

氏 名	松 野 好 雅 まつ の よし まさ
学 位 の 種 類	理 学 博 士
学 位 記 番 号	理 博 第 576 号
学位授与の日付	昭 和 54 年 7 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理 学 研 究 科 物 理 学 第 一 専 攻
学 位 論 文 題 目	Statistics of nonlinear dispersive and dissipative systems (非線形分散および散逸系の統計学)

論文調査委員 (主 査) 教 授 巽 友 正 教 授 富 田 和 久 教 授 恒 藤 敏 彦

論 文 内 容 の 要 旨

本論文は分散性および散逸性媒質中の非線形波動現象を取扱ったもので、前半では Korteweg-de Vries 方程式に従うソリトン解の集団の統計的性質と、それに対する媒質の微少な散逸性の影響を論じ、後半では Benjamin-Ono 方程式の N 個ソリトン解を求め、ソリトン間の相互作用を詳細に考察している。

一般に、分散媒質中の非線形波動の相互作用については、非線形性が弱い場合には、多くの研究者によってさまざまな摂動法を用いて、波の間のエネルギー伝達が調べられている。これに対して、非線形性が強い場合には、このような方法は使えないが、逆に、任意の非線形波動を相互作用の小さいソリトン解の集まりとして記述することが考えられる。

本論文の第 1 章においては、Korteweg-de Vries (KdV) 方程式

$$U_t + UU_x + \beta U_{xxx} = 0 \quad (1)$$

に従う分散波を考える。ここに、 $U = U(x, t)$ は座標 x および時刻 t における速度場を表し、 $\beta (> 0)$ は分散性の大きさを示すパラメーターである。(1)式において非線形項が分散項と均合っている場合、孤立波を表す解

$$U(x, t) = 3V \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{V}{4\beta} \right)^{\frac{1}{2}} (x - Vt - \xi) \right] \quad (2)$$

が得られるが、この解が極めて安定であり、あたかも 1 個の粒子のように振舞うことが、Zabusky と Kruskal によって見出され、ソリトン (Soliton) と名づけられた。

本論文では、KdV 方程式に従う速度場 U を多数のソリトンの重ね合わせとして記述し、これを用いて各次の相関、スペクトルなどの統計量を、ソリトンの初期個数分布を含む形に表した。とくに、エネルギー・スペクトルは、低波数領域では一定値をとり、高波数領域では指数関数的に減少することが示された。

第 2 章は、分散性媒質がわずかに散逸性 (粘性) をもつ場合の散逸性の影響を論じている。例として、KdV-Burgers 方程式

$$U_t + UU_x + \beta U_{xxx} = \nu U_{xx} \quad (3)$$

に従う波動を取扱い、 $O(\beta/\nu) < t < O((\beta/\nu)^2)$ の時間範囲において、単位質量当りのエネルギーが $t^{-1/2}$ に比例して減少することを示した。

第3章においては、Benjamin-Ono 方程式

$$\left. \begin{aligned} U_t + 4UU_x + H[U_{xx}] &= 0 \\ H[U(x, t)] &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(y, t)}{y-x} dy \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

に従う分散波を考える。(4)式が代数型の孤立波解

$$U(x, t) = \frac{V}{V^2(x - Vt - \xi)^2 + 1} \quad (5)$$

をもつことは、Benjamin および Ono によって示されているが、この孤立波もまた指数型の KdV ソリトン(2)とは異ったソリトンの振舞いを示すことが知られている。

一般に、非線形分散波の問題を取扱うのに用いられる有力な方法として、逆散乱法および Bäcklund 変換の方法があるが、いまの方程式に対しては直ちに適用することが難しい。申請者は、Hirota の直接法を用いて、N個のソリトンを含む解を一般的に求め、この解を用いてソリトンの相互作用を調べた。指数型のソリトンの場合には、衝突の前後で各ソリトンの位相にずれが生じることが知られているが、いまの代数型ソリトンにおいては位相変化は全く起らないことが示された。申請者はさらに、2個のソリトンの相互作用を詳しく調べ、衝突の前後における各ソリトンの位置および振幅の時間的変化の様子が、両ソリトンの振幅比の値の範囲によって3つの型に分れることを見出した。

分散波の中のいわゆる tail の部分の振舞いについては、KdV 方程式の場合には逆散乱の方法を用いてよく調べられている。いまの場合、この方法が使えないので、申請者は(4)式を線形化した方程式の初期値問題を解くことによって、 $t \rightarrow \infty$ における tail の漸近的振舞いを調べ、tail は片側では代数的に減衰し、他の側では振動的に変化することを示した。

参考論文は、等方性乱流のエネルギー・スペクトルに関するもので、Kovasznyai が提案したエネルギー伝達関数が高波数領域で示す不自然な振舞いを取除くため、その一般化を行ったものである。

論文審査の結果の要旨

本論文は、主として分散性媒質における非線形波動の問題、とくに多数のソリトンを含む解の構成とソリトンの相互作用を取扱っている。一般に、流体の不規則運動である乱流の統計的性質は、その流体を支配する力学方程式の解析的性質と深く結びついている。これまで、乱流は主として散逸性(粘性)のある流体について考えられ、散逸性と非線形性が均合った状態として理解されてきた。申請者は本論文において、分散性媒質に着目し、Korteweg-de Vries 方程式に従う乱流速度場をソリトンの集団として記述し、各次の相関、スペクトルなどの統計量を、ソリトンの初期個数分布を含む形に表した。また、弱い散逸性がある場合の影響をも考察した。これらの結果は、分散性媒質における乱流の特質を明らかにした点で意義があるものである。

申請者はさらに、Benjamin-Ono 方程式に従う分散性媒質における代数型ソリトンの集まりを表す厳密

解を導き、これを用いて代数型ソリトンの相互作用を詳しく論じている。この方程式は、密度成層のある流体中の有限振幅の内部波を支配する方程式として、Benjamin および Ono によって導びかれたもので、線形項が積分形で表されているという非局所性をもっている。また、この方程式の孤立波解は、KdV ソリトンが指数関数であるのに対して代数関数で表され、従って前者よりも裾が広いという特徴をもっている。これらの理由のため、非線形波動論における有力な方法とされている逆散乱法および Bäcklund 変換の方法は、この方程式に対してはまだ有効に用いられていない。このため、この方程式についてはこれまで、2 個あるいは 3 個のソリトンを含む解が見出されたが、一般に N 個のソリトンを含む厳密解を求めたのは本論文が最初である。また、この方程式のソリトン解が KdV ソリトンとは異なり代数的な拡がりをもつことから、このソリトンの相互作用もまた KdV ソリトンのそれとは異なるであろうと考えられる。事実、申請者はこのソリトンの衝突においては、KdV ソリトンの場合のような位相のずれが発生しないことを見出した。以上のような申請者の Benjamin-Ono 方程式に関する研究は、従来知られたソリトンとは別種の代数型ソリトンの特性とその相互作用を解明した極めて興味あるものである。

参考論文は、Kovasznyai による乱流の現象論的な理論のもつ不自然さを、その形式を一般化することによって取除いたもので、申請者のこの方面での研究の端緒をなすものである。

よって、本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認められる。