

伝達特性の差の補償機能を有する自由度縮約モデルを用いた時刻歴応答評価法

その1：振動数領域の応答の等価性に基づく手法

正会員 ○吉富信太^{*1} 同 小豊直英^{*2} 同 辻聖晃^{*3} 同 竹脇出^{*4}

2. 構造—2. 振動

縮約モデル, 変換地動慣性力, 変位の等価性, 時刻歴応答解析

1. 序

制振装置を有する構造物の地震や風に対する応答評価は, 時刻歴応答解析に基づくことが一般的である。本論文では, 多自由度モデルの時刻歴応答解析の計算負荷の低減のために少自由度の縮約モデルを用いる手法を扱う。関連する既往の手法¹⁾においては, 原モデルと縮約モデルの変位の等価性に基づき荷重を調節して変位応答の評価精度を向上させているが, 加速度応答の精度が低いことが指摘されている。本論文では, 任意の縮約モデルに対して, 高次モードまで考慮した時刻歴応答の等価性条件をより高精度に満足する汎用性の高い荷重の変換法を提案する。

2. 縮約構造モデルを用いた時刻歴応答解析

本論文では, 元のモデルよりも自由度の小さいモデルを用いた時刻歴応答解析法を提案する。以下では縮約前後のモデルを「原モデル」, 「縮約モデル」と呼ぶ。本論文で提案する手法は文献 1) の手法を一般化したものと位置付けられるため, 比較のために, まず本節では文献 1) の手法を概説する (図 1)。

2.1 主構造モデルの縮約

原モデルおよび縮約モデルの自由度をそれぞれ N , $\bar{N}$ で表す。 $(\bar{\cdot})$ は縮約モデルに関する量を表す。原モデル及び縮約モデルの一般層をそれぞれ第 i 層, 第 j 層で表す。原モデルの N 個の自由度のうち, 縮約モデルの $\bar{N}$ 個の自由度に対応する自由度を「縮約対応自由度」と呼ぶ。以下の原モデルと縮約モデルの 1 次固有円振動数と縮約対応自由度における 1 次固有モードの等価性に基づき主構造の縮約を行う。

$$\bar{\omega}^{(1)} = \omega^{(1)}, \quad \bar{u}_j^{(1)} / \bar{u}_1^{(1)} = u_j^{(1)} / u_1^{(1)} \quad (1), (2)$$

ここで, $\omega^{(1)}$, $\bar{\omega}^{(1)}$ は原モデル及び縮約モデルの 1 次固有円振動数, $u_j^{(1)}$, $\bar{u}_j^{(1)}$ は原モデル及び縮約モデルの 1 次固有ベクトルの第 j 成分を表す。また $\bar{j}$ は, 縮

約モデルの第 j 自由度に対応する原モデルの自由度番号を表す。例えば 2 層縮約モデルの対応自由度が原モデルの第 10, 20 層の場合, $\bar{1}=10$, $\bar{2}=20$ となる。

縮約モデルの質量 $\bar{m}_j$ は, 原モデルの縮約代表層間の質量を上側の縮約代表層へ単純和したものとする。

$$\bar{m}_j = \sum_{i=(j-1)+1}^{\bar{j}} m_i = \sum_{i=1}^{\bar{j}} m_i - \sum_{i=1}^{(j-1)} m_i \quad (3)$$

逆固有モード問題に対する閉形解表現¹⁾を用いて, 主構造縮約モデルの層剛性 $\bar{k}_j$ は以下のように書ける。

$$\bar{k}_j = \bar{\omega}^{(1)2} \frac{\sum_{l=j}^{\bar{N}} \bar{m}_l \bar{u}_l^{(1)}}{\bar{u}_j^{(1)} - \bar{u}_{j-1}^{(1)}} \quad (j=1, 2) \quad (4)$$

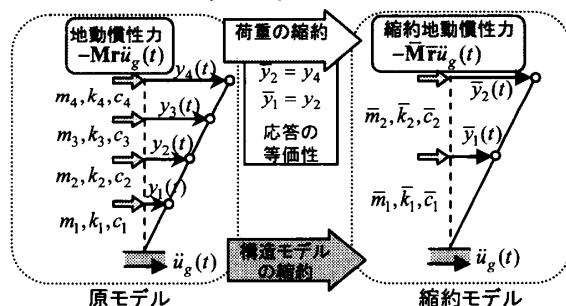


図 1 原モデルと縮約モデル

2.2 既往の地動慣性力の縮約法¹⁾

地動加速度 $\ddot{u}_g(t)$ 入力時の原モデルの運動方程式を (5) 式に示す。 $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{C}$ は原モデルの質量, 剛性, 減衰行列。 $\mathbf{r} = \{1 \cdots 1\}^T$ は影響係数ベクトル。 $\ddot{\mathbf{y}}(t)$, $\dot{\mathbf{y}}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ は地面に対する建物の加速度, 速度, 変位応答。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{u}_g(t) \quad (5)$$

