の固有双有理写像で、
 $\tilde{Y} = f^{-1}(Y)$ とおく時 1) $f|_{\tilde{X}-\tilde{Y}}: \tilde{X}-\tilde{Y} \cong X-Y$, 2) $\tilde{Y} = f^{-1}(Y)$ が
 $\tilde{X}$ 内の divisor with normal crossings となる、の2条件をみたすもの
をとり (cf. Hironaka [6]), $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ に対する結果 (Step 1) から
 (X, Y) に対する結果を導く。

以下 Step 2 について述べる。

まず問題は局所的であるから、 X は $\mathbb{C}^m = \mathbb{C}(z_1, \dots, z_m)$ の開集
合とみなしてよい。さらに $z_i = x_{2i-1} + \sqrt{-1}x_{2i}$ とおいて $\mathbb{C}^m \subset \mathbb{R}^{2m} =$
 $\mathbb{R}^{2m}(x_1, \dots, x_{2m})$ と同一視する。このとき $\dim_{\mathbb{C}} X = m$, $n =$
 $2m$ とおく。 $I = (i_1, \dots, i_n)$ は整数 $i_\alpha \geq 0$ の n 組を表す。 $|I| =$
 $\sum_{\alpha} i_\alpha$ とおく。

定義 1. [8, I, Def. 2.3] a) 整数 $k \geq 0$ に対し, Whitney の意味での
 Y 上の C^k 関数の層 ${}_k\tilde{E}_Y$ を次の前層により定める: $V \in Y$ の
任意の開集合とする時, ${}_k\tilde{E}_Y(V) = \{ (g_I); |I| \leq k, g_I \text{ は } Y \text{ 上}$
 $\text{の連続関数で以下に述べる条件}(\#)\text{をみたす} \}$. b) $\tilde{E}_Y = \varprojlim {}_k\tilde{E}_Y$
とおく。 Y 上の (Whitney の意味での) C^∞ 関数の層をいう。 (${}_k\tilde{E}_Y$ の
定義から自然にそれらが射影的系となることかわかる。)

さて条件 $(\#)$ を説明する。まず任意の $y \in Y$ と Y 上の連続関数

の組 $G = (g_I)$ に対し, 多項式 $T_y^k G(x)$ は式

$$T_y^k G(x) = \sum_{|I| \leq k} (x-y)^I / I! g_I(y)$$

で定義する. ここに $(x-y)^I = \prod_{\alpha} (x_{\alpha} - y_{\alpha})^{i_{\alpha}}$, $I! = i_1! \cdots i_n!$. この

$T_y^k G$ を用いて $R_y^k(G) = (R_y^k(G)_I), |I| \leq k$, は式

$$R_y^k(G)_I = g_I - \partial^I (T_y^k G) / \partial x^I$$

により定義する. この時条件 (#) は

$$(\#) \quad \forall I \text{ に対し } |R_y^k(G)_I(x)| = o(|x-y|^{k-|I|}) \quad \forall x, y \in Y, \\ |x-y| \rightarrow 0$$

定義により, 自然写像 $r: E_X \rightarrow \tilde{E}_Y$ が存在する. 実際,

$r(h) = (\partial^I h / \partial x^I)_I$ とすればよい. 今 r の核を $E_{X,Y}$ とする.

明らかに, $E_{X,Y}$ は X 上の C^∞ 函数で, Y の各点で任意階の導関数が零になるもの, つまり flat along Y なるものの全体を表す.

定理 (Whitney) [8, I, Th. 4.1] r は全射であり従って r は完全列である.

$$(3) \quad 0 \rightarrow E_{X,Y} \rightarrow E_X \rightarrow \tilde{E}_Y \rightarrow 0$$

さて我々の第1の observation は, (1) の下行 ($\cdot = 0$) が (3) と自然に同形であり従って, 上の Whitney の定理により, 完全列であることである. まず定義から自然の包含写像 $i: \mathcal{F}E_X \rightarrow E_{X,Y}$ が存在することには注意する. i がさらに全射でもあることは, 次の Malgrange の定理, 1 の結論である.

