

非等方剪断流中のバーガス渦の時間発展と定常解の安定性

同志社大学・工 水島二郎 (Jiro Mizushima)
同志社大学・工 加藤昌宏 (Masahiro Kato)
京都大学・数理研 木田重雄 (Shigeo Kida)

1. はじめに

流れの中で渦が引き伸ばされると渦度が増大する。渦度勾配の大きいところでは粘性による渦度の消散も大きく、粘性による渦度の消散と渦の引き伸ばしによる渦度の増大とが釣り合うような流れ場が数多く存在する。とくに乱流場におけるエネルギーの散逸はこのような釣り合いが成り立っている場所で起こっていると考えられる。¹⁾

このような流れの代表的な例は Burgers (1948) によって見いだされた。Burgers は z 方向に一様で、 x - y 平面で軸対称な流れ場

$$u_r = -\alpha r, \quad u_\theta = u_\theta(r, t), \quad u_z = 2\alpha z, \quad (\alpha > 0) \quad (1)$$

を考えた。この流れ場はナビエ・ストークス方程式の厳密解をもち、その定常解は

$$\omega = \frac{\alpha \Gamma}{2\pi\nu} \exp(-\alpha r^2/2\nu), \quad (2)$$

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \{1 - \exp(-\alpha r^2/2\nu)\} \quad (3)$$

となる。これはバーガス渦と呼ばれている。二次元流においても同様な厳密解があることが知られている [(13), (14) 式参照]。

x - y 平面内で軸対称でない、より一般的な場合については速度場を

$$\begin{aligned} u_x &= -\alpha x + u(x, y, t), \\ u_y &= -\beta y + v(x, y, t), \\ u_z &= (\alpha + \beta)z \end{aligned} \quad (4)$$

のように表すことができる ($\alpha \geq \beta \geq 0$)。 $\alpha = \beta$ の場合が Burgers が求めた軸対称解である。一般に $\alpha \neq \beta$ の場合にもナビエ・ストークス方程式の定常解が存在するのだろうか。もし、定常解が存在すればそれは安定であるだろうか。 Robinson & Saffman (1984) ²⁾ は等方的な場合についてバーガス渦の 2 次元攪乱に対する線形安定性をレイノルズ数展開により調べ、レイノルズ数が小さいときには安定であることを示した。彼らは非等方の場合についても、等方的な場合からのずれ $\epsilon = (\alpha - \beta)/(\alpha + \beta)$ とレイノルズ数 Re の二重テイラー級数展開によりバーガス渦の定常解を求めた。さらに、直接的な数値計算により $\epsilon = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ の場合について定常解を求めた。彼らは非軸対称の場合のバーガス渦についてはその安定性を調べなかったが、すべてのレイノルズ数およびすべての ϵ ($0 \leq \epsilon < 1$) の値について、バーガス渦の定常解が存在し、その定常解は安定であるだろうという予測を行った。

一方、Neu (1984)³⁾は、 $\beta = 0$ ($\epsilon = 1$) の特別な場合、すなわち二次元流の場合にはバーガース渦は不安定となることを示した。このことを考えれば、バーガース渦がすべてのレイノルズ数およびすべての ϵ の値に対して安定であるという予測が自明であるとは必ずしも言えない。

ここでは、バーガース渦の定常解を求め、求められた定常解の二次元攪乱に対する安定性を調べる。バーガース渦の定常解は二通りの方法で求める。一つはナビエ・ストークス方程式から導かれる渦度方程式を差分法により数値シミュレーションを行い、その定常解を求める方法で、もう一つは渦度方程式の定常解を、コロケーション法とニュートン法によって直接に求める方法である。このようにして求められた定常解の安定性をコロケーション法を用いて行列の固有値問題に帰着することにより調べる。

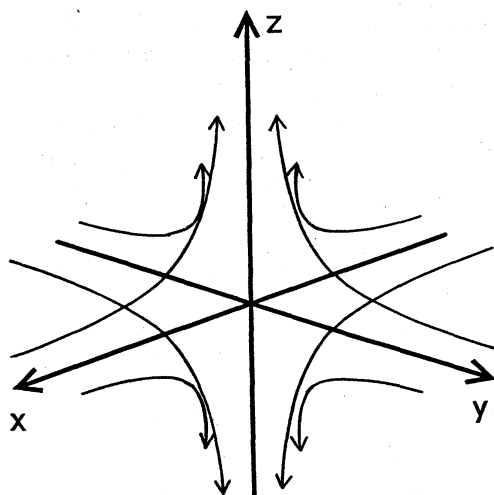


図1. 速度場 $\mathbf{U} = (-\alpha x, -\beta y, (\alpha + \beta)z)$ をもつ一様剪断流の流線の概形.

2. 基礎方程式

無限領域の三次元 (x, y, z) 空間を考え、空間全体に非圧縮の粘性流体が満たされているとする。速度場 $\mathbf{U} = [-\alpha x, -\beta y, (\alpha + \beta)z]$ ($\alpha \geq \beta \geq 0$) をもつ渦なしの一様剪断流中に循環のある速度場 $\mathbf{U}' = (u, v, 0)$ があるとする。このとき、全体の速度場は (4) 式で表される。この一様剪断流の流線の概形を図1に示す。渦度 ω は z 成分のみ存在し、

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5)$$

である。ナビエ・ストークス方程式に (4) 式を代入し、両辺の回転 (rot) をとると次の渦度方程式が得られる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (-\alpha x + u) \frac{\partial \omega}{\partial x} + (-\beta y + v) \frac{\partial \omega}{\partial y} = (\alpha + \beta)\omega + \nu \nabla^2 \omega. \quad (6)$$

流体は非圧縮であると仮定しているので、連続方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

となる。流れ関数 ψ を導入すると u, v, ω は次のように表される。

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = -\nabla^2 \psi. \quad (8)$$

なお、 ∇^2 は二次元ラプラシアンで、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (9)$$

で定義される。(6), (7), (8) 式の定常解としてバーガース渦が得られる。二次元流 ($\beta = 0$) の場合を除き、ここで求めようとしている定常解の境界条件は $|x|, |y| \rightarrow \infty$ で $u, v, \omega \rightarrow 0$ であり、また原点 $(x, y) = (0, 0)$ で $u, v = 0$ である。

剪断流が等方的な場合、つまり $\alpha = \beta$ のとき、軸対称のバーガース渦が得られる。(6) 式の渦度方程式において $\alpha = \beta$ として、円柱座標 (r, θ, z) に変換すると次の式が得られる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial(\omega r^2)}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right). \quad (10)$$

(10) 式は変数変換により線形方程式に帰着でき、厳密解が容易に求められる。その定常解の渦度分布と速度分布は (2) 式と (3) 式で与えられる。速度は $r = 1.585\sqrt{\nu/\alpha}$ のところで最大であり、そのときの u_θ は、

$$u_\theta = 0.07182\Gamma\sqrt{\frac{\alpha}{\nu}} \quad (11)$$

となる。

剪断流が一方向のみ、つまり $\alpha > 0, \beta = 0$ の場合、バーガース渦層が得られる。(6) 式で $\beta = 0$ とすると次の渦度方程式が得られる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \alpha x \frac{\partial \omega}{\partial x} = \alpha \omega + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}. \quad (12)$$

(12) 式も変数変換により線形方程式に帰着でき、厳密解も容易に求められる。その定常解の渦度分布と速度分布はそれぞれ

$$\omega = \sqrt{\frac{2\alpha}{\nu\pi}} V_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{2\nu} x^2\right), \quad (13)$$

$$u_y = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} V_0 \int_0^{\sqrt{\frac{\alpha}{\nu}} x} \exp\left(-\frac{1}{2} s^2\right) ds \quad (14)$$

となる。速度の大きさは $z \rightarrow \pm\infty$ のとき最大で、 $V(z) \rightarrow \mp V_0$ である。

剪断流が非等方的な場合、つまり $\alpha \neq \beta$ のときの定常解を非軸対称バーガース渦と呼ぶことにする。この場合、渦度方程式は線形方程式に変換することができず厳密解を求めることは容易でない。ここでは、いろいろな α と β の値およびいろいろなレイノルズ数に対して、

差分法による数値シミュレーションとニュートン法の二つの方法で非軸対称バーガース渦の定常解を求める。なお、レイノルズ数は $Re \equiv \Gamma/\nu$ で定義する。ここに、 Γ は循環であり、

$$\Gamma = \int \int \omega(x, y) dx dy \quad (15)$$

で定義される。

渦度の分布を表すパラメータとして、渦度のモーメントを

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \int \int \omega x^2 dx dy / \Gamma, \quad \sigma_y^2 = \int \int \omega y^2 dx dy / \Gamma, \\ \sigma_{xy} &= \int \int \omega xy dx dy / \Gamma \end{aligned} \quad (16)$$

のように定義する。

剪断流が非等方的な場合、渦度の分布は楕円形に近くなり、その主軸が x 軸に対してある傾きをもつ。この傾きを定量的に表すために、座標変換

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \phi + y \sin \phi, \\ y' &= -x \sin \phi + y \cos \phi \end{aligned} \quad (17)$$