(5) 式の右辺の $-\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{u}_g(t)$ をモデルに作用する外力とみなし「地動慣性力」と定義する。地動慣性力は, 構造物の応答加速度による慣性力を含まず, 地動加速度による慣性力に対応する。

地震時の縮約モデルの運動方程式を (6) 式に示す。 $\bar{\mathbf{M}}$, $\bar{\mathbf{K}}$, $\bar{\mathbf{C}}$ は縮約モデルの質量, 剛性, 減衰行列。

$\bar{\mathbf{r}}=\{1 \cdots 1\}^T$ は影響係数ベクトル. $\bar{\mathbf{y}}(t), \dot{\bar{\mathbf{y}}}(t), \ddot{\bar{\mathbf{y}}}(t)$ は縮約モデルの地面に対する加速度, 速度, 変位応答.

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\bar{\mathbf{y}}}(t)+\bar{\mathbf{C}}\dot{\bar{\mathbf{y}}}(t)+\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{y}}(t)=-\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{r}}\ddot{u}_g(t) \quad (6)$$

一般には縮約モデルと原モデルの応答は一致しないため, 両モデルの応答が等価となるように, 縮約モデルに作用させる地動慣性力を変換する手法が提案されている¹⁾. 本論文では縮約モデルに作用させる変換された地動慣性力を「変換地動慣性力」と呼ぶ.

等価性条件の定義のために, 慣性力と減衰力を無視して復元力のみで抵抗するモデルを仮想的に考え, 変換地動慣性力 $\bar{\mathbf{f}}(t)$ に対する縮約モデルの水平変位が, 地動慣性力 $-\mathbf{M}\ddot{u}_g(t)$ に対する原モデルの縮約対応自由度における水平変位と等しいという条件に基づき変換地動慣性力 $\bar{\mathbf{f}}(t)$ を次式のように得る.

$$\bar{\mathbf{f}}(t)=-\bar{\mathbf{K}}\mathbf{T}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\ddot{u}_g(t) \quad (7)$$

ここで, $\mathbf{T}$ は原モデルと縮約モデルの対応自由度を表す $\bar{N} \times N$ の縮約変換行列で, 第 $(j, \bar{j})$ 要素 ($j=1, \dots, \bar{N}$) を 1, それ以外を 0 とする行列である.

主構造物が弾性範囲のとき, $\mathbf{K}, \bar{\mathbf{K}}$ は時刻によらず一定であるため, (7)式における $\bar{\mathbf{K}}\mathbf{T}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{r}$ を 1 回計算すれば, 変換地動慣性力 $\bar{\mathbf{f}}(t)$ を計算できる. 予め計算した $\bar{\mathbf{f}}(t)$ を(8)式のように縮約モデルに作用させた時刻歴応答解析により地震時応答 $\bar{\mathbf{y}}(t)$ を評価する.

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\bar{\mathbf{y}}}(t)+\bar{\mathbf{C}}\dot{\bar{\mathbf{y}}}(t)+\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{y}}(t)=\bar{\mathbf{f}}(t) \quad (8)$$

図 2,3 に, 2.1 節の手法により 40 層せん断モデルを 2 層に縮約したときの水平変位及び水平加速度応答の時刻歴と最大応答を示す. 比較のために地動慣性力を変換しない場合の応答も示す. 図 2 より, 変位の精度は高いが, 加速度は精度が悪いことが分かる. その原因は図 3(b)より, 応答の高次モードの成分が適切に反映されていないことにあると考えられる.

3. 原モデルと縮約モデルの伝達特性の差を考慮した変換地動慣性力

本節では, 前節の手法の問題点を解決し, 縮約モデルを用いて加速度も精度良く評価可能な新たな変換地動慣性力の生成法を提案する. 原モデルと縮約モデルの応答が等価になるよう伝達特性の差を入力に反映させる手法である (図 4 参照).