定理 (Malgrange) [8, VI, Th. 1.1'] $U \in \mathbb{R}^n$ の開集合, $f_1, \dots, f_0$

$\in U$ の実解析関数, $\phi \in U$ の C^∞ 関数とす。この時次の同値が成り立つ。 1) $\exists \psi_i, 1 \leq i \leq b, C^\infty$ 関数 on U s.t. $\phi = \sum_{i=1}^b \psi_i f_i$

2) 各 $u \in U$ に対し, $T_u \phi, T_u f_i \in u$ における ϕ, f_i の Taylor 級数, $\{T_u f_i\} \in u$ における形式的巾級数環 $\hat{\mathcal{O}}_{U,u}$ 内にあり $T_u \phi$ を生成するイデアルとす。この時, $T_u \phi \in \{T_u f_i\} \quad \forall u \in U$.

実際

6.1 $h_1 = \dots = h_d = 0$ on X における Y のイ

デアル層の生成元とする時, $\{f_i\} = \{\operatorname{Re} h_j, \operatorname{Im} h_j\}$ とおけば,

$\{T_u f_i\} = 0_{\mathcal{O}_{X,u}}, \forall u \in X$, が成立し, (ある $u \in u$ と一般に,

h_j 達の共通零点 u 上 Y 一致する u のような) 同様のことが成立し,

また一方 $\phi \in \mathcal{E}_{X,Y}$ のような $T_u(\operatorname{Re} \phi) = T_u(\operatorname{Im} \phi) = \{0\}, \forall u \in Y$, が成立

するから, 上の定理により, $\operatorname{Re} \phi$ 及び $\operatorname{Im} \phi$ が $\{f_i\}$ 及び $\bar{f}_j$ の一次結合で表わされる。よって $\phi \in J^\infty \mathcal{E}_X$ である。

2.7 (1) の同形性により自然写像 $\hat{\mathcal{E}}_Y \rightarrow \hat{\mathcal{E}}_X$ が存在する。これは β である β の逆射である。逆写像 $\gamma = \beta^{-1} : \hat{\mathcal{E}}_X \rightarrow \hat{\mathcal{E}}_Y$ を構成しよう。

$\varphi \in \hat{\mathcal{E}}_X$ ととり $\varphi = (\varphi_m)_m, \varphi_m \in \mathcal{E}_X / J^{m+1} \mathcal{E}_X$, とお

き, $\tilde{\varphi}_m \in \mathcal{E}_X$ を勝手な拡張とする。この時 $\gamma(\varphi) = (\partial^I \tilde{\varphi}_m / \partial x^I)_I, m=|I|,$

$0 \leq m < \infty$, とおくと $\gamma(\varphi)$ は $\tilde{\varphi}_m$ の取り方によらず $\hat{\mathcal{E}}_Y$ の well-defined

な元を定めることが容易にわかる。 $\gamma = \beta^{-1}$ のことを構成の

が明白である。よって我々は (1) 下列の完全性を得た。

従って定理 1' の主張を得るには, $J^\infty \mathcal{E}_X = \mathcal{E}_{X,Y}$ が $j_! \mathbb{C}_U$ の resolution であることを示せばよい。最初

補題 1. $f: \tilde{X} \rightarrow X$ は Step 2 のとおりとする。時次が成立。

$$f_* \tilde{f}^\infty \mathcal{E}_{\tilde{X}} = f^\infty \mathcal{E}_X.$$

ここに $\tilde{f} = (f + \tilde{g}) \mathcal{E}_{\tilde{X}}$, $\tilde{g}$ は $\tilde{Y}$ の定義イデアルの層。

証明. $D \in X$ 上の任意の微分作用素とする。この時任意の $\tilde{x} \in \tilde{X}$ に対し $\tilde{x}$ の近傍で定義された微分作用素 $\tilde{D}_{\tilde{x}}$ および正則関数 $h_{\tilde{x}}$ が存在し、任意の $g \in \mathcal{E}_X$ に対し、 $(Dg) \circ f = \tilde{D}_{\tilde{x}}(g \circ f) \cdot (1/h_{\tilde{x}})$ が成立する。(cf. Poly [9, 4.4]). さて任意の $\tilde{g} \in f_* \tilde{f}^\infty \mathcal{E}_{\tilde{X}}$ に対し、明らかに一意の連続関数 g on X が存在し $\tilde{g} = g \circ f$ となる。補題はこの g が C^∞ かつ $g \in f^\infty \mathcal{E}_X$ を示せば示される。これは上の注意と次の事実から従う。任意の $g_1 \in \tilde{f}^\infty \mathcal{E}_{\tilde{X}}$ と任意の $h_1 \in \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ に対し $g_1/h_1 \in \tilde{f}^\infty \mathcal{E}_{\tilde{X}}$ (cf. [8, IV. Prop. 1.4]).

