

準斉次半線型偏微分方程式の解の
なめらかさの伝播について.

東大 教養 桜井 力 (Tsutomu Sakurai)

非線型方程式に対する超局所解析といえる最初の仕事は
Rauch [10] によってなされた. Rauch は種に関する micro-
local 評価を用い, 半線型波動方程式の古典解に対して特異
性の伝播定理を証明した. その後, Bony [1] はもっと一般の
非線型方程式を扱い, 非特異点及び実の単純特異点における
解のなめらかさについて考察した. [1] において, Bony の
導入した paradifferential operator は関数の Littlewood-
Paley 分解に基礎をおくものであり, 非線型超局所解析にお
いて有効に用いられている. Bony の結果はさらに Mayer
[8], [9] により改良された. また, Littlewood-Paley の理
論は Coifman-Meyer [3] や Bourdaud [2] において擬
微分作用素の L^p 有界性の証明にも応用されている.

さて, ここで論ずる微分方程式はその Symbol が座標変数
ごとに異なる重みの下で斉次性を持つもの (準斉次) である.

このような斉次性を持つ擬微分作用素は Hörmander [4] 熊, 郷 (cf. [6]) らによって. 以前から知られていたが, 超局所解析を展開したのは Lasenby [7] が最初と思われる.

最近, 山崎 [12], [13], [14], [15] は paradifferential operator の理論を準斉次作用素に拡張し, その有界性をさまざまな空間において考察している. さらに彼は, その結果を非線型方程式の超局所解析に応用し, 非特異性における正則性定理を証明している.

ここで, 我々は準斉次 paradifferential operator の理論を, 実の単純特異点における解のなめらかさを調べることに応用する. そして, 準斉次主 Symbol を持つ半線型方程式に対して, 解のなめらかさか, 陪特異点によって伝播することも示す.

さて, 結果を述べるにあたり, いくつかの定義を与えておこう.

* Weight

$M = (\mu_1, \dots, \mu_n)$; $\inf \{ \mu_j \} = 1$ とする. 実数と成分とする multi-index α . Symbol の準斉次性を表わす.

$$t^M \zeta \equiv (t^{\mu_1} \zeta_1, \dots, t^{\mu_n} \zeta_n) \quad \text{for } \zeta \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

と定める. $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_{>0})$ で定義された関数 g が m 次準斉次
とは. 任意の $t > 0$ に対して.

$$g(x, t^m z) = t^m g(x, z),$$

を満たすこととする. また $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_{>0})$ は. 任意の
 $t > 0$ に対して. $(x, z) \in \Gamma$ ならば $(x, t^m z) \in \Gamma$ となる
とき. M -cone と呼ばれる.

* weight function

$[z]_M$: $|z|=1$ において $[z]_M = 1$ とする 1 次準斉次の関
数, 但し $[0]_M = 0$ と定める.

注. $[z]_M$ は次の性質を持つ.

i) $[z]_M \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0}) \cap C(\mathbb{R}_n)$

ii) 任意の $\alpha \in \mathbb{N}^n$ に対し C_α が存在し $[z]_M \geq 1$ において

$$|\partial_z^\alpha [z]_M| \leq C_\alpha [z]_M^{1-\langle \alpha, M \rangle}$$

を満たす. 但し. $\langle \alpha, M \rangle = \sum_{j=0}^n \alpha_j \mu_j$ である.

iii) $[z + \eta]_M \leq [z]_M + [\eta]_M$

iv) $(1 + [z]_M)^{-s} \in L^2(\mathbb{R}_n)$ となるのは $s > \frac{|M|}{2}$ のとき. また
その時に限る. 但し. $|M| = \sum_{j=0}^n \mu_j$.