3.1 原モデルと縮約モデルの伝達特性の差に起因する応答の差

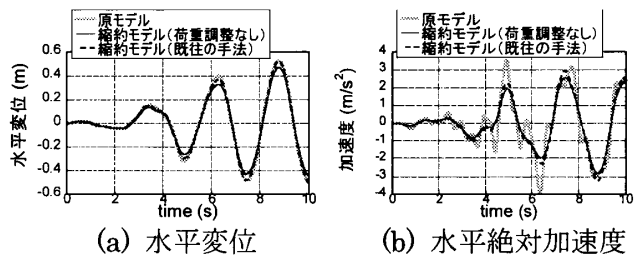


図 2 原モデルと縮約モデル頂部の時刻歴応答

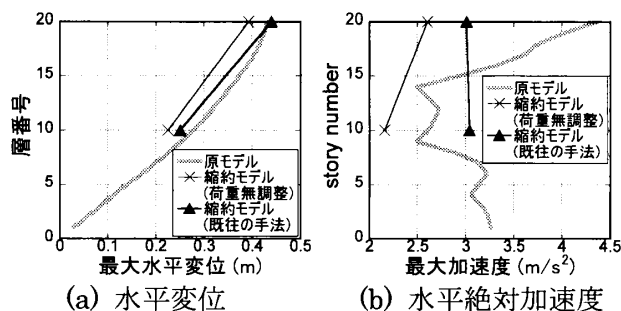


図 3 原モデルと縮約モデル頂部の最大応答

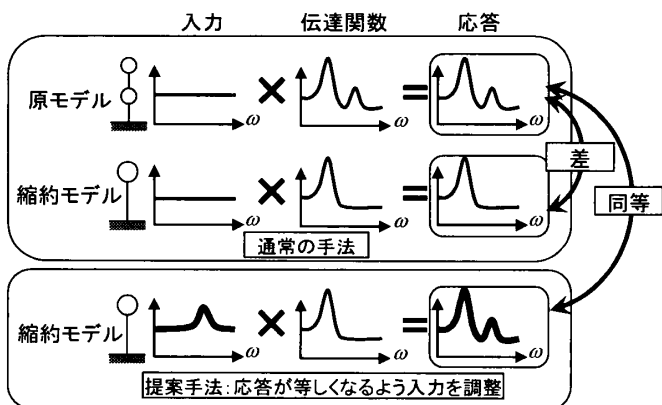


図 4 提案手法の概要 (振動数領域)

本節では, 伝達関数の差が応答に及ぼす影響について述べる. 2.1 節の手法により 40 層せん断モデルを 2 層せん断モデルに縮約し, 剛性比例型減衰の 1 次減衰定数を 0 から 0.1 まで変動させた場合の頂部の最大応答を図 5 に示す. 変位は精度が高く, 加速度は減衰が小さい範囲で精度が低い. この理由は原モデルと縮約モデルの伝達特性の差にある. 原モデルと縮約モデルの地動加速度に対する頂部の変位及び加速度応答の伝達関数の絶対値を図 6, 7 に示す. (a), (b) は 1 次減衰定数が 2%, 10% の場合. 図 6 より両モデルの変位伝達関数は減衰の大きさによらず概ね対応している. 一方図 7 より加速度伝達関数は, 特に減衰が小さいと高振動数において顕著な差が見られ, これが加速度の精度低下の原因であるといえる.