これから直ちに定理 1' が従う。実際、Step 1 での同形 $\tilde{j}_! \mathbb{C}_U \cong \tilde{f}^\infty \mathcal{E}_{\tilde{X}}$ に対し Rf_* を作用させると、左辺は、 $Rf_* (\tilde{j}_! \mathbb{C}_U) \cong Rf_* R\tilde{j}_! \mathbb{C}_U \cong Rj_! \mathbb{C}_U \cong j_! \mathbb{C}_U$, 右辺は、 $Rf_* \tilde{f}^\infty \mathcal{E}_{\tilde{X}} \cong f_* \tilde{f}^\infty \mathcal{E}_{\tilde{X}} = f^\infty \mathcal{E}_X$ となる。(ただし計算はすべて $\mathbb{C}$ ベクトル空間の層のホムトピー圏の derived category でなされている。) したがって同形 $j_! \mathbb{C}_U \cong f^\infty \mathcal{E}_X$ が自然にも一致する事も容易にわかる。

定理 2 のためにはさらに次の補題に注意する必要がある。

補題 2. $f: \tilde{X} \rightarrow X$ は Step 2 のとおりとする。この時次が成立する。

$$f_* \hat{\Omega}_{\tilde{X}}^p \cong \hat{\Omega}_X^p, \quad R^i f_* \hat{\Omega}_{\tilde{X}}^p \cong R^i f_* \hat{\Omega}_X^p, \quad i \geq 1.$$

実際 Banica [1] により, $R^i f_* \Omega_X^p \cong R^i \hat{f}_* \hat{\Omega}_X^p$, $\forall i \geq 0$. $i=0$ が $i \geq 1$ の時, $R^i f_* \Omega_X^p$ の台は Y 上にあるから, $R^i \hat{f}_* \hat{\Omega}_X^p \cong R^i f_* \Omega_X^p$ である. また X の非特異だから $f_* \Omega_X^p \cong \Omega_X^p$ である.

定理 2 の証明. Step 1 で示された $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ に関する結果を, 列

$$0 \rightarrow \mathcal{J}^\infty \mathcal{E}_X^\bullet \rightarrow \mathcal{E}_X^\bullet \rightarrow \hat{\mathcal{E}}_X^\bullet \rightarrow 0$$

に対し, Rf_* を作用させて long cohomology exact sequence をとった結果から,

$$0 \rightarrow \mathcal{H}^0(\mathcal{J}^\infty \mathcal{E}_X^\bullet) \rightarrow f_* \mathcal{O}_X \rightarrow \hat{f}_* \hat{\mathcal{O}}_X \rightarrow \mathcal{H}^1(\mathcal{J}^\infty \mathcal{E}_X^\bullet) \rightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_X \rightarrow R^1 \hat{f}_* \hat{\mathcal{O}}_X \rightarrow \mathcal{H}^2(\mathcal{J}^\infty \mathcal{E}_X^\bullet) \rightarrow R^2 f_* \mathcal{O}_X \rightarrow R^2 \hat{f}_* \hat{\mathcal{O}}_X \rightarrow \dots$$

を得る. 補題 2 の $p=0$ の場合から, 容易に $\mathcal{H}^0(\mathcal{J}^\infty \mathcal{E}_X^\bullet) \cong j_! \mathcal{O}_U$, $\mathcal{H}^1(\mathcal{J}^\infty \mathcal{E}_X^\bullet) \cong \hat{\mathcal{O}}_X / \mathcal{O}_X$, $\mathcal{H}^i(\mathcal{J}^\infty \mathcal{E}_X^\bullet) = 0$, $i \geq 2$ を得る. 注意 1 によりこれで定理の証明が終わる.

一方同じ Step 1, Step 2 に従って, この系の証明も直接に得られることがわかった. (本質的に T. Bloom の [12, Prop. 3.1] の証明と同じ.) さらにこの方法では, 笹倉氏の講演で述べられたような精密な形をも与えうる. (ここには述べないが.)

系 (補題) の証明. 補題 2 により, 2 つの複体 $f_* \Omega_X^\bullet$ と $\hat{f}_* \hat{\Omega}_X^\bullet$ の間の自然写像が quasi-isomorphism であることを見ればよい.