で $\sigma_{x'y'} = 0$ となるような回転角 ϕ を導入する。このとき、 $\sigma_{x'}$ と $\sigma_{y'}$ および ϕ は次のように表せる。

$$\begin{aligned} \sigma_{x'}^2 &= \cos^2 \phi \sigma_x^2 + \sin 2\phi \sigma_{xy} + \sin^2 \phi \sigma_y^2, \\ \sigma_{y'}^2 &= \sin^2 \phi \sigma_x^2 - \sin 2\phi \sigma_{xy} + \cos^2 \phi \sigma_y^2, \\ \phi &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

渦度方程式と連続の式を変換

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x / \sqrt{2\nu/(\alpha + \beta)}, \quad \tilde{y} = y / \sqrt{2\nu/(\alpha + \beta)}, \quad \tilde{r} = r / \sqrt{2\nu/(\alpha + \beta)} \\ \tilde{\omega} &= \omega / (2/(\alpha + \beta)), \quad \tilde{t} = t / ((\alpha + \beta)/2), \quad \tilde{u} = u / \sqrt{(\alpha + \beta)\nu/2} \end{aligned} \quad (19)$$

により無次元化する。このとき、(6), (7), (8) 式はそれぞれ

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla^2 \omega + \{(1 + \epsilon)x - Re' \cdot u\} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \{(1 - \epsilon)y - Re' \cdot v\} \frac{\partial \omega}{\partial y} + 2\omega, \quad (20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (21)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = -\nabla^2 \psi \quad (22)$$

となる。ただし、 $Re' = Re/2\pi$ であり、上式で $\sim$ は省略した。

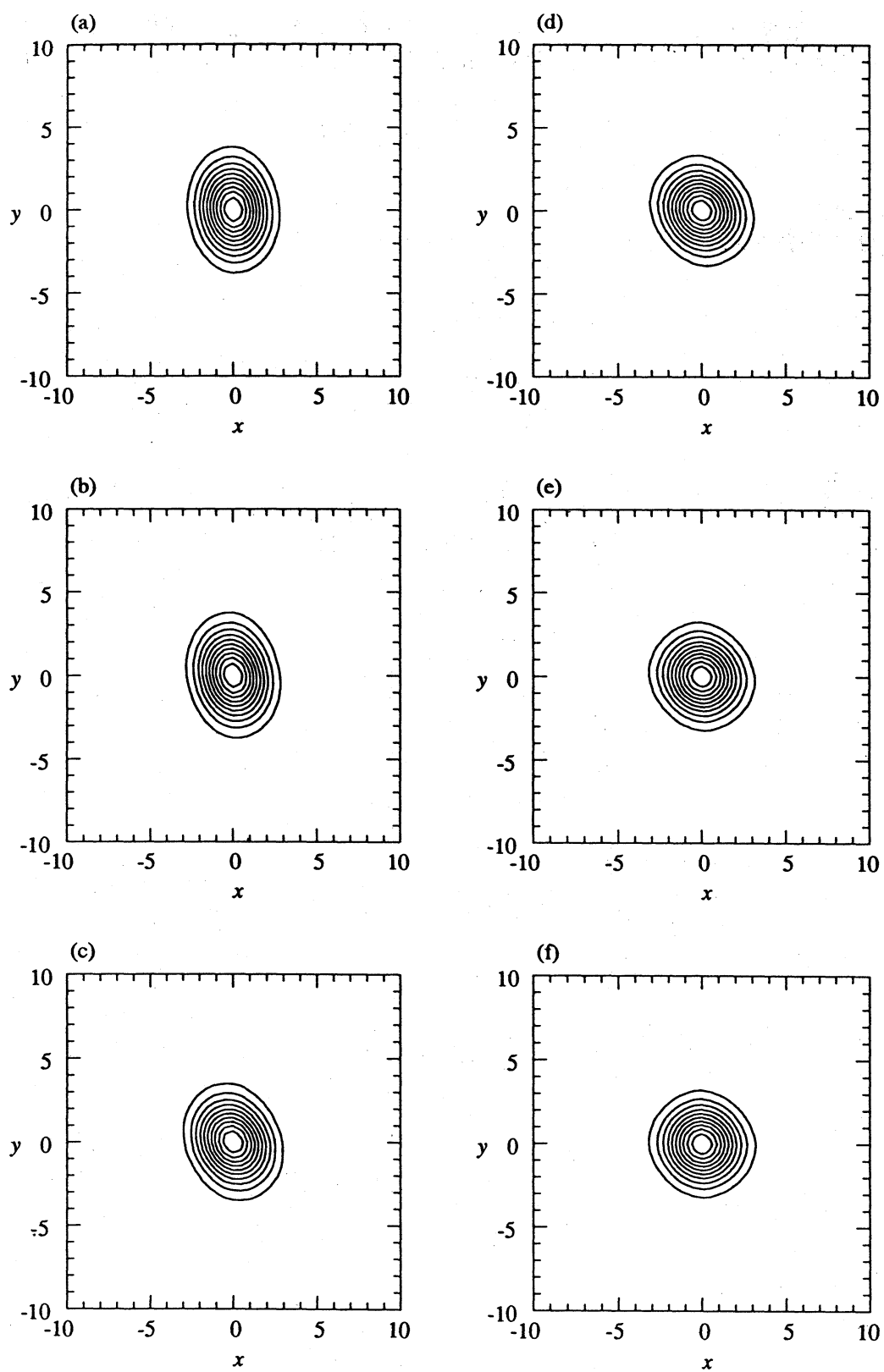


図 2. 差分法を用いた数値シミュレーションで求めた $\epsilon = 1/3$ における非軸対称のバーガース渦の渦度分布. (a) $Re = 10$, (b) $Re = 20$, (c) $Re = 50$, (d) $Re = 100$, (e) $Re = 200$, (f) $Re = 400$.

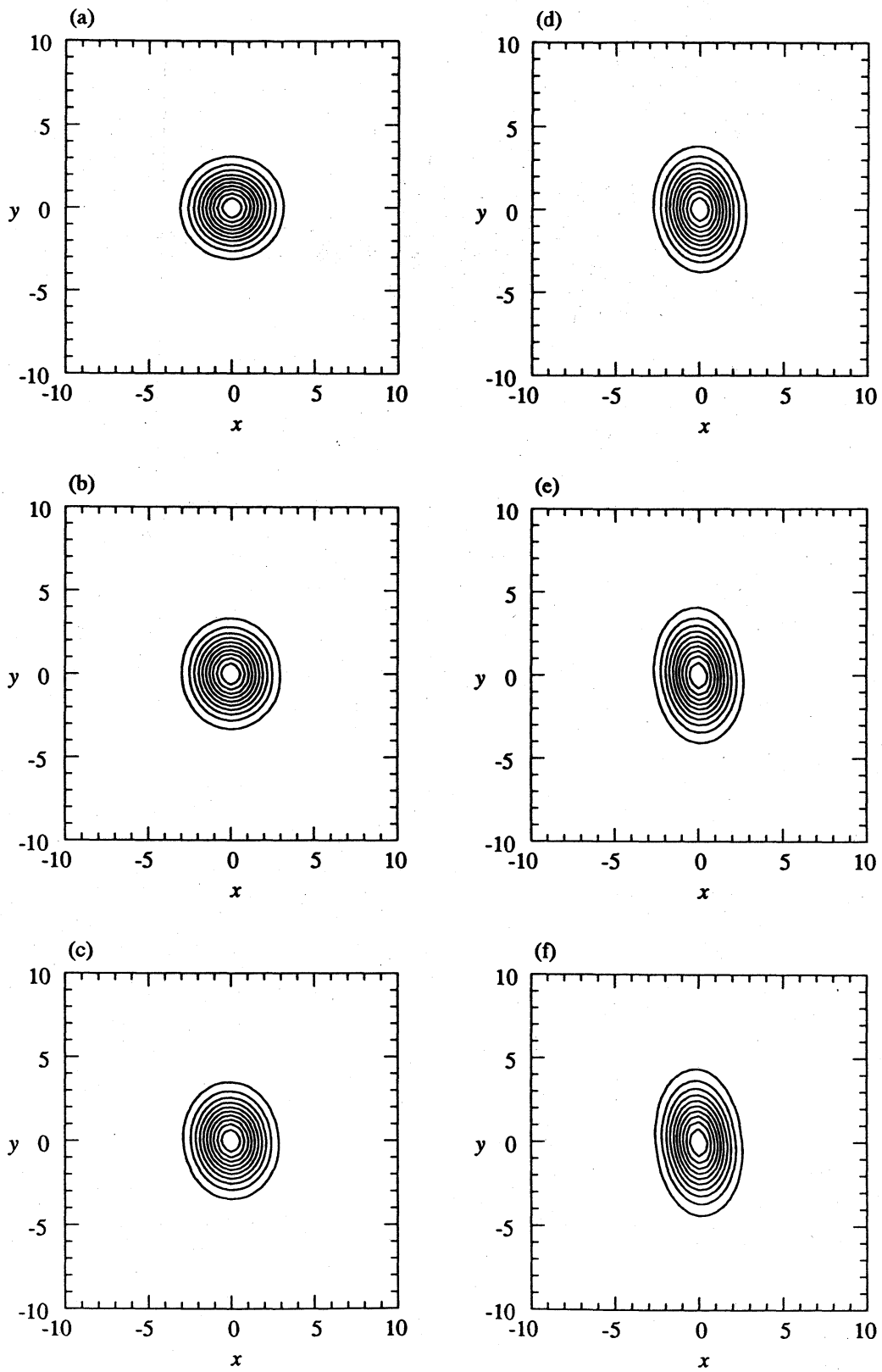


図3. 差分法を用いた数値シミュレーションによる $Re = 10$ における非軸対称のバーガス渦の渦度分布. (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1/9$, (c) $\epsilon = 1/5$, (d) $\epsilon = 1/3$, (e) $\epsilon = 3/7$, (f) $\epsilon = 1/2$.