一般に縮約モデルと原モデルの伝達特性を全振動

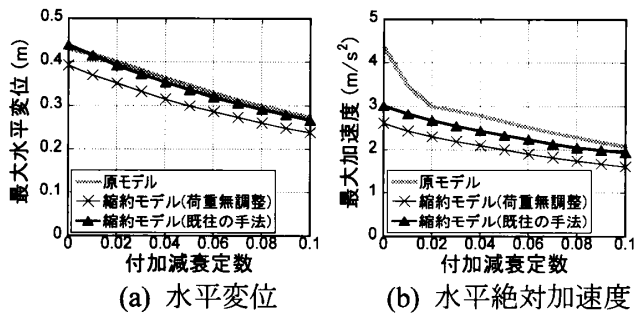


図5 減衰定数と最大応答の関係

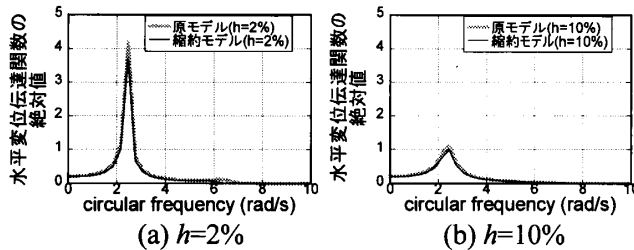


図6 減衰定数と頂部水平変位の伝達関数の関係

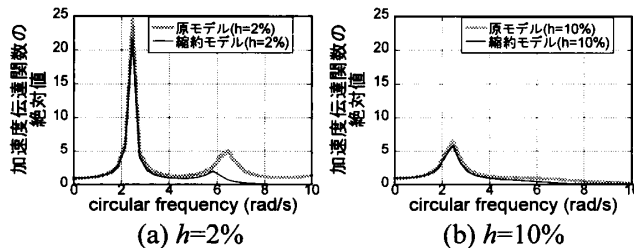


図7 減衰定数と頂部水平加速度の伝達関数の関係

数において一致させることはできないため、応答評価の精度が低下する。また、(7)式の既往の変換地動慣性力は減衰による影響を反映できないため、次節では減衰による伝達特性の変化も反映できる新たな変換地動慣性力の生成法を提案する。

3.2 伝達特性の差を補償した変換地動慣性力

本節では、原モデルと縮約モデルの伝達特性の差を補償した変換地動慣性力の生成法について述べる。原モデルの質量、剛性、減衰係数は既知とし、任意の方法で縮約モデルの質量、剛性、減衰係数が決定されているものとする（例えば2.1節）。本手法は、地動加速度 $\ddot{u}_g(t)$ に対する縮約モデルの水平変位応答 $\bar{y}_i(t)$ が $\bar{y}_i(t) = y_i(t)$ を満足するように変換地動慣性力を求める手法である。

原モデルの(5)式の運動方程式をフーリエ変換して、次の振動数領域の運動方程式を得る。 $\ddot{U}_g(\omega)$, $\mathbf{Y}(\omega)$ は $\ddot{u}_g(t)$, $\mathbf{y}(t)$ のフーリエ変換。iは虚数単位。

$$\mathbf{A}(\omega)\mathbf{Y}(\omega) = -\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{U}_g(\omega) \quad (9)$$

$$\mathbf{A}(\omega) = -\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (10)$$

一方、変換地動慣性力 $\bar{\mathbf{f}}^*(t)$ を受ける縮約モデルの運動方程式(8)式をフーリエ変換すると、縮約モデルの振動数領域における運動方程式は次式で表される。

$$\bar{\mathbf{A}}(\omega)\bar{\mathbf{Y}}(\omega) = \bar{\mathbf{F}}^*(\omega) \quad (11)$$

$$\bar{\mathbf{A}}(\omega) = -\omega^2\bar{\mathbf{M}} + i\omega\bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{K}} \quad (12)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{F}}^*(\omega)$ は $\bar{\mathbf{f}}^*(t)$ のフーリエ変換。

原モデルと縮約モデルの変位応答が全時刻において等しくなる等価性条件は以下のように表される。

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{T}\mathbf{y}(t) \quad (13)$$

(13)式をフーリエ変換することにより、振動数領域の等価性条件は次式で表される。

$$\bar{\mathbf{Y}}(\omega) = \mathbf{T}\mathbf{Y}(\omega) \quad (14)$$

変換地動慣性力は、(14)式の等価性条件を満足するように決定する。まず、(9)式より次式を得る。

$$\mathbf{Y}(\omega) = -\mathbf{A}^{-1}(\omega)\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{U}_g(\omega) \quad (15)$$

(11)式の $\bar{\mathbf{Y}}(\omega)$ に(14)を代入し、さらに $\mathbf{Y}(\omega)$ に(15)式を代入して次式を得る。

$$\bar{\mathbf{F}}^*(\omega) = -\bar{\mathbf{A}}(\omega)\mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}(\omega)\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{U}_g(\omega) \quad (16)$$

以上の操作により、振動数領域の変換地動慣性力 $\bar{\mathbf{F}}^*(\omega)$ が得られる。 $\bar{\mathbf{F}}^*(\omega)$ の逆フーリエ変換により、時間領域の変換地動慣性力 $\bar{\mathbf{f}}^*(t)$ が得られる。