このため 2 つのスペクトル列 $E_2^{p,q} = H^p(R^q f_* \Omega_X^\bullet) \Rightarrow R^p f_* \Omega_X^\bullet$, $\hat{E}_2^{p,q} = H^p(R^q \hat{f}_* \hat{\Omega}_X^\bullet) \Rightarrow R^p \hat{f}_* \hat{\Omega}_X^\bullet$ と比較する. 普通の Poincaré 補題より Step 1 から $R^i f_* \Omega_X^\bullet \cong R^i \hat{f}_* \hat{\Omega}_X^\bullet \cong R^i f_* \mathcal{O}_X$ である. 一方

補題 2 により $E_2^{p,0} \cong \hat{E}_2^{p,0}$, $p > 0$, が成立する。これから

$E_2^{p,0} \cong \hat{E}_2^{p,0}$ が従う。

証明方法は、実際にはもう少し一般の結果を与える。

【 1. 明らかに,

定理 3. X を複素空間, Y をその部分空間で X の singular locus を含むものとする。この時次が成立する: 自然写像

$$\alpha: \Omega_{X/Y} \xrightarrow{\sim} \hat{\Omega}_X$$

は quasi-isomorphism. これは $\Omega_{X/Y}$ は Ω_X の Y への sheaf theoretic な制限。 (Y が 1 点の時上記は述べた Bloom の定理)

次に (1) 及び (2) の下列の analytic な表現を求めることを考える。 $M(X)$ は O_X -加群のなす T -ヘル圏, $\mathcal{C}(X)$ は O_X -加群の複体 $\{F^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ での微分 $d_i: F^i \rightarrow F^{i+1}$ が 1 階の微分作用素であるものなす圏とする。 $\mathcal{C}(X)$ における射 $F \rightarrow G$ は O_X -線形写像 $f^i: F^i \rightarrow G^i$ の組で $d_{i+1} \circ f^i = f^{i+1} \circ d_i$ を満たすものとする。(詳しくは [5, §1] 参照) $M(X), \mathcal{C}(X)$ 共に enough injectives を持つ T -ヘル圏である。($\mathcal{C}(X)$ については [, Prop. 2.1])。 $M(X)$ は $F \in \text{Ob } M(X)$ に対し $F \in \mathcal{C}(X)$ を $F^0 = F, F^i = 0, i \neq 0$, で定義することにより $\mathcal{C}(X)$ の部分圏とみなさう。 $DM(X), D\mathcal{C}(X)$ は $M(X)$ 及び $\mathcal{C}(X)$ の導来圏を表す。上の注意により $DM(X)$ は $D\mathcal{C}(X)$ の部分圏とみなしてよい。(cf. [3, p.377]). LX は F で定義

する関数 $\mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(X)$, $D\mathcal{C}(X) \rightarrow D\mathcal{C}(X)$ について、この意味は、

$\mathcal{M}(X)$, $D\mathcal{M}(X)$ を保存することになる。

まず $\mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(X)$ は左完全関数 $j_!^m(\mathcal{F})$, $\hat{\Gamma}(\mathcal{F})$ を

$$j_!^m(\mathcal{F}) = \varprojlim_R \Sigma_k(\mathcal{F}), \quad \hat{\Gamma}(\mathcal{F}) = \varprojlim_R \mathcal{F} / \Sigma_k(\mathcal{F})$$

で定義する。ここに $\Sigma_k(\mathcal{F}) = g^k \mathcal{F} + d(g^k \mathcal{F}^{--1})$. $Rj_!^m, R\hat{\Gamma}$

を $j_!^m, \hat{\Gamma}$ の導来関数とする。

補題 3 $\mathcal{F} \in \text{Ob } \mathcal{C}(X)$ に対し、次の functorial triangle⁽¹⁾ が $D\mathcal{C}(X)$ において存在する。(cf. [3, I §1])

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} & \hat{\mathcal{F}} & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ Rj_!^m(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{F} \end{array}$$

証明. $\text{pro-}\mathcal{C}(X)$ は自然数により添数づけられた $\mathcal{C}(X)$ の objects の射影系 $\mathcal{A}$ のアーベル圏とする。この時射影的極限 $\varprojlim$ は $\text{pro-}\mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(X)$ の左完全関数とみられる。その右導来関数と $R\varprojlim$ で表す。さて今任意の $\mathcal{F}$ に対し

$$0 \rightarrow (\Sigma_k(\mathcal{F}))_k \rightarrow (\mathcal{F})_k \rightarrow (\mathcal{F} / \Sigma_k(\mathcal{F}))_k \rightarrow 0$$

は、 $\text{pro-}\mathcal{C}(X)$ における完全列。従って $R\varprojlim$ を作用させて $D\mathcal{C}(X)$ に

