

単調な数列が (P, M) -u.d. mod 1

であるための必要条件

作陽短大 後藤 和雄 (Kazuo Goto)

岡山大学 鹿野 健 (Takeshi Kano)

$p(1) > 0$ を満たす非負実数列を $P = (p(n))_{n=1}^{\infty}$ とする.

$S(n)$ を $S(n) = p(1) + p(2) + \cdots + p(n)$ であって, $S(n) \rightarrow \infty$ と仮定する.

定義 1 数列 $(g(n))_{n=1}^{\infty}$ が $(M, p(n))$ -u.d. mod 1 であるとは, 任意の区間 $J \subset [0, 1]$ に対して, (cf. [3])

$$(1) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{S(N)} \sum_{n=1}^N p(n) C_J(\{g(n)\}) = |J|$$

が成立するときをいう. ここに, $C_J(x)$ は, J の特性関数である

(1) の条件は, 次のようにも書き換えられる:

(Weyl の判定条件)

任意の自然数 h に対して,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{S(N)} \sum_{n=1}^N p(n) e^{2\pi i h g(n)} = 0.$$

定義2 実数列 $(g(n))_n^\infty$ が (p, μ) -u.d. mod 1 であるとは、任意の区間 $J \subset [0, 1]$ に対して、

$$(2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{S(N)} \sum_{n=1}^N p(n) C_J(\{g(n)\}) = \mu(J),$$

が成立するときをいう。

(2) の条件は、また、次のように書きかえられる：

任意の自然数 h に対して、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{S(N)} \sum_{n=1}^N p(n) e^{2\pi i h g(n)} = \int_0^1 e^{2\pi i h x} d\mu([0, 2]).$$

特に、 $p(n) \equiv 1$ 、 $\mu([0, 2]) = 2$ のときは、普通の一様分布の定義そのものである。

1984年に、Niederreiter は [1] でいろいろな結果を得ている。その中の一つに、

“ μ を $[0, 1]$ 上の Borel 確率測度で、一点集中測度でないとする。このとき、非減少実数列 $g(n)$ が (p, μ) -u.d. mod 1 であるためには、

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) / \log S(n) = \infty,$$

が必要である”

というものを得ている。

他方, 1983年 Schatte は [2] ですでに, Niederreiter と独立に, ま, たく異なる方法を用いて,

“非減少数列 $g(n)$ が, 普通の意味で一様分布するためには,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) / \log n = \infty,$$

が必要である。”

を得ている。しかし, 一般化した (3) を彼は証明しているとは思われない。

ここでは, 彼の方法を用いても, (3) を証明することかできることを示す。この方法は, [1] よりむしろ直接的で, 簡単であると思われる。

結 果

定理 1 $(g(n))_{n=1}^{\infty}$ を非減少実数列とする。もし, $(g(n))_{n=1}^{\infty}$ が $(M, p(n))$ -u.d. mod 1 ならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{\log s(n)} = \infty$$

である。

定理 2 $(g(n))_{n=1}^{\infty}$ を非減少実数列とする。もし, $(g(n))_{n=1}^{\infty}$ が (p, μ) -u.d. mod 1 ならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{\log S(n)} = \infty,$$

である.

[定理1の証明] 定理1の仮定¹⁾, $(g(n))$ は, $(M, p(n))$ -u.d. mod 1¹⁾より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある自然数 N あり, $N \leq n$ である任意の n について, 次の不等式が成り立つ

$$(4) \quad \frac{1}{S(n)} \left| \sum_{j=1}^n p(j) e^{2\pi i g(j)} \right| < \varepsilon.$$

ここで, 次の条件を満足する非減少な実数列 $(\nu(k))_{k=0}^{\infty}$ を選ぶ: 任意に固定した N に対して,

$\nu(0) = 1$, $\nu(k)N$ が, すべての k で整数となり,

$$S(\nu(k)N)A(\varepsilon) \leq S(\nu(k+1)N) < S(\nu(k)N)A(\varepsilon)^2.$$

ここに, $A(\varepsilon) = (\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon) / (\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon)$ である.