* 擬微分作用素

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ の open set とする. $m \in \mathbb{R}$, $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ に対
し, Symbol class $S_{\rho, \delta}^{m, m}(\Omega)$ を次のように定める:

定義 1 $p(x, z) \in S_{p, \delta}^{M, m}(\Omega)$

$\Leftrightarrow$ i) $p(x, z) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$,

ii) $\forall \alpha, \forall \beta \in \mathbb{N}^n, \forall K \ll \Omega, \exists C_{\alpha, \beta, K}$ s.t.

$$|\partial_z^\alpha \partial_x^\beta p(x, z)| \leq C_{\alpha, \beta, K} (1 + |z|_M)^{m - \rho(\alpha, M) + \delta(\beta, M)}.$$

$\Omega = \mathbb{R}^n$ 上の定義において ii) の評価を $\mathbb{R}^n$ で一樣に
 与えられるような関数の集合は $S_{p, \delta}^{M, m}$ と記す。

さて $p \in S_{p, \delta}^{M, m}(\Omega)$, $u \in C_0^\infty(\Omega)$ に対し

$$p(x, D) u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, z \rangle} p(x, z) \hat{u}(z) dz.$$

と定義し, M -擬微分作用素と呼ぶ. ことに $\hat{u}$ は u
 の Fourier 変換である.

定義 2 $p \in S_{1, \delta}^{M, m}$ の classical symbol であるとは,
 m_j 次準齊次関数 p_{m_j} による次の漸近展開を持つ
 ことである:

$$p(x, z) \sim p_{m_1}(x, z) + p_{m_2}(x, z) + p_{m_3}(x, z) + \dots$$

但し, $m-1 \geq m_1 > m_2 > \dots \rightarrow -\infty$, 2 のとき p_{m_1} を
 主 Symbol と呼ぶ.

定義 3 実数値関数 $p(x) \in C^0(\Omega \times (\mathbb{R} \setminus 0))$ に対し.

$$i) \mathcal{H}_p^M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\{M_j=1\}} (\partial_{z_j} p \partial_{x_j} - \partial_{x_j} p \partial_{z_j}),$$

ii) $\mathcal{H}_p^M$ の積分曲線を 積分恒帯 と呼ぶ.

* Weighted Sobolev 空間.

解のなめらかさを測るため Sobolev 空間 H_M^s を次のように定める

定義 4. $u \in H_M^s$

$$\Leftrightarrow \|u\|_{H_M^s} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int (1 + |z|_M)^{2s} |\hat{u}(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

超局所化は M -cone を用いて行う.

定義 5. $u \in H_M^s(\dot{x}, \dot{z})$, $(\dot{x}, \dot{z}) \in \Omega \times (\mathbb{R} \setminus 0)$

$$\Leftrightarrow \exists \chi \in C_0^\infty(\Omega), \exists a(x, z) \in S_{1,0}^{M,0}, \text{ s.t.}$$

$$\chi(\dot{x}) \neq 0, \quad a(\dot{x}, \dot{z}) \neq 0,$$

$$a(x, D) \chi u \in H_M^s.$$

以上の準備のもとで主定理を示す.

$P = p(x, D)$ は m -次の classical M -擬微分作用素

で, p_m は実数値 かつ $\mathcal{H}_{p_m}^M \neq 0$ on $P_m^{-1}(0)$ と

が成り立つとする. 非線型項 $F(u, D^a u) = F(x; u, \dots, D^a u, \dots)$

は $\langle \alpha, M \rangle \leq m-1$ なる微分 $D^\alpha u$ のみを含む. $x \mapsto u \in C^\infty$ かつ, $u, D^\alpha u$ については holomorphic な関数であるとする.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ の open set とし, 次の半線型方程式を考える

$$(A) \quad Pu + F(u, D^\alpha u) = 0, \quad \text{in } \Omega.$$

我々の主定理は次のものである.

定理 A $s > \frac{1}{2}|M| + (m-1)$, $\sigma \leq s - \frac{1}{2}|M| - (m-1)$ とする.

(A) の解 u が Ω で局所的に H_M^s に属し, さらに $(\bar{x}, \bar{z}) \in P_m^{-1}(0)$ において $H_M^{s+\sigma}$ に属するならば, u は $(\bar{x}, \bar{z})$ を通る P_m の陪特性帯によって $H_M^{s+\sigma}$ に属する.

もし F が, 低階の微分 $D^\alpha u$ しか含まないならば,

定理 A の結果は次のように改善される.

定理 A' 上に於いて F は $\langle \alpha, M \rangle \leq m-j$ なる微分 $D^\alpha u$ のみ依存するとせよ; 但し j は実数で $j > 1$ を満たす.

この時, $s > \frac{1}{2}|M| + (m-j)$, $\sigma \leq s - \frac{1}{2}|M| - (m-j) + (j-1)$

に対して, 定理 A の主張がそのままで成り立つ.