おける triangle

$$\begin{array}{ccc} & R\hat{\Gamma}(\mathcal{F}) & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ Rj_!^m(\mathcal{F}) & \longrightarrow & R\Gamma(\mathcal{F}) \end{array}$$

を得る。 $(\mathcal{F})_k$ は $(\mathcal{F})_k = \mathcal{F}$ の constant system, $\mathcal{F} = \Gamma(\mathcal{F}) = \varprojlim (\mathcal{F})_k$

明かしく $R\Gamma(\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}$. 一方 $R\varprojlim^i = 0$, $i \geq 2$ (Rooz) (cf. [4,

I. Prop. 4.1), $\exists$ $f: \mathcal{F}/\Sigma_k(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}/\Sigma_{k-1}(\mathcal{F})$ surjective により Mittag-Leffler の条件が成り立ち $R^1 \varprojlim (\mathcal{F}/\Sigma_k(\mathcal{F})) = 0^{*)} \Rightarrow R \varprojlim (\mathcal{F}/\Sigma_k(\mathcal{F})) \cong \varprojlim \mathcal{F}/\Sigma_k(\mathcal{F})$. $(*)$ [4, I, Cor. 4.3]) さらに $\varprojlim \mathcal{F}/\Sigma_k(\mathcal{F}) \cong \varprojlim \mathcal{F}/g^k \mathcal{F} = \hat{\mathcal{F}}$. Q.E.D.

(4) を用いると (1), (2) の analytic な表示が次のように得られる。

命題 1. 1) (4) で $\mathcal{F} = \Omega_X$ とおく。すると (4) は, $D\mathcal{C}(X)$ に於て, 完全列 (1) の '下行' ($\mathcal{C}(X)$ 内で考えられる) に同伴の triangle と自然に同形である。2) $\mathcal{F} \in X$ 上の解析的連接層とし, $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ (すなわち $\mathcal{F}' \in \mathcal{M}(X)$) とする。この時 (4) は, $DM(X)$ において完全列 (2) の '下行' $\mathcal{F}$ に同伴の $DM(X)$ における triangle と自然に同形である。

(注) アーベル圏における完全列はその導来圏における triangle と自然に定まる。[3, p.63 Remark]

命題の証明の前に 2) について解説しておく。まず定理 2 は任意の連接 $\mathcal{O}_X$ -加群 $\mathcal{F}$ に対しその Y に沿った formal completion $\hat{\mathcal{F}}$ の自然な fine resolution $\mathcal{F}$ を与えることを見ておく。

命題 2. $\forall x \in Y$ に対し $\hat{\mathcal{E}}_{X,x}$ は $\mathcal{O}_{X,x}$ -加群として忠実に平坦である。

証明 $\tilde{\mathcal{F}}$ は presheaf $U \rightarrow \prod_{u \in U} \mathcal{F}_u$ ($\mathcal{F}_u$: $u \in U$ における形式的巾級数環) により定義される X 上の $\mathcal{O}_X$ -加群の層とする。各 $x \in Y$ に対して, 自然な環の包含関係 $\mathcal{O}_{X,x} \subseteq \hat{\mathcal{E}}_{X,x} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_{\bullet,x}$ が存在する。 $\tilde{\mathcal{F}}_x$ は [8, III, Cor. 4.13] により忠実に平坦な $\mathcal{O}_{X,x}$ -加

群があるから、任意のイデアル $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ に対し、 $\mathfrak{a}\tilde{J}_x \cap \hat{E}_{X,x} = \mathfrak{a}\hat{E}_{X,x}$ であることは見れば十分である (cf. [8, III, Prop. 4.7]). 実際これは、[8, VI, Th. 1.2] の特殊な場合である。(この記号で $\mathfrak{a}\tilde{J}_x \cap \hat{E}_{X,x} = \mathfrak{a}\tilde{J}_x(\gamma) \cap \hat{E}_{X,x}$ であることに注意.) Q.E.D.

