

群環上の台 τ -傾加群

小境雄太 *

概要

k を代数的閉体, G を有限群, N を G の正規部分群とする。[1] により台 τ -傾加群が導入され, この理論の主役である台 τ -傾加群は, 表現論的に重要な多くの対象と一対一対応することが示された。本稿では, kN 上の台 τ -傾加群全体の集合のある部分集合が, kG 上のそれと同型であることを説明する。

1 背景

[1] によって導入された台 τ -傾加群は次のように定義される。

- 定義 1.1** ([1]). (1) Λ -加群 M が τ リジッドであるとは, $\text{Hom}_\Lambda(M, \tau M) = 0$ が成り立つときをいう。
- (2) Λ -加群 M が τ 傾加群であるとは, M が τ リジッドであり, $|M| = |\Lambda|$ が成り立つときをいう。(ただし, $|M|$ は M の互いに非同型な直既約因子の個数を表す。特に, $|\Lambda|$ は, 単純 Λ -加群の同型類の個数と一致する。)
- (3) Λ 加群 M が台 τ 傾加群であるとは, ある Λ のべき等元 e が存在して, M が $\Lambda/\Lambda e\Lambda$ -加群として τ 傾加群になるときをいう,

* 東京理科大学 kozakai@rs.tus.ac.jp

有限次元多元環 Λ に対して, Λ 上の台 τ -傾加群全体 $s\tau\text{-tilt } \Lambda$ は, Λ の表現論的に重要な多くの対象と一対一で対応する. その例として, 例えば次のものがある.

定理 1.2 ([1, 3, 4, 5, 7]). Λ を有限次元多元環とする. $s\tau\text{-tilt } \Lambda$ は次の集合と一対一対応下にある.

- 台 τ^{-1} 傾加群 (support τ^{-1} -tilting module) の add-同値類の集合 $s\tau^{-1}\text{-tilt } \Lambda$
- 二項準傾複体 (two-term silting complex) の add-同値類の集合 $2\text{-silt } \Lambda$
- 二項余準傾複体 (two-term cosilting complex) の add-同値類の集合 $2\text{-cosilt } \Lambda$
- 関手的有限なねじれ類 (functorially finite torsion class) の集合 $f\text{-tors } \Lambda$
- 関手的有限なねじれ自由類 (functorially finite torsion-free class) の集合 $f\text{-torf } \Lambda$
- 左有限 (left finite) な半煉瓦 (semibrick) の集合 $f_L\text{-sbrick } \Lambda$
- 右有限 (right finite) な半煉瓦の集合 $f_R\text{-sbrick } \Lambda$
- 二項単純系 (two-term simple-minded collection) の集合 $2\text{-smd } \Lambda$
- $D^b(\Lambda)$ において length heart をもつ intermediate t-structure の集合 $\text{int-t-str } \Lambda$
- 左有限な $\Lambda\text{-mod}$ の広大部分圏 (wide subcategory) の集合 $f_L\text{-wide } \Lambda$
- 右有限な $\Lambda\text{-mod}$ の広大部分圏 (wide subcategory) の集合 $f_R\text{-wide } \Lambda$

$s\tau\text{-tilt } \Lambda$ は $M_1, M_2 \in s\tau\text{-tilt } \Lambda$ に対して, $M_1 \leq M_2$ を $\text{Fac } M_1 \subseteq \text{Fac } M_2$ で定義することにより, 半順序集合の構造をもつ. また, [2] により $2\text{-silt } \Lambda$ も半順序集合となることが示されており, 上記の $s\tau\text{-tilt } \Lambda$ と $2\text{-silt } \Lambda$ の間の一対一対応は, 単なる一対一対応ではなく, 半順序集合としての同型となっ

ている。また、 Λ が対称多元環である場合、準傾複体と傾複体は一致することも [2] で示されており、群環をはじめとする対称多元環 Λ 上の st -tilt Λ を調べることは、導来同値の研究にも役立つことが期待される。

こういった理由から、与えられた多元環に対して、その多元環上の台 τ -傾加群を与えたり、分類することは、最近では表現論の 1 つのテーマとなっている。本稿では、有限群の群環に対して、それらの上の台 τ -傾加群を調べる。具体的には、有限群 G とその正規部分群 N のそれぞれの群多元環上の台 τ -傾加群全体のある部分集合を比較する。

2 主結果

この章では、有限群 G とその正規部分群 N のそれぞれの群環上の台 τ 傾加群に関する結果を [6] に基づいて紹介する。

この章では、 G は有限群、 N は G の正規部分群、 k は正標数 p をもつ代数的閉体を表すものとする。また、 $\text{Ind}_N^G : kN\text{-mod} \rightarrow kG\text{-mod}$ により誘導関手、 $\text{Res}_N^G : kG\text{-mod} \rightarrow kN\text{-mod}$ により制限関手を表す。

次の定理は、適切な条件を満たす kG 上の台 τ 傾加群の kN への制限が再び台 τ -傾加群になるというものである。

定理 2.1. kG 上の台 τ 傾加群 M が次の 2 条件を満たすとする。

- M は相対 N -射影的、すなわち M が $\text{Ind}_N^G \text{Res}_N^G M$ の直和因子として現れる。
- $\text{Ind}_N^G \text{Res}_N^G M \in \text{add } M$ が成り立つ。

このとき、 $\text{Res}_N^G M$ は kN 上の台 τ 傾加群となる。さらに、 kG 上の台 τ 傾加群 M_1, M_2 が上記の 2 条件を満たし、 $M_1 \leq M_2$ となるとき、 $\text{Res}_N^G M_1 \leq \text{Res}_N^G M_2$ が st -tilt kN で成り立つ。すなわち、制限関手は半順序構造を保つ。

次の定理を述べる準備として, kN -加群 X の G -不変性を定義する. kN -加群 X と $g \in G$ から, 次のように kN -加群 gX を構成できる.