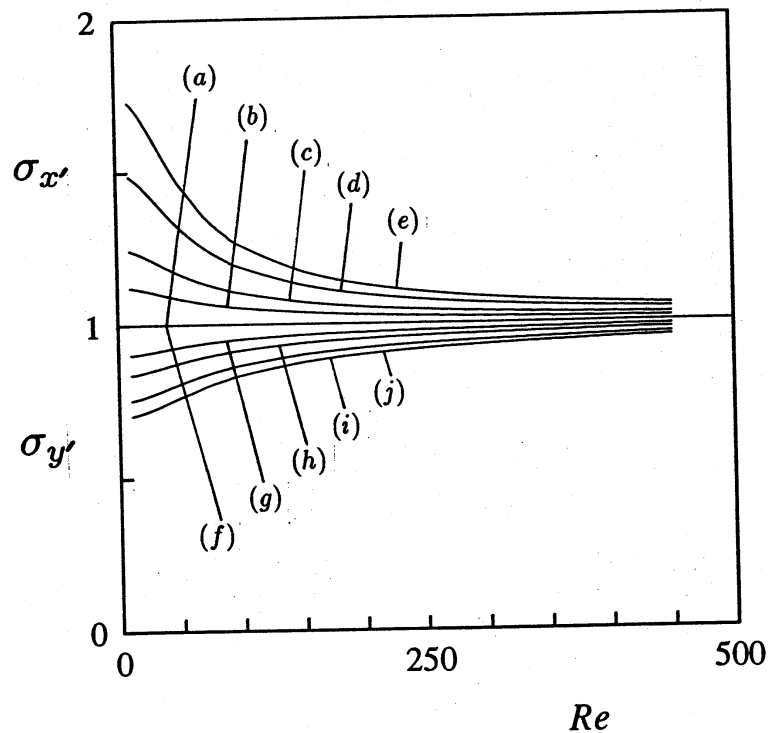


図4. 差分法を用いた数値シミュレーションによるレイノルズ数 Re とモーメント $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ の関係. (a) - (e): $\sigma_{x'}$, (f) - (j): $\sigma_{y'}$. (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1/9$, (c) $\epsilon = 1/5$, (d) $\epsilon = 1/3$, (e) $\epsilon = 3/7$, (f) $\epsilon = 0$, (g) $\epsilon = 1/9$, (h) $\epsilon = 1/5$, (i) $\epsilon = 1/3$, (j) $\epsilon = 3/7$.

3. バーガース渦の定常解

3-1. 差分法による数値シミュレーション

差分法を用いて数値シミュレーションを行い、渦度の時間発展を調べた。 (x, y) 平面内に $-L_x \leq x \leq L_x$, $-L_y \leq y \leq L_y$ の長方形の領域をとり、その境界線より外では渦度 ω が 0 であるとした。領域を $L_x = L_y = 10$ の正方形とし、格子点を等間隔に 41×41 個とった。差分は、時間に関しては前進差分を、空間に関しては中心差分を用いた。ただし、ここでは $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \geq \beta$ とした。また、時間ステップを $\Delta t = 0.01$ 、空間ステップを $\Delta x = \Delta y = 0.05$ とした。解が定常状態となったかどうかの判断は渦度のモーメントが定常になったとき定常解が得られたとした。時間ステップが 100 進むまでに、モーメントの値の有効数字 8 桁が全く変化しないとき定常状態に達したと判定した。

定常状態におけるバーガース渦の渦度分布を図 2 および図 3 に示す。図 2 は、 $\epsilon = 1/3$ ($\alpha/\beta = 2$) と固定し、レイノルズ数 Re を 10 から 400 まで変化させて計算を行ったときのバーガース渦の定常渦度分布である。レイノルズ数が小さいときには渦度分布は楕円形に見えるが、レイノルズ数を大きくすると円形に近づく。図 3 は、 $Re = 10$ に固定し ϵ を変化させたときの定常バーガース渦の形を表したものである。 ϵ の値がゼロのときは渦度分布は円形であるが、 ϵ が大きくなるにつれてより扁平な楕円形となっている。

渦度のモーメント $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ とレイノルズ数との関係を図 4 に示す。 $\epsilon = 0$ の場合は、レイノルズ数にかかわらず $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'} = 1$ である。 ϵ が大きくなるにしたがって $\sigma_{x'}$ は減少し、 $\sigma_{y'}$ は増大する。これは ϵ が大きくなると、バーガース渦の形状がだんだん縦長になる傾向を示すものである。実際、図 3 から渦の形状が縦長になっていることがわかる。また、レイノル

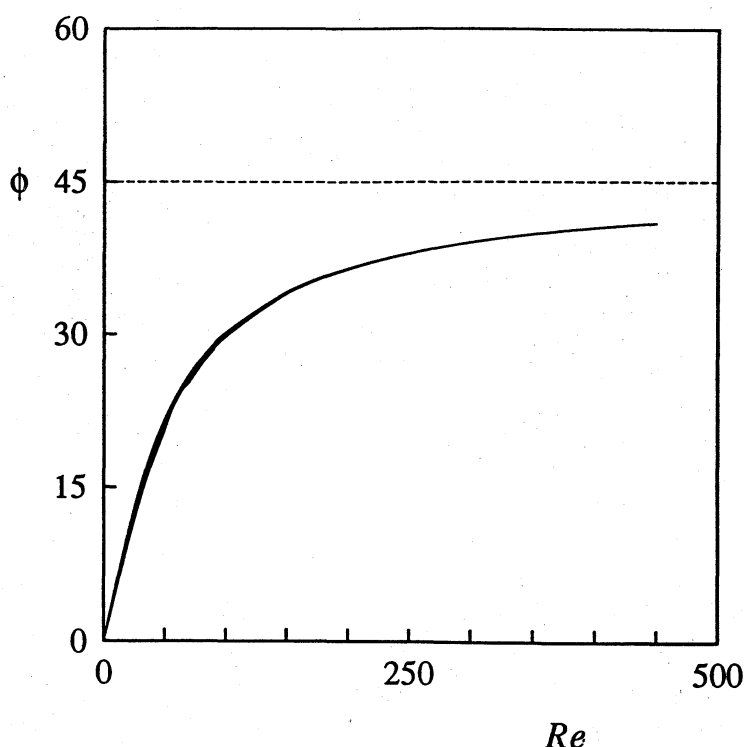


図5. 差分法を用いた数値シミュレーションによるレイノルズ数 Re と回転角 ϕ との関係. 曲線は一本に見えるが $\epsilon = 0, 1/9, 1/5, 1/3, 3/7$ のそれぞれについて示している.

ズ数 $Re \rightarrow \infty$ では、 $\sigma_{x'}, \sigma_{y'} \rightarrow 1$ である。これは、レイノルズ数が大きくなると渦の形状が軸対称的になる傾向を示しており、図2からも確かめられる。バーガース渦の回転角 ϕ とレイノルズ数の関係を図5に示す。この図より、 ϕ はレイノルズ数とともに大きくなることがわかる。このことは図2からもわかるように、レイノルズ数が大きくなるに従って、バーガース渦の主軸が x 軸から傾くことを示している。ある程度レイノルズ数が大きくなれば ϕ はあまり変化せず、 $Re \rightarrow \infty$ では $\phi \rightarrow 45^\circ$ となる [Moffatt, Kida & Ohkitani (1993)⁴⁾]。また ϕ の値はほとんど ϵ に依存しない。 $0 < Re < 150$ においては多少の ϵ 依存性があるものの、 $Re > 250$ では ϕ は ϵ によらずほとんど同じである。

また、流れ関数の分布からエネルギー散逸率は

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\nu \left[\left(-\alpha + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(-\beta + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + (\alpha + \beta)^2 \right] \\ &= 2\nu \left[\left(-\alpha + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(-\beta - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 + (\alpha + \beta)^2 \right] \quad (23) \end{aligned}$$

によって求められる。

エネルギー散逸率の分布を図6および図7に示す。図6は $\epsilon = 1/3$ において、レイノルズ数を変化させたときのエネルギー散逸率の分布であり、図7は $Re = 10$ で ϵ を変化させたときのエネルギー散逸率分布である。