系 J は連接 $\mathcal{O}_X$ -加群、 $\hat{J}$ は J の $\mathbb{A}^1$ に沿った formal completion である。この時複体 $\mathcal{E}_X^{\bullet}(\hat{J}) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{E}_X^{\bullet} \otimes_{\mathcal{O}_X} J \cong \mathcal{E}_X^{\bullet} \otimes_{\mathcal{O}_X} \hat{J}$ は $\hat{J}$ の自然な fine resolution である。

J へ $g^*\mathcal{E}_X^{\bullet}(J) = g^*\mathcal{E}_X^{\bullet} \otimes_{\mathcal{O}_X} J$, $\mathcal{E}_X^{\bullet}(J) = \mathcal{E}_X^{\bullet} \otimes_{\mathcal{O}_X} J$ である。 $\mathcal{O}_X J$ は (2) の F 行の作用をせよとより完全列

$$(5) \quad 0 \rightarrow g^*\mathcal{E}_X^{\bullet}(J) \rightarrow \mathcal{E}_X^{\bullet}(J) \rightarrow \mathcal{E}_X^{\bullet}(\hat{J}) \rightarrow 0$$

を得る。命題 1 (2) にいう '(2) の F 行' $\otimes J$ とは (5) に他ならない。

命題 1 の証明 1) $\Sigma_k(\mathcal{E}_X^{\bullet}) = g^k \mathcal{E}_X^{\bullet} + d(g^k \mathcal{E}_X^{\bullet-1})$ である。 $\text{pro-}\mathcal{C}(X)$

内の完全列の可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Sigma_k(\Omega_X^{\bullet}) & \rightarrow & \Omega_X^{\bullet} & \rightarrow & \Omega_X^{\bullet} / \Sigma_k(\Omega_X^{\bullet}) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \Sigma_k(\mathcal{E}_X^{\bullet}) & \rightarrow & \mathcal{E}_X^{\bullet} & \rightarrow & \mathcal{E}_X^{\bullet} / \Sigma_k(\mathcal{E}_X^{\bullet}) \rightarrow 0 \end{array}$$

から triangles の同型写像

$$\begin{array}{ccc} \Omega_X^{\bullet} & & \hat{\mathcal{E}}_X^{\bullet} \\ \swarrow \quad \nwarrow & \rightarrow & \swarrow \quad \nwarrow \\ Rj_! \Omega_X^{\bullet} \rightarrow \Omega_X^{\bullet} & & R\varprojlim \Sigma_k(\mathcal{E}_X^{\bullet}) \rightarrow \hat{\mathcal{E}}_X^{\bullet} \end{array}$$

が得られる (補題 3 参照)。 $\Omega_X^{\bullet} \rightarrow \hat{\mathcal{E}}_X^{\bullet}$, $\Omega_X^{\bullet} \rightarrow \mathcal{E}_X^{\bullet}$ は夫々上の

系を通常。 Dolbeault-Grothendieck 補題により同形であるから

上の triangles は同形である。一方 $\mathcal{E}_X^{\bullet} \rightarrow \hat{\mathcal{E}}_X^{\bullet}$ の surjectivity は

$R^i \varprojlim \Sigma_k(\mathcal{E}_X) = 0$ と同値であり, $R^i \varprojlim \Sigma_k(\mathcal{E}_X) = 0, i \geq 2$ と
 あわせて (cf. 補題 3 の証明), $R \varprojlim \Sigma_k(\mathcal{E}_X) \cong \varprojlim \Sigma_k(\mathcal{E}_X) \cong \varprojlim g^k \mathcal{E}_X$
 $\cong g^\infty \mathcal{E}_X$ と得る. 2) $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ の場合は可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & g^k & \rightarrow & \mathcal{O}_X & \rightarrow & \mathcal{O}_X/g^k \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & g^k \mathcal{E}_X^{\circ\circ} & \rightarrow & \mathcal{E}_X^{\circ\circ} & \rightarrow & \mathcal{E}_X^{\circ\circ}/g^k \mathcal{E}_X^{\circ\circ} \rightarrow 0 \end{array}$$

から上と同様に示される. 一般の場合は, $(Rj_! \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \cong Rj_! \mathcal{F}$ と示して $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ の場合から導く.

次に今まで述べてきたことの 'dual' に対応する事実について
 簡単に述べる.

$\mathcal{D}_X$ は X 上の ^{currents} $\mathcal{D}_X$ の芽の層, $\mathcal{D}_{Y^\infty} = \Gamma_Y(\mathcal{D}_X)$, $\rightarrow$
 より Y の台が含まれるような ^{currents} $\mathcal{D}_X$ の層, $\mathcal{D}_{X/Y^\infty} =$
 $\mathcal{D}_X / \mathcal{D}_{Y^\infty}$ とする. 明らかに完全列

$$(5) \quad 0 \rightarrow \mathcal{D}_{Y^\infty} \rightarrow \mathcal{D}_X \rightarrow \mathcal{D}_{X/Y^\infty} \rightarrow 0$$