- 集合としては $gX = \{gx \mid x \in X\}$ で定める.
- $n \in N$ の $gx \in gX$ への作用が次で与えられる: $n \cdot gx := g(g^{-1}ngx)$

kN -加群の G -不変性は以下で定義される.

定義 2.2. kN -加群 X が G -不変であるとは, 任意の $g \in G$ に対して, kN -加群としての同型 $gX \cong X$ が成り立つときをいう.

次の定理は, 定理 2.1 の条件と同値な条件を与え, さらに誘導関手が $\text{st-tilt } kN$ のある部分集合から $\text{st-tilt } kG$ のある部分集合への半順序同型を与えるものである.

定理 2.3. M を kG 上の台 τ -傾加群とする. 次の条件は同値である.

- M は相対 N -射影的かつ $\text{Ind}_N^G \text{Res}_N^G M \in \text{add } M$ が成り立つ.
- ある G -不変な kN 上の台 τ 傾加群 X が存在して, $M =_{\text{add}} \text{Ind}_N^G X$ が成り立つ.
- 任意の単純 $k[G/N]$ -加群 S に対して, $S \otimes_k M \in \text{add } M$ が成り立つ.

さらに, kG 上の台 τ 傾加群で上記の同値条件を満たすものの全体の (を “ $=_{\text{add}}$ ” で割ったもの) を $(\text{st-tilt } kG)^*$, G -不変な kN 上の台 τ 傾加群全体 (を “ $=_{\text{add}}$ ” で割ったもの) を $(\text{st-tilt } kN)^G$ と表したとき, 誘導関手 Ind_N^G により $(\text{st-tilt } kN)^G$ と $(\text{st-tilt } kG)^*$ の間の半順序集合としての同型が与えられる:

$$\text{Ind}_N^G : (\text{st-tilt } kN)^G \xrightarrow{\cong} (\text{st-tilt } kG)^*$$

ここからは, 定理 2.3 の応用として, $(G : N)$ が p べきの場合の $\text{st-tilt } kG$ と $\text{st-tilt } kN$ の比較を行う. まずは, モジュラー表現論でよく知られている

事実をいくつか紹介する。

定義 2.4. k 上 1 次元ベクトル空間 k に対して, G の各要素が恒等的に作用し, それを線形に拡張したものは kG -加群になる。これを自明な kG -加群とよび, k_G で表す。つまり, 自明な kG -加群 k_G とは, G の作用が次のように与えられる kG -加群である:

$$g \cdot x := x \ (g \in G, x \in k)$$

注意 2.5. 自明な kG -加群 k_G は $k(\sum_{g \in G} g)$ と同型となる。また, $\dim k_G = 1$ であるため, k_G は単純 kG -加群である。

一般に単純 kG -加群の同型類は複数個あるが, p -群については次のことが知られている。

命題 2.6. Q を p -群とする。このとき, 自明な kQ -加群 k_Q は唯一の単純 kQ -加群である。

M_1, M_2 を kG -加群とし, $m_1 \otimes m_2 \in M_1 \otimes M_2 =: M_1 \otimes_k M_2$ および $g \in G$ に対して, $g(m_1 \otimes m_2) := gm_1 \otimes gm_2$ と定めることで, $M_1 \otimes M_2$ は kG -加群になる。これに関して, 次の命題は用意に証明できる。

命題 2.7. k_G を自明な kG -加群, M を任意の kG -加群としたとき, 次の kG -加群としての同型が成り立つ。

$$k_G \otimes M \cong M$$

以上の命題 2.6, 2.7 と定理 2.3 を組み合わせることで次の定理を得る。

定理 2.8. G/N が p -群であるならば, 誘導関手は次の半順序集合としての同型を引き起こす:

$$\mathrm{Ind}_N^G : (\mathrm{s}\tau\text{-tilt } kN)^G \xrightarrow{\cong} \mathrm{s}\tau\text{-tilt } kG$$

参考文献

- [1] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten, τ -tilting theory. *Compos. Math.* **150** (2014), no. 3, 415–452.
- [2] T. Aihara, O. Iyama, Silting mutation in triangulated categories. *J. Lond. Math. Soc. (2)* **85** (2012), no. 3, 633–668.
- [3] S. Asai, *Semibricks*. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2020, no. 16, 4993–5054.
- [4] T. Brüstle, D. Yang, *Ordered exchange graphs*. *Advances in representation theory of algebras*, 135–193, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2013.
- [5] S. Koenig, D. Yang, *Silting objects, simple-minded collections, t-structures and co-t-structures for finite-dimensional algebras*. *Doc. Math.* **19** (2014), 403–438.
- [6] R. Koshio, Y. Kozakai, *Normal subgroups and support τ -tilting modules*. arXiv:2301.04963 (2023).
- [7] F. Marks, J. Šťovíček, *Torsion classes, wide subcategories and localisations*. *Bull. Lond. Math. Soc.* **49** (2017), no. 3, 405–416.