(16)式の導出においては(14)式の変位応答の等価性のみを用いているが、振動数領域における速度及び加速度と変位の関係が、原モデルでは $\dot{\mathbf{Y}}(\omega) = i\omega\mathbf{Y}(\omega)$, $\ddot{\mathbf{Y}}(\omega) = (i\omega)^2\mathbf{Y}(\omega)$, 縮約モデルでは $\dot{\bar{\mathbf{Y}}}(\omega) = i\omega\bar{\mathbf{Y}}(\omega)$, $\ddot{\bar{\mathbf{Y}}}(\omega) = (i\omega)^2\bar{\mathbf{Y}}(\omega)$ であることを用いると、(14)式より速度応答の等価性 $\dot{\bar{\mathbf{Y}}}(\omega) = \mathbf{T}\dot{\mathbf{Y}}(\omega)$ 及び加速度応答の等価性 $\ddot{\bar{\mathbf{Y}}}(\omega) = \mathbf{T}\ddot{\mathbf{Y}}(\omega)$ が成立する。

(16)式は(7)式の既往の手法を一般化したものとみなすことができる。(10), (12)式において慣性力と減衰力の項を無視すると $\mathbf{A}(\omega) = \mathbf{K}$, $\bar{\mathbf{A}}(\omega) = \bar{\mathbf{K}}$ となるため、(16)式は既往の(7)式と対応する。(7)式の $\bar{\mathbf{K}}\mathbf{T}\mathbf{K}^{-1}$ は1回だけ演算するのに対し、(16)式の $\bar{\mathbf{A}}(\omega)\mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}(\omega)$ は振動数ごとに演算する必要がある。

3.3 数値例題

3.3.1 非線形ダンパー付きせん断モデルの縮約

20層せん断モデルを2層せん断モデルへ縮約する。諸元は省略する。リリー機構付きオイルダンパー ($c: 20\text{kNs/mm}$, $d_R: 900\text{kN}$) を全層均等配置し、Appendix Aの方法で縮約する ($\bar{c}_1, \bar{c}_2: 3.1, 3.5\text{kNs/mm}$,

$\bar{d}_R$:1122kN). 図8にダンパーの減衰係数を変化させたときの応答の変化を示す(横軸は複素固有値解析による付加減衰定数, 前述のダンパー量が3%に相当). 提案手法により, 非線形ダンパー付きモデルの頂部応答を精度良く求められることが分かる.

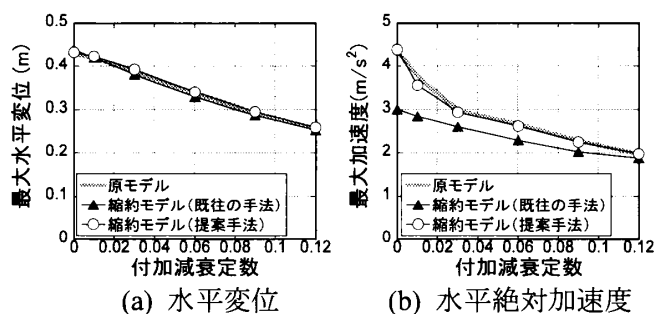


図8 減衰定数と最大応答の関係(El Centro 原波)

3.3.2 骨組モデルからせん断モデルへの縮約

図9の20層3スパン骨組を20層せん断モデルに縮約する(2.1節). 1次減衰定数2%の剛性比例減衰とし, 入力地震波はEl Centro 1940 原波とする. 原モデル, 2節の既往の手法, 本提案手法による時刻歴応答の最大値を図10に示す. 既往の方法は, 変位応答は精度良く評価できるものの, 加速度応答の精度が低い. 一方本提案手法では, 変位応答と加速度応答の両者を精度良く評価可能である.

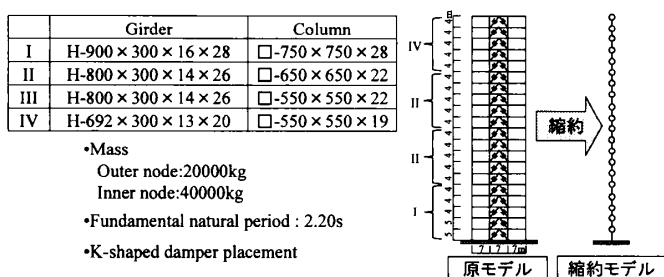


図9 対象モデル

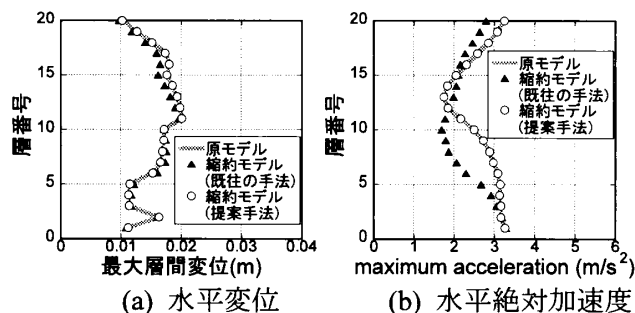


図10 減衰定数と最大応答の関係

4. 結論

非線形ダンパーを含む多自由度の原モデルの時刻歴応答解析の計算負荷低減のために, 少自由度の縮約モデルを用い, さらに縮約モデルに作用させる時刻歴外力を調整することで加速度の精度を向上させる手法を提案した. 以下に得られた成果をまとめる.