が存在する. (5) は次の意味で (1) の F 列の dual であることに
 注意しておく. $V \in X$ の任意の開集合とする時, 通常 n 位
 相に因り $\Gamma(V, \mathcal{E}_X)$ は FS (Frechet-Schwartz)-複体であるが; この
 位相に因り $\Gamma(V, g^\infty \mathcal{E}_X)$ は 局. (Whitney), $\hookrightarrow \Gamma(V, g^\infty \mathcal{E}_X), \Gamma(V, \hat{\mathcal{E}}_X)$
 も自然な FS-複体の構造を持つ. 一方 $\Gamma(V, \mathcal{E}_X) \times \Gamma_c(V, \mathcal{D}_X)$
 $\rightarrow \mathbb{C}$ は自然な perfect pairing に因り $\Gamma(V, g^\infty \mathcal{E}_X)$ の 零化空間
 が $\Gamma_c(V, \mathcal{D}_{Y^\infty})$ に他ならない; 従って $\Gamma_c(V, \mathcal{D}_{Y^\infty}), \Gamma_c(V, \mathcal{D}_{X/Y^\infty})$ は
 夫々, $\Gamma(V, \hat{\mathcal{E}}_X), \Gamma_c(V, g^\infty \mathcal{E}_X)$ の 位相 dual となり自然に DFS-

複体の構造を行う。こゝに C はコンパクト台を表す。さうして
の意味は定理 1 の dual が成り立つことだから、これは $\mathcal{P}_Y$ の
 $\mathcal{P}_Y[9]$ により得られる。

定理 (Poly) 局所コンパクト $\mathcal{C}$ -群の triangle (5) に同伴なものは

$$\begin{array}{ccc} & Rj_+ C & \\ \swarrow & & \searrow \\ R\Gamma_Y(C) & \longrightarrow & C \end{array} \cong \begin{array}{ccc} & D_{X/Y}^\infty & \\ \swarrow & & \searrow \\ D_{Y^\infty} & \longrightarrow & D_X \end{array}$$

同形。(X 上の $\mathcal{C}$ -ベクトル空間の層のなす T-ベル図の導来圏を)

2 (前と同様) (5) の analytic な表示を考へるのだが、そのあと
Dolbeault に対応する次の完全列にも注意しておく。

$$(6) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F, D_{Y^\infty}^n) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F, D_X^n) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F, D_{X/Y^\infty}^n) \rightarrow 0$$

こゝに F は任意の連結 $\mathcal{O}_X$ -加群。実際, [, VII. Th. 2.4] より
 $D_{Y^\infty, x}^n$ は injective $\mathcal{O}_{X, x}$ -加群である ($x \in Y$)。

共変左完全関数 $\ell(X) \rightarrow \ell(X)$ を次式で定義する。

$$I_{*Y}(F) = \varinjlim_k \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/g^{k+}, F)$$

$$j_*^m(F) = \varinjlim_k \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(g^{k+}, F)$$

完全列 $0 \rightarrow g^{k+} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X/g^{k+} \rightarrow 0$ を左完全関数 $\varinjlim_k \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}$
(, F) へ apply して $\ell(X)$ における triangle

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} & Rj_*^m(F) & \\ \swarrow & & \searrow \\ R I_{*Y}(F) & \longrightarrow & F \end{array}$$

を得る。同様の図式 $\ell(X) \rightarrow \ell(X)$

$$\text{Hom}^m(F, \Omega_X^n) = \varinjlim_k \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(g^{k+} F, \Omega_X^n)$$

$$\mathrm{Hom}_{\bullet, Y}^{\bullet}(F, \Omega_X^n) = \varinjlim_R \mathrm{Hom}_{O_X}(F/g^{R+}F, \Omega_X^n)$$

と定義し triangle

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} & R\mathrm{Hom}_{\bullet, Y}^{\bullet}(F, \Omega_X^n) & \\ \swarrow & & \searrow \\ R\mathrm{Hom}_{\bullet, Y}(F, \Omega_X^n) & \longrightarrow & R\mathrm{Hom}_X(F, \Omega_X^n) \end{array}$$

を得る。 $n = \dim X$ 。

F から $F \wedge \dots \wedge F$ 局所自明なる $\wedge$ (に n 個の $F = \Omega_X^n$)

$$[\ast_Y(F)] \cong R\mathrm{Hom}_{\ast_Y}(F^{\ast} \otimes_{O_X} \Omega_X^n, \Omega_X^n), \quad j_{\ast}^{\ast}(F) = R\mathrm{Hom}_Y^{\bullet}(F^{\ast} \otimes_{O_X} \Omega_X^n, \Omega_X^n)$$