3-2. ニュートン法

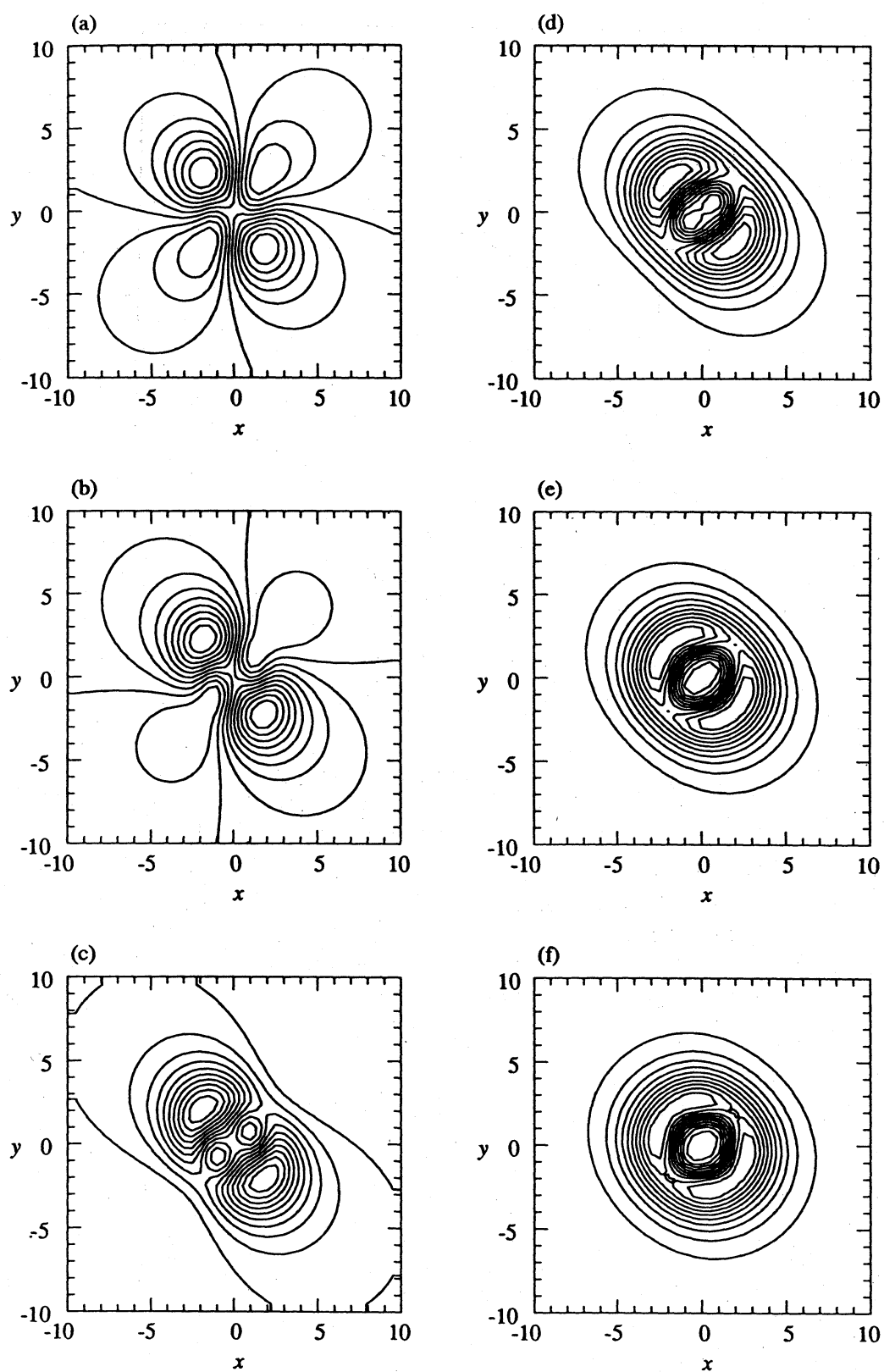


図 6. $\epsilon = 1/3$ におけるエネルギー散逸率の分布. (a) $Re = 10$,
 (b) $Re = 20$, (c) $Re = 50$, (d) $Re = 100$, (e) $Re = 200$,
 (f) $Re = 400$.

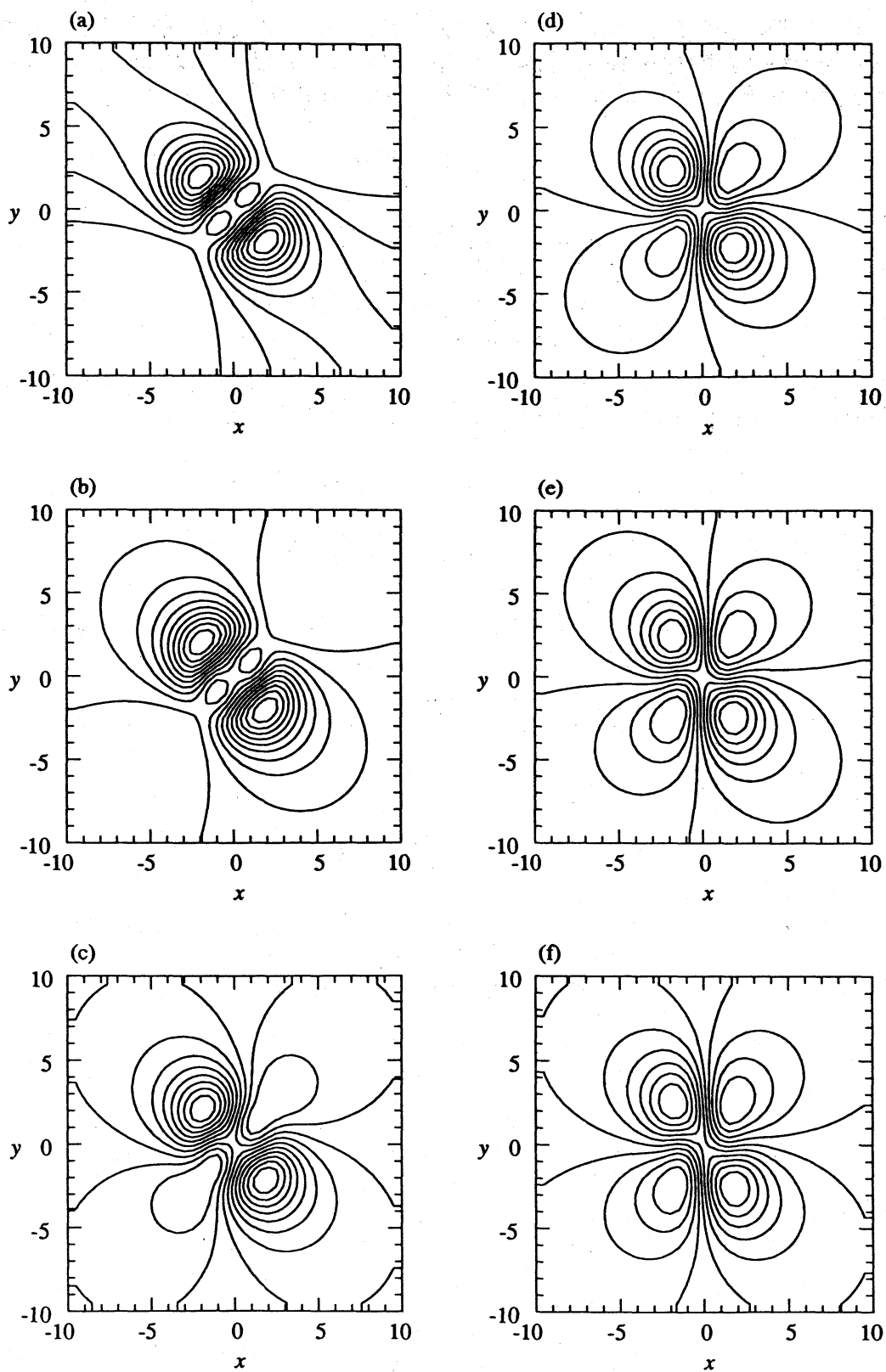


図 7. $Re = 10$ におけるエネルギー散逸率の分布. (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1/9$, (c) $\epsilon = 1/5$, (d) $\epsilon = 1/3$, (e) $\epsilon = 3/7$, (f) $\epsilon = 1/2$.

バーガス渦の定常解をニュートン法により求めた。ここでは、前節で述べた軸対称のバーガス渦の解と非軸対称渦の定常解との差についての方程式を数値的に解いた。軸対称渦の渦度と速度をそれぞれ ω_0, u_0, v_0 とすると、(2), (3) 式から

$$\begin{aligned}\omega_0 &= e^{-(x^2+y^2)/2}, \\ u_0 &= -\frac{y}{x^2+y^2} \left(1 - e^{-(x^2+y^2)/2}\right), \\ v_0 &= \frac{x}{x^2+y^2} \left(1 - e^{-(x^2+y^2)/2}\right)\end{aligned}\quad (24)$$

が得られる。ただし、ここでは無次元化を行った。また、 $\iint \omega dx dy = 2\pi$ である。非軸対称渦と軸対称渦との渦度と速度の差をそれぞれ u', v', ω' とすると ω, u, v は、

$$\omega = \omega_0 + \omega', \quad u = u_0 + u', \quad v = v_0 + v' \quad (25)$$

と表せる。定常状態において ω', u', v' は次式から計算できる。

$$\begin{aligned}-Re' u' \frac{\partial \omega'}{\partial x} + [(1+\epsilon)x - Re' u_0] \frac{\partial \omega'}{\partial x} - Re' u' \frac{\partial \omega_0}{\partial x} - Re' v' \frac{\partial \omega'}{\partial y} + [(1-\epsilon)y - Re' v_0] \frac{\partial \omega'}{\partial y} - Re' v' \frac{\partial \omega_0}{\partial y} \\ + 2\omega' + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + (\epsilon x - Re' u_0) \frac{\partial \omega_0}{\partial x} + (-\epsilon x - Re' v_0) \frac{\partial \omega_0}{\partial y} = 0.\end{aligned}\quad (26)$$