同様に我々は具体的な方程式として半線型 Schrödinger 方程式をとり上げて考察した,

$-i\partial_t - \Delta_x$ は $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ における Schrödinger 作用素とする. ここで $\Delta_x = \sum_{j=1}^n \partial^2 / \partial x_j^2$ である. この Symbol $p = \tau + |\xi|^2$ は実数値で, $M = (2, 1, \dots, 1)$ ととることにより $S_{1,0}^{M,2}$ に属する. この時, $\mathcal{H}_p^M = 2 \sum_{j=1}^n \xi_j \partial x_j$ となるので, Schrödinger 作用素の陪特性帯は $t = \text{constant}$ 内の直線となることに注意しよう. 非線型項として以下の f のを考えよ: $F(u, \bar{u}) = F(t, x; u, \bar{u}) \in C^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{C}^2)$, $u, \bar{u}$ に関する F は holomorphic. $\Omega \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ の open set として次の方程式を考える.

$$(B) \quad -i\partial_t u - \Delta_x u = F(u, \bar{u}), \quad u \in \Omega.$$

$|M| = n+2$ となることに注意し, 次を得る.

定理 B $s > \frac{1}{2}(n+2)$, $\sigma \leq s - \frac{1}{2}(n+2)$ とする.

(B) の解 u が Ω で局所的に $\mathcal{H}_M^s$ に属し, さらに $(\check{t}, \check{x}, \check{z}, \check{\bar{z}}) \in p^{-1}(0)$ において $\mathcal{H}_M^{s+\sigma+1}$ に属するならば u は $(\check{t}, \check{x}, \check{z}, \check{\bar{z}})$ を通る陪特性帯に属して $\mathcal{H}_M^{s+\sigma+1}$ に属する.

§1. 準齊次擬微分作用素.

まず, M -擬微分作用素の性質についてまとめよう.

命題 1-1 $P \in \mathcal{O}_p \mathcal{S}_{\rho, \delta}^{M, m}$; $m \in \mathbb{R}$, $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$, $\delta < 1$.

$P: H_M^s \longrightarrow H_M^{s-m}$ は連続

Classical は M -擬微分作用素の結合は漸近展開を用いて, 斉次の場合と同様に計算される. 特に交換子については次の成り立つ.

命題 1-2 $p \in \mathcal{S}_{1,0}^{M,m}$ $p' \in \mathcal{S}_{1,0}^{M,m'}$ は classical symbol.

また $p_m, p_{m'}$ はその主 Symbol とする. すると

$$[p(x, D), p'(x, D)] + i \{p_m, p_{m'}\}_M(x, D) \in \mathcal{O}_p \mathcal{S}_{1,0}^{M, m+m'}$$

但し, $\{p_m, p_{m'}\}_M = \mathcal{H}_{p_m}^M(p_{m'})$,

$$M = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \nu = \inf \{ \{ \mu_j - 1 \} \mid \mu_j > 1 \} \cup \{ \nu \}$$

命題 1-3 P は m -次 classical M -擬微分作用素とする.

すると,

$$p(x, D)u \in H_M^s(x, \xi) \quad \text{かつ} \quad p_m(x, \xi) \neq 0$$

$$\Rightarrow u \in \mathcal{H}_M^{s+m}(\Omega, \frac{\rho}{3})$$

エネルギー評価において重要な役割を果たす. Sharp Garding 不等式は準齊次の場合へ拡張できる.

命題 1-4 $p \in \mathcal{S}_{1,0}^{M,m}$ は classical とする. $\varepsilon > 0$.

$$\operatorname{Re} p_m(x, \xi) \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists C \\ \operatorname{Re}(p(x, D)u, u) \geq -C \|u\|_{M, (m-1)/2}^2, \quad \forall u \in C_0^\infty \end{cases}$$

命題 1-2, 1-4 を用いるのは Hörmander [5]. Proposition 3.5.1 と同様にして. 次で証明する.

命題 1-5 $p \in \mathcal{S}_{1,0}^{M,m}(\Omega)$ classical symbol とする.