このとき, 各 $\nu(k)$ に対して (4) より

$$\frac{1}{S(\nu(k)N)} \left| \sum_{j=1}^{\nu(k)N} p(j) e^{2\pi i g(j)} \right| < \varepsilon$$

が成立するから,

$$\begin{aligned} (5) \quad & \left| \sum_{j=\nu(k)N+1}^{\nu(k+1)N} p(j) e^{2\pi i (g(j) - g(\nu(k)N))} \right| \\ &= \left| \sum_{j=\nu(k)N+1}^{\nu(k+1)N} p(j) e^{2\pi i g(j)} \right| < \varepsilon (S(\nu(k+1)N) + S(\nu(k)N)). \end{aligned}$$

このことから、すべての k と N で、

$$g(v(k+1)N) - g(v(k)N) \geq 1/8$$

を証明するために、ある k と N で、

$$0 \leq g(v(k+1)N) - g(v(k)N) < 1/8$$

であると仮定する。

(5) の実部のみを考えて、

$$\left| \sum_{j=v(k)N+1}^{v(k+1)N} p(j) \cos(2\pi(g(j) - g(v(k)N))) \right|$$

$$< \varepsilon (S(v(k+1)N) + S(v(k)N)).$$

$g(m)$ の非減少性より、

$$0 \leq g(j) - g(v(k)N) \leq g(v(k+1)N) - g(v(k)N),$$

だから、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (S(v(k+1)N) - S(v(k)N)) < \varepsilon (S(v(k+1)N) + S(v(k)N))$$

これは、 $v(k)$ の定義に反する。したがって、

$$g(v(k+1)N) - g(v(k)N) \geq 1/8$$

がえられる。 $k=0, 1, 2, \dots, m-1$ とし、辺々加えて、

$$g(v(m)N) \geq m/8 + g(N).$$

ところで、

$$\log S(v(m)N) = \log \frac{S(v(m)N)}{S(v(m-1)N)} \cdot \frac{S(v(m-1)N)}{S(v(m-2)N)} \cdot \dots \cdot \frac{S(v(1)N)}{S(v(0)N)} S(N)$$

$$\leq \log A(\varepsilon)^{2^m} S(N).$$

したがって, $v(m)N \leq n < v(m+1)N$ を満足する m を考えることにより,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{\log S(n)} &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{g(v(m)N)}{\log S(v(m+1)N)} \\ &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{g(v(m)N)}{\log S(v(m)N) + 2 \log A(\varepsilon)} \\ &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m/8 + g(N)}{(2m+2) \log A(\varepsilon) + \log S(N)} = \frac{1}{16 \log A(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

ε は任意だから, $\varepsilon \rightarrow 0$ として

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{\log S(n)} = \infty$$

を得る.

[定理1の証明終り]

[定理2の証明] “確率変数 X が, 分布関数 $F(x)$ を持っているとき, 確率変数 $F(X)$ は一様分布をなす”.

このことより, $F(x)$ を

$$F(x) := \int_0^x d\mu = \mu([0, x]) \quad \text{on } x \in [0, 1]$$

とおき, $G(n)$ を

$$G(n) := [g(n)] + F(\{g(n)\})$$

とよくと, $g(n)$ は $(M, p(n))$ -u.d. mod 1 である.

したがって,

$$\frac{g(n)}{\log S(n)} = \frac{[g(n)] + K(\{g(n)\})}{\log S(n)} \leq \frac{g(n) + 1}{\log S(n)}$$

であり, $S(n) \rightarrow \infty$ であるから, 定理 1 より

$$\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{\log S(n)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{\log S(n)}$$

が, えられる.

[定理 2 の証明 終り]

文 献

[1] H.Niederreiter : Distribution mod 1 of monotone sequences,
Indag.Math. Vol.46, No.3, 315-327(1984).

[2] P.Schatte : On H_{∞} -Summability and the Uniform Distribution
of Sequences, Math.Nachr.113, 237-243(1983).

[3] M.Tsuji : On the uniform distribution of numbers mod 1,
J.Math.Soc. Japan 4, 313-322(1952).