ここで u', v' を

$$\begin{aligned}u' &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{mn} (1 - \xi^2) T_m(\xi) (1 - \eta^2) T_n(\eta), \\ v' &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N b_{mn} (1 - \xi^2) T_m(\xi) (1 - \eta^2) T_n(\eta)\end{aligned}\quad (27)$$

のようにチェビシェフ多項式に展開する。ただし、

$$\xi = \tanh \delta x, \quad \eta = \tanh \delta y \quad (28)$$

である。また、 T_m は m 次のチェビシェフ多項式である。(26) 式を (x, y) 座標から (ξ, η) 座標に変換し、(27), (28) 式を代入する。コロケーション法を用いて $2(M+1)(N+1)$ 個の a_{mn}, b_{mn} に関する連立代数方程式を得る。この連立代数方程式をニュートン法により数値的に解いた。境界条件は、 $(x, y) = (0, 0)$ において $u, v = 0$ 、 $|x|, |y| \rightarrow \infty$ において $\omega \rightarrow 0$ であるが、展開 (27) と変換 (28) より後者の条件は自動的に満たされている。

チェビシェフ多項式展開の項数は $M, N = 16$ とした。また δ を 0.55 とし計算を行った。 $Re = 0$ のときは非軸対称のバーガス渦の定常解

$$\omega = \sqrt{1 - \epsilon} \exp \left[-(1 + \epsilon) \frac{x^2}{2} - (1 - \epsilon) \frac{y^2}{2} \right] \quad (29)$$

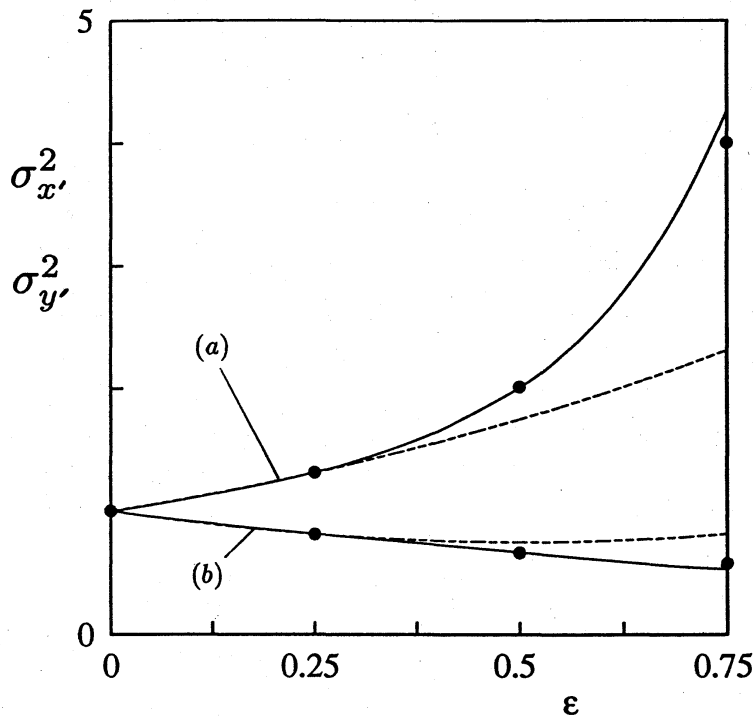


図8. ニュートン法による ϵ とモーメント $\sigma_x'^2$, $\sigma_y'^2$ との関係. 実線は本論文の結果を示し, 破線は(30)式の結果を示す. また, Robinson & Saffman²⁾がニュートン法で得た結果を黒丸で示す.

が厳密に求められる。²⁾ Robinson & Saffman はニュートン法による数値計算で、 $0 \leq Re \leq 628$ の範囲について、 $\epsilon = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ の場合の定常解を求めた。また、彼らは ϵ と Re の二重テイラー級数展開によっても定常解を求めており、モーメントおよび回転角について次のような近似式を与えている。

$$\begin{aligned} \sigma_x^2, \sigma_x'^2 &\simeq 1 - \epsilon + \epsilon^2, \\ \sigma_y^2, \sigma_y'^2 &\simeq 1 + \epsilon + \epsilon^2, \\ \sigma_{xy} &\simeq \frac{-\epsilon Re}{16\pi}, \quad \phi \simeq \frac{Re}{32\pi}. \end{aligned} \quad (30)$$

今回の計算で求められた $Re = 0$ のときのモーメント $\sigma_x'^2, \sigma_y'^2$ と ϵ の関係を図8に示す。同時にモーメントの近似式(30)式による値を破線で示した。計算結果と近似式から得られる値を比べると、 $\epsilon < 0.25$ ではほぼ同一の結果が得られている。また、Robinson & Saffmanがニュートン法で得たモーメントの結果を図8の中で黒丸で示した。両者はほぼ一致している。このことからニュートン法による計算結果は満足できるものであり、 δ の値も適当であると考えられる。 $Re = 0$ で ϵ を変化させたときのバーガス渦の渦度分布を図9に示す。また、 $\epsilon = 0.5$ ($\alpha/\beta = 3$)において、レイノルズ数を変化させたときの渦度分布を図10に、モーメントとレイノルズ数の関係を図11に示す。

4. 線形安定性

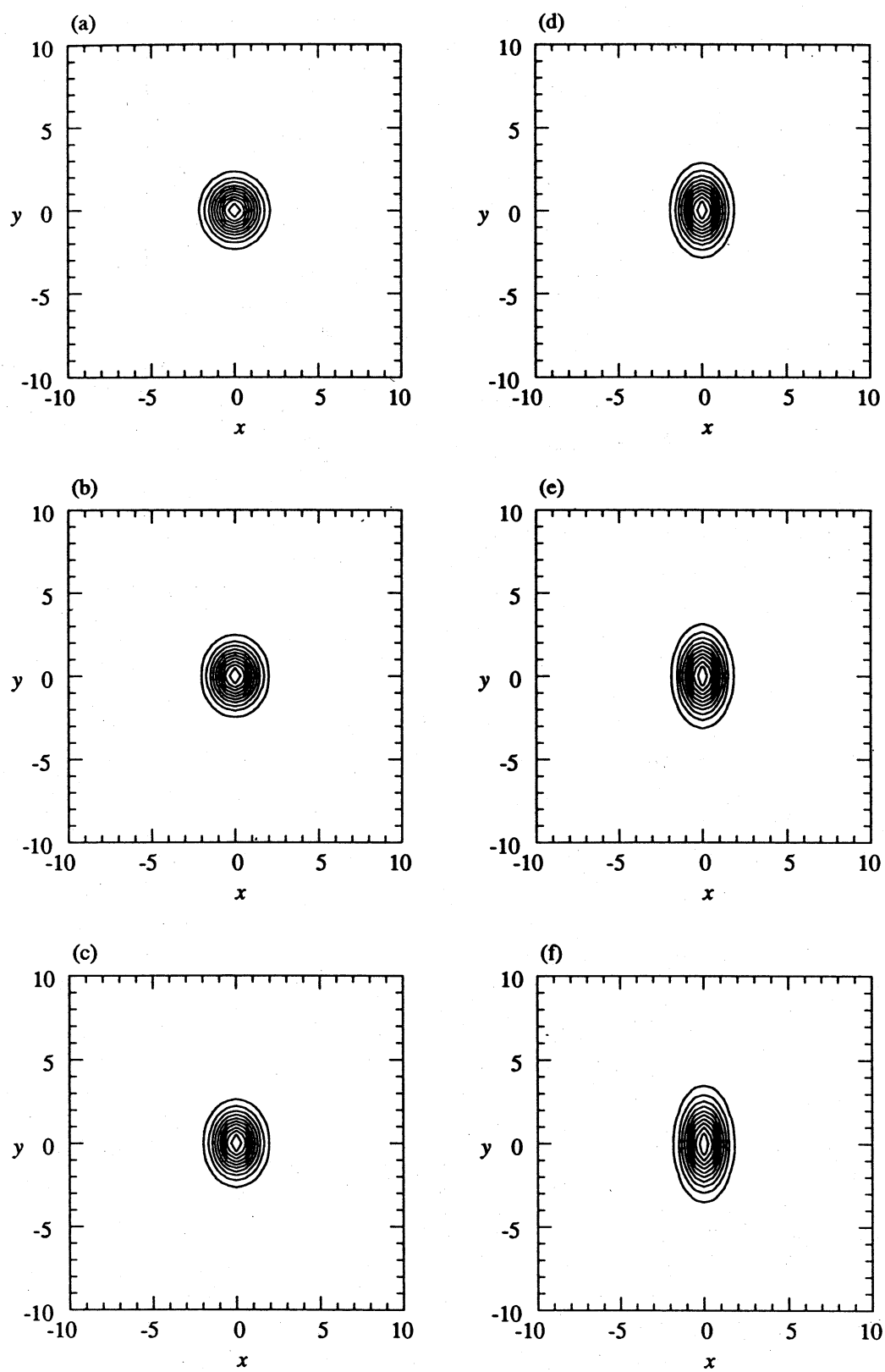


図9. ニュートン法による $Re = 0$ における非軸対称のバーガース渦の渦度分布. (a) $\epsilon = 0.1$, (b) $\epsilon = 0.2$, (c) $\epsilon = 0.3$, (d) $\epsilon = 0.4$, (e) $\epsilon = 0.5$, (f) $\epsilon = 0.6$.