$I \ni t \mapsto \gamma(t) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$ と $\operatorname{Re} p_m$ に対する零陪
特性帯とするとする. ($I = [t_1, t_2]$) $\gamma(I)$ の近傍で
 $\operatorname{Im} p_m \geq 0$ が成立していると仮定する. この時.

$$p(x, D)u \in \mathcal{H}_M^s(\gamma(I)) \quad \text{かつ} \quad u \in \mathcal{H}_M^{s+m-1}(\gamma(t_2))$$

$$\Rightarrow u \in \mathcal{H}_M^{s+m-1}(\gamma(I))$$

§2. para product, paradifferential operator

ここでは, Bony (斉次な場合) Yamazaki (準斉次) により導入された para product 及び paradifferential operator の定義を与え. 主定理の証明で必要となる性質を Yamazaki [12] ~ [15] より引用する.

$$\varphi \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+}) \quad \begin{cases} \varphi(t) = 1 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi(t) = 0 & t \geq 1 \end{cases}$$

と一様固定し.

$$\varphi_k^M(\xi) = \varphi(|\xi|_M / 2^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\phi_k^M(\xi) = \varphi(|\xi|_M / 2^k) - \varphi(|\xi|_M / 2^{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

と置く. $k=1, 2, \dots$ $f \in \mathcal{S}'$ に対し.

$$S_k(f) = \varphi_k^M(D) f$$

$$\Delta_k(f) = \phi_k^M(D) f$$

と定義する. すると,

$$f = S_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k(f)$$

となる. $u, v \in \mathcal{S}'$ f の Littlewood Paley 分解と呼ぶ. この分解を用いて para product $\pi(u, v)$ を次のように定義された.

定義 2-1. $u, v \in \mathcal{S}'$ とする.

$$\pi(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} S_{k-0}(u) \Delta_k(v).$$

注. もし $u \in L^\infty$ なら. 容易にわかるように.

$$\pi(u, \cdot) : H_M^s \rightarrow H_M^s$$

は任意の s に対して連続となる.

応用上. para product の重要な性質は. 次の結果がある.

命題 2-2 (Yamazaki) $F = F(x; u_1, \dots, u_N) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^N)$, さらに $u_1, \dots, u_N$ により正則とする.

また. $u_1(x), \dots, u_N(x) \in H_M^s$, $s > \frac{|M|}{2}$.

このとき.

$$F(x; u_1(x), \dots, u_N(x)) \in \mathcal{H}_{M, \text{loc}}^s(\mathbb{R}^n)$$

さらに.

$$F(x; u_1(x), \dots, u_N(x))$$

$$= \sum_{j=1}^N \pi(\partial_{u_j} F(x; u_1(x), \dots, u_N(x)), u_j(x)) + G(x).$$

とある. 但し 1. $G \in \mathcal{H}_{M, \text{loc}}^{2s - \frac{|M|}{2}}(\mathbb{R}^n)$.

次に paradifferential operator の Symbol class を
山崎 [14] の形式で定義する。

定義 2-3. $r \geq 0$ とする。

$$(i) \quad l = l(x, \xi) \in \Sigma_r^{M, m}$$

$$\iff \forall \alpha \quad \exists C_\alpha \quad s.t.$$

$$\| \mathcal{D}_\xi^\alpha l(x, \xi) \|_{H_M^{|\alpha|+r}(dx)} \leq C_\alpha (1 + |\xi|_M)^{m - \langle \alpha, M \rangle}$$

$$(ii) \quad l \in \Sigma_r^{M, m} \quad \text{re} \exists \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \quad \pi(l(x, D), u) \in \mathcal{I}.$$

$$\pi(l(x, D), u)(x) = (2\pi)^{-2n} \iint e^{i\langle x, \eta + \xi \rangle} \theta(\eta, \xi) \hat{l}(\eta, \xi) \hat{u}(\xi) d\eta d\xi.$$

と定義する。 $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ 。

$$\hat{l}(\eta, \xi) = \int e^{-i\langle x, \eta \rangle} l(x, \xi) dx$$

$$\theta(\eta, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{k-6}^M(\eta) \phi_k^M(\xi).$$

$\pi(l(x, D), \cdot)$ の連続性は山崎 [14] の Lemma 2.1 によって
知られる。我々の必要とするのは、次の通り。

命題 2-4. $l \in \Sigma_r^{M, m}$ とする。

$$(i) \quad r > 0 \quad \Rightarrow \quad \pi(l(x, D), \cdot) : H_M^s \rightarrow H_M^{s-m} \quad \text{は連続.}$$