が成立する。ことに注意。命題 1 の dual とし、次を得る。

命題 3. 1) $DM(X)$ にあって、(5) に同様の triangle と (7) の $F^{\ast} = \Omega_X^n$ としたものは自然な同形である。

2) F は任意に連接 O_X -加群とすると、(6) の同様の triangle と (8) の $F^{\ast} = F$ としたものは、 $DM(X)$ にあって自然な同形である。

証明略。最後に以上の応用として Ramis-Ruget の才 1 双訂定理 [1] の 'meromorphic' analogue が得られることに注意しておく。

$F \in DM(X)$ に対して $\Gamma(F) = \Gamma(X, F)$ とする。 $U \subset X$ の閉集合 Z の U 内に含まれるものの全体から Z の台の族とする。次の記号を用いる。

$$H_{\hat{F}}^i(U, F) = R^i(\Gamma \cdot j_!^{\ast})(F), \quad \mathrm{Ext}_{\ast_{Y, c}}^i(X, F, \Omega_X^n) = R^i(\Gamma_c \cdot \mathrm{Hom}_{\ast_Y}^{\bullet}(\bullet, \Omega_X^n)) \mathrm{Ext}_{m, c}^i(U, F, \Omega_X^n) = R^i(\Gamma_c \cdot \mathrm{Hom}_U^{\bullet}(\bullet, \Omega_X^n))(F).$$

(4) と (8) から完全列 (c: zero support)

$$(9) \quad \cdots \rightarrow H_{\hat{F}}^i(U, F) \rightarrow H^i(X, F) \rightarrow H^i(\hat{X}, \hat{F}) \rightarrow \cdots$$

$$(10) \quad \cdots \leftarrow \mathrm{Ext}_{m, c}^{n-i}(U, F, \Omega_X^n) \leftarrow \mathrm{Ext}_c^{n-i}(X, F, \Omega_X^n) \leftarrow \mathrm{Ext}_{\ast_{Y, c}}^{n-i}(X, F, \Omega_X^n) \leftarrow \cdots$$

と得る。この時定理は次の形に述べられる。

定理 3 (9)の各項に自然な QFS (= quotient of FS) 構造, (10)の各項に自然な QDFS (= quotient of DFS) 構造, (9)と(10)の間、自然な $\mathbb{C}$ -双線形 pairing が存在し、この pairing は対応する各空間に同様の Hausdorff 位相空間の間の位相双対を引き起す。このより、QFS, QDFS 構造は一意的である。さらに H^i の separation と Ext_c^{n-i+1} の separation は同値である。(但し X は純次元 n と仮定しに。)

証明は Malgrange の Serre 双対定理の証明とほぼ同様である。
([1, VII. §4] 参照)。

文 献

- [1] Banica, C., and Stanasila, O., Algebraic methods in the global theory of complex spaces, John Wiley 1976.
- [2] Grothendieck, A., On the de Rham cohomology of algebraic varieties, Publ. Math. IHES 29 (1966), 95-103
- [3] Hartshorne, R., Residues and Duality, Springer Lecture Notes 20 (1966).
- [4] Hartshorne, R., On the de Rham cohomology of algebraic varieties, Publ. Math. IHES — (1975).
- [5] Herrela, M. and Lieberman, D., Duality and de Rham cohomology of infinitesimal neighborhoods, Invent. math. 13 (1971), 97-124.
- [6] Hironaka, H., Bimeromorphic smoothing of a complex-analytic variety,

Warwick, 1991.

- [7] Kantor, J.-M., Le complexe de Dolbeault-Grothendieck sur les espaces analytiques, Séminaire Lelong, 14^e année, 1993/94, Springer Lecture Note 494.
- [8] Malgrange, B., Ideals of differentiable functions, Oxford Univ. Press, 1966.
- [9] Poly, J.-B., Sur l'homologie des courants à support dans un ensemble semi-analytique, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 38 (1974), 35-43.
- [10] Ramis, J. P., et Ruget, G., Complexes dualisants et théorème de dualité en géométrie analytique complexe, Publ. IHES, 38, 77-91 (1970).
- [11] Sasakura, N., Complex analytic de Rham cohomology I, Proc. Japan Acad., 49 (1973), 718-722, II, ibid. 50 (1974), 292-295, III, 51 (1975) 7-11, IV, 535-539.
- [12] Brieskorn, E., Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hypertflächen, Manuscripta Math. 2 (1970), 103-161.