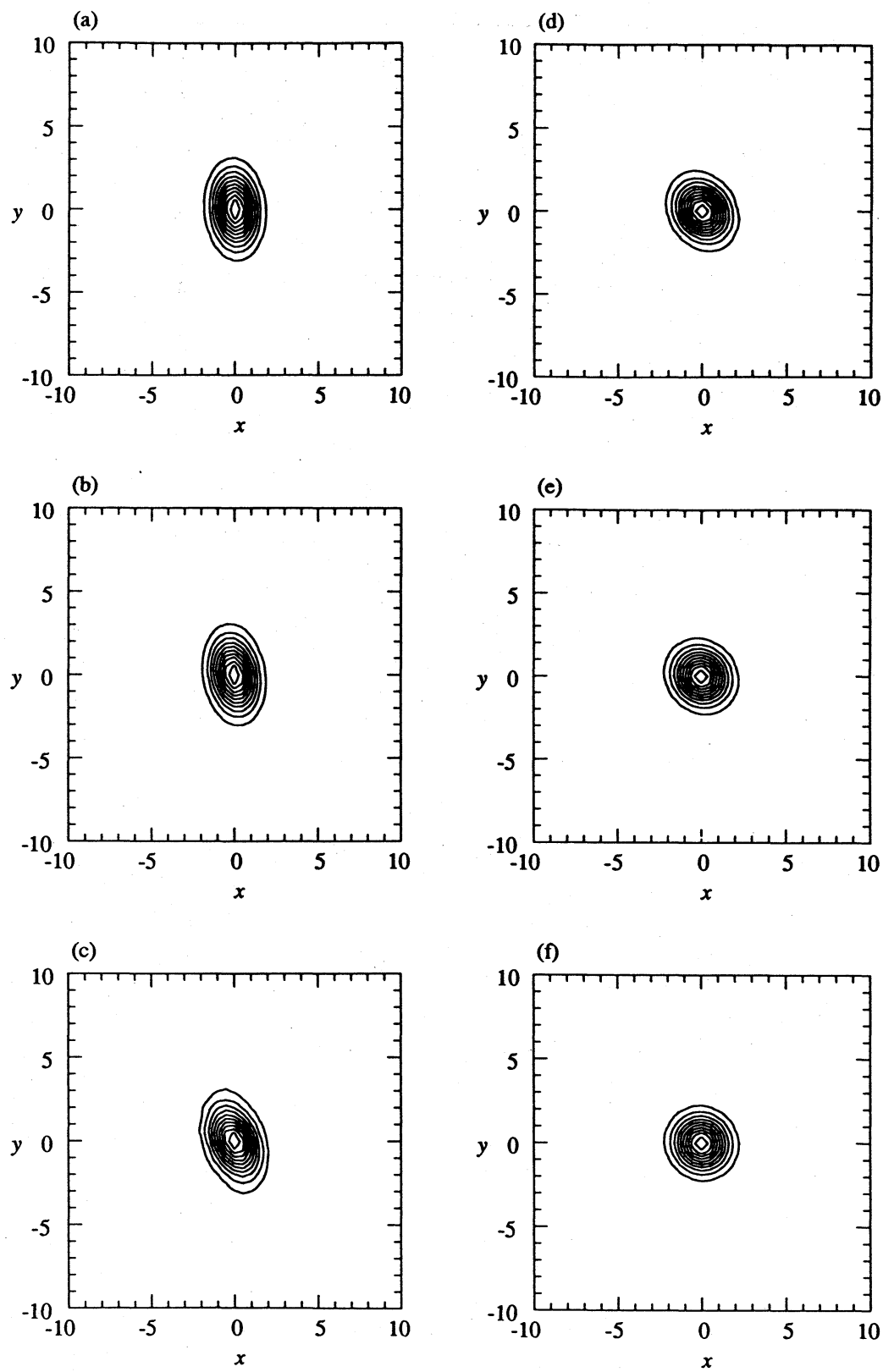


図 10. ニュートン法による $\epsilon = 0.5$ における非軸対称のバーガース渦の渦度分布. (a) $Re = 10$, (b) $Re = 20$, (c) $Re = 50$, (d) $Re = 100$, (e) $Re = 200$, (f) $Re = 500$.

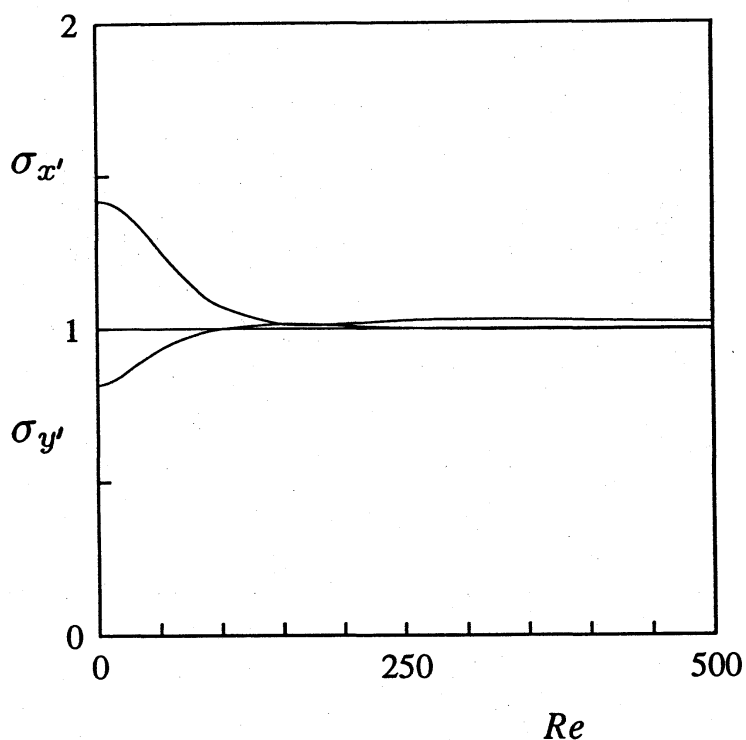


図 11. ニュートン法による $\epsilon = 0.5$ におけるレイノルズ数 Re とモーメント $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ の関係. (a): $\sigma_{x'}$, (b): $\sigma_{y'}$.

4-1. 軸対称バーガス渦の安定性

円筒座標 (r, θ, z) を用いると攪乱 $\hat{\omega}$ と $\hat{\psi}$ を支配する方程式は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 L^n \hat{\omega} + \lambda \hat{\omega} &= inRe' [\omega_o \hat{\psi} + g \hat{\omega}/2], \\
 M^n \hat{\psi} &= \hat{\omega}, \\
 L^n &\equiv \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r^2, \\
 M^n &\equiv \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2}, \\
 \omega_o &\equiv \exp(-r^2/2), \quad g \equiv \frac{1 - \exp(-r^2/2)}{(r^2/2)}
 \end{aligned} \tag{31}$$

ここで、軸対称のバーガス渦は θ に依存しないので、攪乱を θ 方向にフーリエ分解し、 ω', ψ' は因子 $\exp\{\lambda t + in\theta\}$ を持っているとして仮定した。Robinson & Saffman は渦度、流れ関数および線形増幅率をレイノルズ数でテイラー展開し、線形増幅率を計算した。その結果を表 1 に示す。ここで、

$$\lambda(n, k) = \lambda_0 + Re' \lambda_1 + Re'^2 \lambda_2 \tag{32}$$

である。また、 k は固有値の次数である。

n	k	$-\lambda_0$	$i\lambda_1$	$-10^2 \lambda_2$
1	0	1	0.000	0.000
1	1	3	0.125	0.144
1	2	5	0.125	0.101
1	3	7	0.117	0.054
2	0	2	0.250	0.279
2	1	4	0.250	0.428
2	2	6	0.234	0.264
3	0	3	0.375	0.851
3	1	5	0.344	0.647
4	0	4	0.438	1.303
5	0	5	0.469	1.526

表 1. Robinson & Saffman による軸対称バーガース渦の線形増幅率

Robinson & Saffman の計算は小さいレイノルズ数でのみ成り立つ。ここでは線形増幅率を直接数値計算により求めた。数値計算においては $r \rightarrow 0$ のとき

$$\hat{\psi} \propto r^n \quad (33)$$

$$\hat{\omega} \propto r^n \quad (34)$$

となることを用いた。計算により求められた線形増幅率を図 12 に示す。この図で (a), (b), (c) はそれぞれ $n = 1, 2, 3$ の場合の線形増幅率 $\lambda(n, k)$ の実部を示し、(d), (e), (f) はそれらの虚部を示す。また、Robinson & Saffman の $Re \ll 1$ に対する結果を破線で示し、今回得られた結果を三角で示した。両者はほぼ一致しており、Robinson & Saffman の結果はずいぶん大きな Re においてもかなり正確な線形増幅率を与えている。ただ、 $n = 1, k = 0$ のとき Robinson & Saffman によれば $\lambda = -1$ であるが今回の結果では $\lambda = -1 - iRe' \times 0.5$ となる点が異なっている。この相違の理由は今のところ明かではない。 $n = 0$ に対しては Re によらず常に $\lambda = 0$ である。