(i) $r=0 \Rightarrow \pi(l(x, D), \cdot) : H_M^{s+\varepsilon} \rightarrow H_M^{s-m}$ 連続
for $\forall \varepsilon > 0$

すな. $l(x, z) \in \Sigma_r^{M, m}$, $l'(x, z) \in \Sigma_r^{M, m'}$ $\left. \begin{array}{l} (r > 0) \\ r \neq \pm 1 \end{array} \right\}$

$$cm(x, z) = \sum_{\langle \alpha, M \rangle \leq 1} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_z^\alpha l(x, z) \partial_x^\alpha l'(x, z)$$

と置く.

命題 2-5 (Theorem A in Yamazaki [15])

$$G(u) = \pi(m(x, D), u) - \pi(l(x, D), \pi(l'(x, D), u))$$

と定めると. 任意の S に対して.

$$G : H_M^s \rightarrow H_M^{s+r} \text{ は連続.}$$

定義 2-6 $L \in \mathcal{O}_p \Sigma_r^{M, m}$

$$\iff \exists l(x, z) \in \Sigma_r^{M, m} \text{ , s.t.}$$

$$L = \pi(l(x, D), \cdot) + R.$$

ただし. R は r regularizing かつ R は

$$R : H_M^s \longrightarrow H_M^{s+r} \text{ 連続 for } \forall s \in \mathbb{R}.$$

注. 容易にわかるように $p \in \Sigma_r^{M, m}$ ならば $p(x, D) =$

$\mathcal{L} \in \mathcal{P}(x, D), \dots) + \text{smoothing} \cdot \phi \tilde{\mathcal{L}} \in$

$$\mathcal{P}(x, D) \in \mathcal{O}_p \Sigma_r^{M, m}, \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

2-あり.

系 2-7. $\mathcal{L} \in \mathcal{O}_p \Sigma_r^{M, m}, \mathcal{L}' \in \mathcal{O}_p \Sigma_r^{M, m} \quad (r > 0)$

$$\Rightarrow [\mathcal{L}, \mathcal{L}'] \in \mathcal{O}_p \Sigma_{r-1}^{M, m+m'-1} \quad \text{if } r \geq 1$$

or

$[\mathcal{L}, \mathcal{L}']$ is $r-m-m'$ regularizing.

§ 3. 定理の証明.

定理 A の証明の概略

$$\mathcal{P}u + F(u, D^\alpha u) = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

$$u \in H_{M, \text{loc}}^S(\Omega) \quad (S > (m-1) + \frac{|M|}{2})$$

定理の主張は局所的であるから、一般性を失うことなく、

$$\mathcal{P} \in \mathcal{O}_p \Sigma_{1,0}^{M, m}, \quad \text{supp } F(x; u(x), \dots, D^\alpha u(x), \dots) \subset\subset \Omega.$$

$$u \in H_M^S \cap \mathcal{E}'(\Omega) \text{ と仮定してよい.}$$

$$r = S - (m-1) - |M|/2 \text{ とおけば}$$

$$(*) \quad F'_\alpha(u, D^\alpha u) \equiv \frac{\partial F}{\partial (D^\alpha u)}(x; u(x), \dots, D^\alpha u, \dots) \in H_M^{r+\frac{|M|}{2}}$$

また、命題 2-2 より.

$$F(u, \partial^\alpha u) = \sum_{\alpha} \pi(F'_\alpha(u, \partial^\alpha u), \partial^\alpha u) + g.,$$

例 1. $g \in H_M^{2(s-(m-1)) - \frac{1}{2}|M|} (= H_M^{s-(m-1)+r}).$

ゆえに. $l = F'_\alpha(u(x), \partial^\alpha u(x)) \cdot \xi^\alpha$ とおくと.

$l(x, \xi) \in \sum_{r=0}^{M, m-1} \xi^r$ とおくと $\xi=0$ の場合.

すなわち.

$$v(x) = (1 + [D]_M)^{m-1} u(x),$$

$$P_1 = P \cdot (1 + [D]_M)^{1-m},$$

$$L = \pi(l, \cdot) (1 + [D]_M)^{1-m},$$

とおくと.

$$(P_1 + L)v = g \in H_M^{s-(m-1)+r}$$

$$v \in H_M^{s-(m-1)+r}(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{\xi}) \cap H_M^{s-(m-1)}.$$

定理 A は、次の命題より直ちに従う.