- (1) 地震動入力時に地動加速度により各自由度に作用する慣性力(一部)を「地動慣性力」と呼び, 縮約モデルに作用させる地動慣性力を, 原モデルと縮約モデルの応答の等価性条件を満足するように変換する手法を提案した. 本手法は原モデルと縮約モデルの伝達特性の差を地動慣性力に反映させることに相当し, 得られた「変換地動慣性力」を用いると, 原モデルと縮約モデルの対応する自由度の変位, 速度, 加速度の等価性が理論的に保証されることを示した.
- (2) 提案手法は, せん断モデルや骨組モデルなど任意のモデルに対し, また任意の自由度縮約法に対して適用可能な汎用性の高い手法である. 数値例題を通じ提案手法の妥当性を示した.

謝辞 本研究の一部は科研費 H23-24[若手研究 B]による.

- 1) 辻聖晃, 国分宏樹, 吉富信太, 竹脇出:非線形復元力特性を有する制振ダンパーの構造縮約モデルを用いた最適配置法, 構造系論文集, Vol.75, No.658, pp.2143-2152, 2010.12

Appendix A リーフ機構付きオイルダンパーの縮約法

原モデルと縮約モデルの1次消費エネルギーモード S_i , S_j は以下のように定義される. ここで α , $\bar{\alpha}$ は未知量.

$$S_i = \alpha^2 \pi c_i \omega_i^{(1)} (u_i^{(1)} - u_{i-1}^{(1)})^2, \quad \bar{S}_j = \bar{\alpha}^2 \pi \bar{c}_j \bar{\omega}_j^{(1)} (\bar{u}_j^{(1)} - \bar{u}_{j-1}^{(1)})^2 \quad (17), (18)$$

$\bar{S}_j = \sum_{k=(j-1)+1}^{\bar{j}} S_k$ となる縮約モデルの減衰係数 $\bar{c}_j$ は次式となる.

$$\bar{c}_j = \left(\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \right)^2 \frac{\sum_{k=(j-1)+1}^{\bar{j}} \{c_k (u_k^{(1)} - u_{k-1}^{(1)})^2\}}{(\bar{u}_j^{(1)} - \bar{u}_{j-1}^{(1)})^2} \quad (19)$$

原モデルと縮約モデルがともに1次振動成分のみで振動し, かつ全ダンパーの最大減衰力がリーフ荷重 d_{Ri} , $\bar{d}_{Rj}$ に等しいと仮定すると1次消費エネルギーモードは次式となる.

$$S_i = \alpha d_{Ri} \pi (u_i^{(1)} - u_{i-1}^{(1)}), \quad \bar{S}_j = \bar{\alpha} \bar{d}_{Rj} \pi (\bar{u}_j^{(1)} - \bar{u}_{j-1}^{(1)}) \quad (20), (21)$$

縮約モデルのリーフ荷重 $\bar{d}_{Rj}$ は1次消費エネルギーモードの等価性条件より以下のように表せる.

$$\bar{d}_{Rj} = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \left\{ \sum_{k=(j-1)+1}^{\bar{j}} d_{Rk} (u_k^{(1)} - u_{k-1}^{(1)}) \right\} / (\bar{u}_j^{(1)} - \bar{u}_{j-1}^{(1)}) \quad (22)$$

未定係数 $\alpha/\bar{\alpha}$ は, 原モデルと縮約モデルの1次減衰定数(非連成近似)が等しくなるように決定する.

*1 京都大学 助教・博士(工学)
*2 京都大学大学院 修士課程
*3 京都大学 准教授・博士(工学)
*4 京都大学 教授・工博

Assist. Prof., Kyoto University, Dr. Eng.
Graduate Student, Kyoto University
Assoc. Prof. Kyoto University, Dr. Eng.
Prof., Kyoto University, Dr. Eng.