4-2. バーガース渦層の安定性

この節では、バーガース渦層の線形安定性を調べる。(14) 式の u_y を $V(x)$ とおき、この速度場に z 方向に一様な微小攪乱 $\hat{u}(x, y, t)$, $\hat{v}(x, y, t)$ を加えると攪乱を含めた速度場、渦度場は、

$$u_x = -\alpha x + \hat{u}(x, y, t), \quad u_y = V(x) + \hat{v}(x, y, t), \quad u_z = \alpha z, \quad (35)$$

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = V'(x), \quad (36)$$

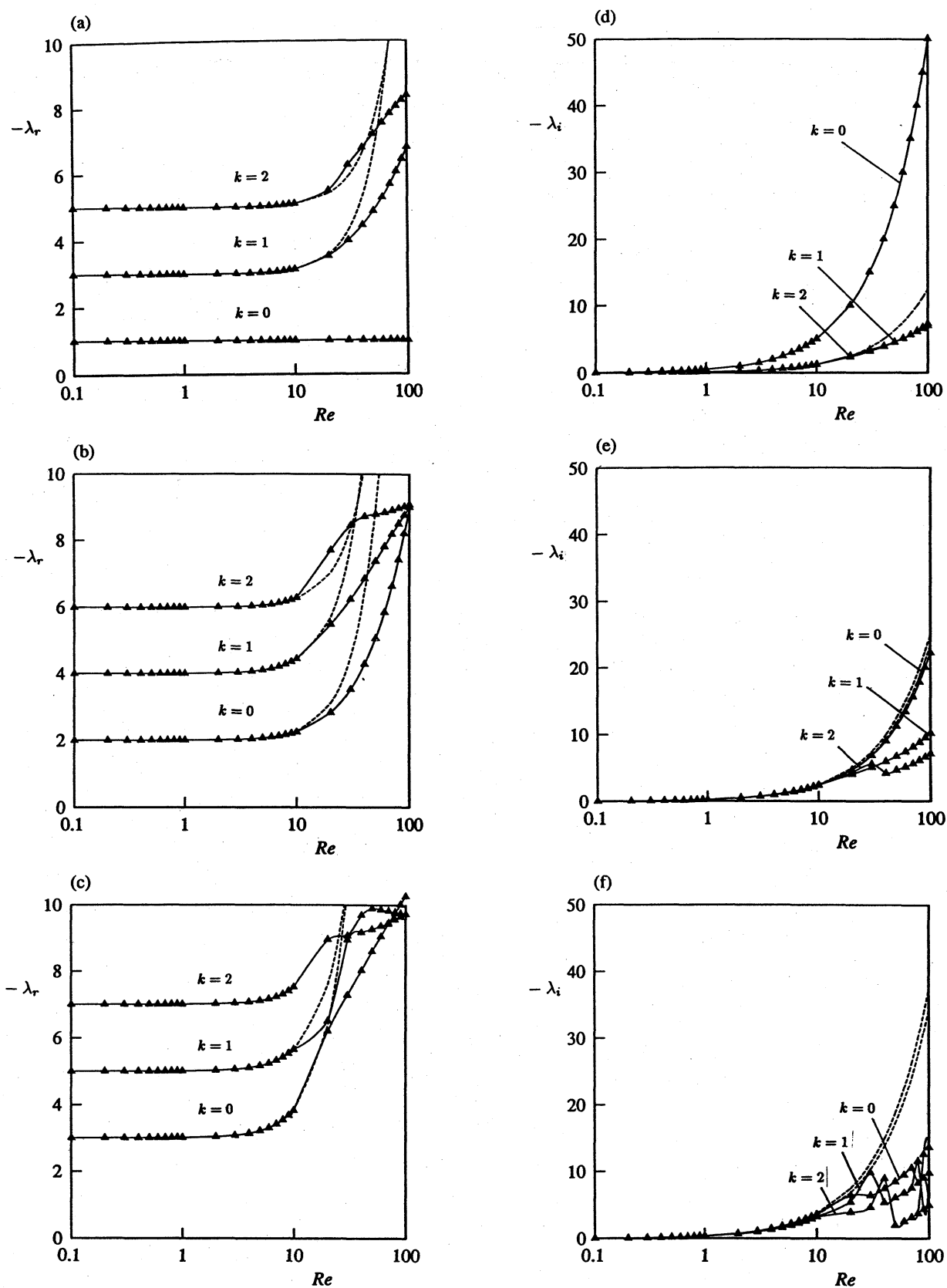


図 12. 軸対称バーガース渦におけるレイノルズ数と線形増幅率の関係。今回得られた結果を三角で示し、Robinson & Saffman の結果を破線で示す。(a) - (c) は $\lambda(n, k)$ の実部を (d) - (f) は $\lambda(n, k)$ の虚部を示す。(a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 3$, (d) $n = 1$, (e) $n = 2$, (f) $n = 3$.
 注) $n = 3$ での Robinson & Saffman の結果は $k = 1, 2$ のみ示されている。

となる。ここに、'は微分を表す。攪乱 $\hat{u}, \hat{v}$ は非圧縮流であるから、流れ関数 $\hat{\psi}$ を導入して

$$\hat{u} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y}, \quad \hat{v} = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \quad (37)$$

と表される。このとき、渦度の攪乱は、

$$\hat{\omega} = -\nabla^2 \hat{\psi} \quad (38)$$

となる。(6) 式を攪乱について線形化すると、次の攪乱方程式、

$$\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} - \alpha x \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x} + V(x) \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y} + V''(x) \hat{u} = \alpha \hat{\omega} + \nu \nabla^2 \hat{\omega} \quad (39)$$

が得られる。これは変数 y および t を陽には含まないから流れ関数を

$$\hat{\psi} = \phi(x) e^{ik(y-ct)} \quad (40)$$

とおく。ここに、 k は波数、 c は複素位相速度、 $\phi(x)$ は複素振幅である。これより線形増幅率は kc_i で表される。(37), (38), (40) 式を攪乱方程式 (39) に代入すると流れ関数の複素振幅 $\phi(x)$ についての Orr-Sommerfeld 方程式

$$[(V - c)L - V'']\phi = -\frac{i\nu}{k} \left[L^2 + \frac{\alpha}{\nu} \frac{d}{dx} L \right] \phi \quad (41)$$

が得られる。ここに、

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - k^2 \quad (42)$$

である。次に、攪乱方程式を規格化する。(41) 式に次の変換式、

$$x = \sqrt{\nu/\alpha} \tilde{x}, \quad k = \sqrt{\alpha/\nu} \tilde{k}, \quad c = \tilde{c} V_o, \quad (43)$$

$$V(x) = V_o \tilde{V}(\tilde{x}), \quad \phi(x) = \tilde{\phi}(\tilde{x}), \quad \tilde{L} = \frac{d^2}{d\tilde{x}^2} - \tilde{k}^2$$

を代入すると、

$$\left\{ \frac{d^2}{d\tilde{x}^2} + \tilde{x} \frac{d}{d\tilde{x}} + 1 - \tilde{k}^2 + i\tilde{k} Re c \right\} \tilde{L} \tilde{\phi} = i\tilde{k} Re (V \tilde{L} - V'') \tilde{\phi} \quad (44)$$

が得られる。ただし、 $\sim$ は省略した。ここに、

$$Re = \frac{V_o}{\sqrt{\alpha\nu}} \quad (45)$$

はレイノルズ数である。また、バーガース渦層の速度は、

$$V(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{x'^2}{2}\right) dx' \quad (46)$$

となり、 $x \rightarrow \pm\infty$ のとき、 $V(x) \rightarrow \mp 1$ となる。

さて、レイノルズ数 Re と波数 k を与えて、攪乱方程式 (44) を境界条件 $|x| \rightarrow \infty$ で $\phi(x) \rightarrow 0$ のもとで解けば複素位相速度 c が得られる。ここでは 2 つの極限 $Re \rightarrow \infty$ と $Re \rightarrow 0$ の場合についてその安定特性を調べる。

(i) $Re \rightarrow \infty$ (非粘性) の極限

この極限では、攪乱方程式 (44) は、

$$(V - c)(\phi'' - k^2\phi) - V''\phi = 0 \quad (47)$$

となる。この方程式は、岸場⁵⁾により数値的に解かれ、増幅曲線は図 13 のようになり、 $0 < k < 0.73$ で不安定、 $k = 0.34$ で最大増幅率 $kc_i = 0.15$ をとる。