命題 3-1 $P \in Op S_{1,0}^{M,1}$ classical, $L \in Op \Sigma_r^{M,0}$
 $r > 0$, また $\rho > 0$ とする. $P_1 \in \Sigma_{\text{symbol}}$ とする.

$I \ni t \rightarrow \gamma(t)$ は $\text{Re } P_1$ の零陪特性帯 ($I = [t_1, t_2]$)
 の近傍で. $\text{Im } P_1 \geq 0$ とすると仮定する.

このとき.

$$(\Phi + \mathcal{L})v \in H_M^p(\mathcal{X}(I))$$

$$\text{かつ } v \in H_M^p(\mathcal{X}(I_2)) \cap H_M^{p-r}$$

$$\Rightarrow v \in H_M^p(\mathcal{X}(I)).$$

この命題は. Hörmander [5] Prop 3.5.1 の方法
にしたがい. 超局所. エネルギー評価を導くことによ
り. 証明される.

定理 A' と B については. 次の補題を用いる.

補題 3-2. $F(x; u_1, \dots, u_N) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^N)$, $u_1, \dots, u_N$ は
正則. また. $S > \frac{|M|}{2}$, $\delta \leq S - \frac{|M|}{2}$ に対し. $u \in H_{M,loc}^S(\Omega)$
 $\cap H_M^{S+\delta}(\mathring{\Omega}, \mathring{\mathcal{G}})$ とする. その時.

$$F(x; u(x), \dots, u_N(x)) \in H_{M,loc}^S(\Omega) \cap H_M^{S+\delta}(\mathring{\Omega}, \mathring{\mathcal{G}})$$

とされる.

定理 A' は. 命題 1-5 を用いて. 単純な bootstrap
argument により. 証明される. 定理 B については
さらに. Schrödinger 作用素の零位特性帯の
antipodal が. 非特異点よりなることに注意される.

References

- [1] Bony, J. M., Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4^e série, 14 (1981), 209-246.
- [2] Bourdaud, G., L^p -estimates for certain non-regular pseudo-differential operators, Comm. Partial Diff. Eq., 7(1982), 1023-1033.
- [3] Coifman, R. R. and Mayer, Y., Au delà des opérateurs pseudo-différentiels, Astérisque 57, Soc. Math. France, Paris, 1978.
- [4] Hörmander, L., Pseudo-differential operators and hypo-elliptic equation, Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math., 10(1966), Singular Intagral Operators, 138-183.
- [5] ———, On the existence and the regularity of solution of linear pseudo-differential equations, L'Enseignement Math., 17(1971), 99-163.
- [6] Kumano-go, H., Pseudo-differential operators, MIT press, Cambridge-Massachusetts-London, England, 1984.
- [7] Lascar, R., Propagation des singularités des solutions d'équations pseudo-différentielles quasi homogènes, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 27(1977), 79-123.
- [8] Mayer, Y., Remarque sur un théorème de J. M. Bony, Suplemento ai rendiconti del Circolo matematico di Palermo, atti del Seminario di Analisi Armonica Pisa, 8-17 aprile 1980, serieII, numero 1(1981), 1-20.

- [9] ———, Nouvelles estimations pour les solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires, Exposé VI, Séminaire Goulaouic-Schwartz '81-'82.
- [10] Rauch, J. Singularities of solutions of semilinear wave equations, J. Math. Pure Appl., 58(1979), 299-308.
- [11] Sakurai, T., Propagation of singularities of solutions to semilinear Schrödinger equations, Submitted to Proc. Japan Acad.
- [12] Yamazaki, M., Continuite des operateurs pseudo-différentielles et para-différentielles dans les espaces de Besov et les espaces de Triebel-Lizorkin non isotropes, C. R. Acad. Sc. Paris, 296(1983), série I, 533-536.
- [13] ———, Régularité microlocale quasi-homogène des solutions d'équations aux dérivées partielles non lineaires, C. R. Acad. Sc. Paris, 298(1984), série I, 225-228.
- [14] ———, A quasi-homogeneous version of para-differential operators, I. Boundedness on spaces of Besov type, preprint.
- [15] ———, ibid, II. A symbolic calculus, preprint.