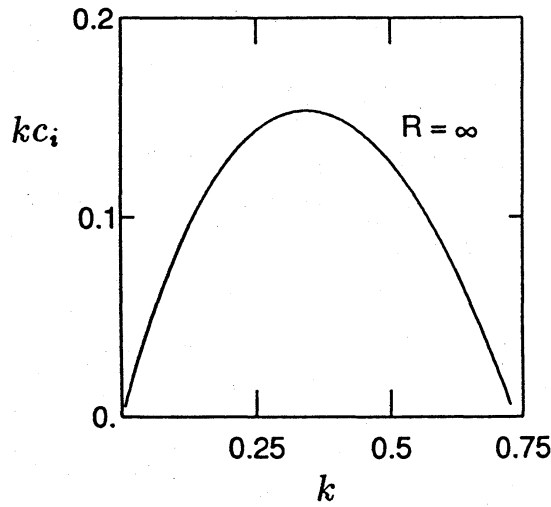


図 13. バーガス渦層の $Re \rightarrow \infty$ の極限での増幅曲線。

(ii) $Re \rightarrow 0$ の極限

この極限では、攪乱方程式 (44) は、

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx} + 1 - k^2 + ikRe c\right)\left(\frac{d^2}{dx^2} - k^2\right)\phi = 0 \quad (48)$$

となる。この方程式は変数 x について対称で、対称解

$$\begin{aligned} \phi_s(x) = & \frac{1}{k} \int_0^x M\left(\frac{1 - k^2 + ikRe c}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}x'^2\right) \sinh k(x - x') dx' \\ & - \frac{1}{k} \cosh kx \int_0^\infty M\left(\frac{1 - k^2 + ikRe c}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}x'^2\right) dx' \end{aligned} \quad (49)$$

と反対称解

$$\phi_a(x) = \frac{1}{k} \int_0^x x' M\left(\frac{2 - k^2 + ikRe c}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}x'^2\right) \sinh k(x - x') dx'$$

$$-\frac{1}{k} \sinh kx \int_0^x x' M\left(\frac{2-k^2+ikRe c}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}x'^2\right) dx' \quad (50)$$

が存在する。ここに、 M は合流型超幾何関数で、その引数の絶対値が大きくなる極限での漸近的振舞⁶⁾から次のことがわかる。

合流型超幾何関数は、パラメータが特別な値をとるとき、指数関数的に小さくなることに注意すると、 $|x| \rightarrow \infty$ で指数関数的に減衰する対称攪乱に対しては、

$$kc = -\frac{k^2 + 2n}{Re} i \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (51)$$

また、反対称攪乱に対しては

$$kc = -\frac{k^2 + 2n + 1}{Re} i \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (52)$$

となる。いずれも $kc_i < 0$ 、即ち、増幅率は負である。従って、渦層は $Re \rightarrow 0$ の極限では微小攪乱に対して安定である。

4-3. 一般の非軸対称なバーガース渦の安定性

定常解の渦度、 x 軸方向と y 軸方向の速度をそれぞれ ω_s, u_s, v_s とする。この定常解は

$$\nabla^2 \omega_s + \{(1+\epsilon)x - Re'u_s\} \frac{\partial \omega_s}{\partial x} + \{(1-\epsilon)y - Re'v_s\} \frac{\partial \omega_s}{\partial y} + 2\omega_s = 0 \quad (53)$$

を満たす。また、渦度と速度に与える攪乱をそれぞれ $\hat{\omega}, \hat{u}, \hat{v}$ とする。これから全体の渦度と速度は、

$$\begin{aligned} \omega(x, y, t) &= \omega_s + \hat{\omega}, \\ u(x, y, t) &= u_s + \hat{u}, \quad v(x, y, t) = v_s + \hat{v} \end{aligned} \quad (54)$$

となる。(54) 式を渦度方程式 (20) 式に代入し、(53) 式を考慮し、攪乱について線形化を行うと攪乱方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} &= \nabla^2 \omega_s + \{(1+\epsilon)x - Re'u_s\} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x} - Re'\hat{u} \frac{\partial \omega_s}{\partial x} \\ &\quad + \{(1-\epsilon)y - Re'v_s\} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y} - Re'\hat{v} \frac{\partial \omega_s}{\partial y} + 2\hat{\omega} \end{aligned} \quad (55)$$

が得られる。また、(5) 式より $\hat{\omega}$ は、

$$\hat{\omega} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \quad (56)$$

となり、(56) 式を (55) 式に代入すると $\hat{u}, \hat{v}$ に関する攪乱方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right) = \nabla^2 \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right) + \{(1+\epsilon)x - Re'u_s\} \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial x \partial y} \right)$$

$$-Re' \frac{\partial \omega_s}{\partial x} \hat{u} + \{(1 - \epsilon)x - Re' v_s\} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} \right) - Re' \frac{\partial \omega_s}{\partial y} \hat{v} + 2 \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right). \quad (57)$$

が得られる。(57) 式を (28) 式を用いて (x, y) 座標から (ξ, η) 座標に変換し、攪乱 $\hat{u}, \hat{v}$ を (27) 式のようにチェビシェフ多項式に展開する。 $\hat{u}, \hat{v}$ を、

$$\hat{u} \propto \exp(\lambda t), \quad \hat{v} \propto \exp(\lambda t) \quad (58)$$

とおき、コロケーション法を用いて問題を行列の固有値問題に帰着する。ただし、原点 $(0, 0)$ での攪乱は $\hat{u}, \hat{v} = 0$ とした。求められた λ の実部が、すべて負であればそのときの定常解は安定であり、一つでも正の値が存在すれば、定常解は不安定である。また、 λ の中で最も大きい値が 0 であるならば、定常解は中立安定である。計算により求められた λ を表 2 に示す。今回の計算はまだ予備的な計算であり、充分満足な結果が得られていない。軸対称なバーガス渦の安定性と比較するとここで得られた計算では $n = 2$ に対応する結果が得られていることになり、 $n = 1$ に対応する結果がまだ得られていない。

Re= 0	Re= 10	Re = 300
-2.01145	-2.01145	-2.01145
-2.06324	-2.06324	-2.06324
-2.16816	-2.16816	-2.16816
-2.30624	-2.30624	-2.30624
-3.32684	-3.32684	-3.32684
-3.51391	-3.51391	-3.51391
-3.93915	-3.93915	-3.93915
-4.59043	-4.59043	-4.59043
-4.60035	-4.60035	-4.60035
-4.74457	-4.74457	-4.74457
-4.75281	-4.75281	-4.75281

表 2. 今回得られた軸対称バーガス渦に対する線形増幅率.

Robinson & Saffman は、すべてのレイノルズ数と $\epsilon (0 \leq \epsilon < 1)$ で安定であると予測している。しかし、バーガス渦層は $Re \rightarrow \infty$ のとき攪乱に対して不安定である。Neu はバーガス渦層の漸近解析を行い、渦層 ($\epsilon = 1$) は $Re \gg 1$ では不安定であることを示した。渦層についての安定性は上に示したように不安定領域があることは確かだが、非軸対称のバーガス渦管に関してはいまだに十分な結果が得られていなかった。しかし、これまでの例から見ても、Robinson & Saffman が述べているようにあらゆる範囲で渦管が安定であるとは考えにくい。そこで、非軸対称渦の線形安定性はどのようになっているかこれまでの例から

考えてみると、 ϵ の値が大きく、またレイノルズ数が大きい範囲で不安定な領域が存在するのではないかと考えられ、その予想を図 14 に示す。これからもこの領域についての十分な研究が必要である。

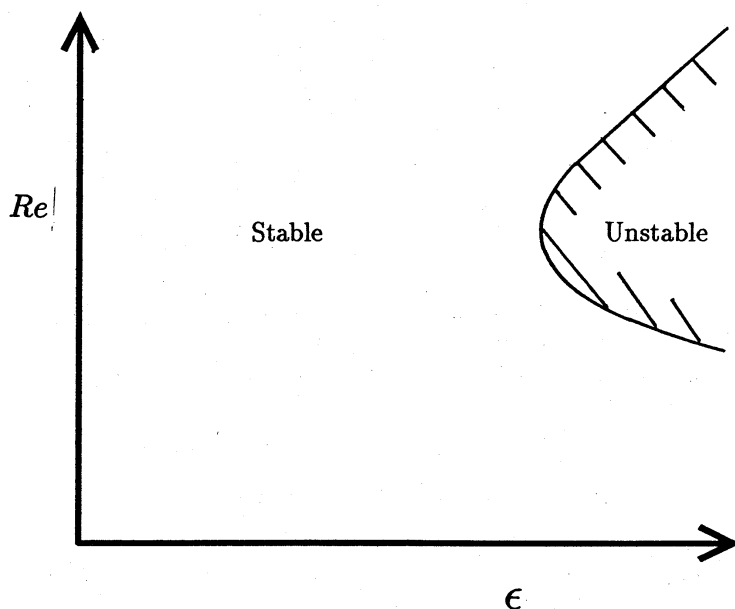


図 14. 非軸対称のバーガース渦の不安定領域（予想）。

参考文献

- 1) G. K. Batchelor 1967 *An Introduction to Fluid Dynamics* 266 - 273.
- 2) A. C. Robinson & P. G. Saffman 1984 Stability and Structure of Stretched Vortices, *Stud. in Appl. Math.* 163 - 181.
- 3) J. C. Neu 1984 The dynamics of stretched vortices, *J. Fluid. Mech.* 143, 253 -276.
- 4) K. H. Moffatt, S. Kida & K. Ohkitani 1993 Stretched vortices – the Sinews of Turbulence; High Reynolds Number Asymptotics, *J. Fluid Mech.* 投稿中.
- 5) 岸場清悟 1993 準備中
- 6) M. Abramowitz & I. A. Stegun 1972 *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, 503-515.