

34. ランダムイジングスピン系における緩和現象

慶大理工、東大理^A、東工大理^B 高野宏、中西秀、宮下精二^A、西森秀稔^B

3次元 $\pm J$ ランダムイジング模型において、スピングラス転移温度 T_g とランダムでない系の相転移温度 T_c の温度範囲でひとつのスピン自己相関関数 $\langle S_i(t)S_i(0) \rangle$ が“引き伸ばされた指数関数”的に緩和することが報告されている。一方、ランダムでないフェロ・イジング模型においても、 T_c 以下の温度で $\langle S_i(t)S_i(0) \rangle$ が“引き伸ばされた指数関数”的緩和を示す。また、ランダム系においては、ランダムでない系の相転移温度 T_c 以下の温度で系の動的性質に異常性があらわれるという議論もある。ここでは、2次元 $\pm J$ ランダムイジング模型において、3次元でみられたようなスピン緩和が T_c 以下の温度 (T_g は0と考えられている) でみられるかどうかを、モンテカルロ法を用いて調べ、ランダムでない系における“引き伸ばされた指数関数”的緩和との関係について議論する。

1. $T < T_c$ でのスピン緩和に関するこれまでの結果

$\pm J$ イジング模型のハミルトニアンは $\beta = 1/k_B T$ の因子を含めて

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} K_{ij} S_i S_j \quad (1)$$

で与えられる。ここで $S_i = \pm 1$ は格子点 i にあるイジングスピンを表し $\sum_{\langle ij \rangle}$ は最隣接格子点の組に関する和をあらわす。 K_{ij} はそれぞれ独立な確率変数であり、その確率分布は

$$P(K_{ij}) = p\delta(K_{ij} - K) + (1-p)\delta(K_{ij} + K) \quad (2)$$

で与えられる。以下では、確率変数の組 $\{K_{ij}\}$ の一つのサンプルに対してハミルトニアン(1)で決まる熱平衡分布に関する平均を $\langle \dots \rangle$ で、 $\{K_{ij}\}$ のいろいろな配置に関する平均を $\overline{\dots}$ で表すことにする。

Ogielskiは3次元 $\pm J$ 模型に対して $p=0.5$ の場合にモンテカルロシミュレーションを行い次のような結果を得た。¹⁾ $K=1/T$ とするとき、ひとつのスピン自己相関関数 $q(t) \equiv \langle S_i(t)S_i(0) \rangle$ は、 $T_c < T$ では $q(t) \sim Ct^{-x} \exp(-\omega t)$ 、 $T_g < T < T_c$ では $q(t) \sim Ct^{-x} \exp(-\omega t^\beta)$ 、 $T < T_g$ では $q(t) \sim Ct^{-x}$ のように振舞う。ここで、 $T_c \sim 4.51$ はランダムでない系 ($p=1$) の相転移温度で、 $T_g \sim 1.175$ はこの系 ($p=0.5$) のスピングラス転移温度である。 x は温度 T が小さくなるにつれ0.5位から0付近まで単調に減少する(文献1)のFIG.12)。 β は T が T_c から T_g まで小さくなるにつれ1から0.4位まで減少する(文献1)のFIG.11)。²⁾ Ogielskiは $T_g < T < T_c$ において $\ln[-t/\ln q(t)]$ 対 $\ln t$ のプロットを行い、それが直線的に振舞っていること、その傾きが温度とともに変化していることを示している(文献1)のFIG.10)。

Randeria, Sethna, Palmer は結合定数 K_{ij} がガウス分布している場合、 $q(t)$ の長時間の振舞いに対して

$$q(t) \geq A \exp[-C(\ln t)^{d/(d-1)}] \quad (3)$$

という下限があるという議論をしている。²⁾ ここで d は空間の次元である。彼らの議論をまとめると次のようになる。系がフラストレートしていない(“フェロ的”)クラスターに分けられ、

そのクラスター内でのスピン間の結合定数は $T < T_c$ に相当するくらい強いとする。さらに、系の長時間での振舞いが、これらのクラスターが独立に反転する運動で決まるとする。ひとつのスピンが大きさ（直径） $L \sim L+dL$ のクラスターに含まれる確率を $P(L)dL$ 、大きさ L のクラスター内での磁化の大きさを $m(L)$ 、大きさ L のクラスター全体が反転するのに要する時間を $\tau(L)$ とする。クラスター全体の反転以外のモードからの寄与が正であるとすると、

$$q(t) \geq \int dL P(L) m(L)^2 \exp[-t/\tau(L)] \quad (4)$$

が成り立つ。大きさ L のクラスター内には L^d 程度の個数のボンド（スピン間の結合）があるので、 $P(L)$ の L に関する最も強い依存性は

$$P(L) \sim \exp[-\alpha L^d] \quad (5)$$

で与えられると考えられる。一方、大きさ L のクラスター全体が反転するためには、 L^{d-1} 程度の大きさの界面が入って半分だけが反転した状態を経由しなければならない。この状態は界面の分だけ自由エネルギーが高くなっているため、 $\tau(L)$ は

$$\tau(L) \sim \exp[\sigma L^{d-1}] \quad (6)$$

と振舞う。 $m(L)$ は L が十分大きければ L 依存性は弱く、定数 m と考えてよい。(5)、(6)式を(4)式に代入し、 L に関して鞍点評価を行うと、

$$\begin{aligned} q(t) &\geq \int dL P(L) m^2 \exp[-t/\tau(L)] \\ &\sim \int dL \exp[-\alpha L^d - t \exp(-\sigma L^{d-1})] \\ &\sim A \exp[-C(\ln t/\sigma)^{d/(d-1)}] \end{aligned} \quad (7)$$

を得る。この $q(t)$ の振舞いは、いくらでも大きいクラスターが有限の確率で存在するために生じるもので、Griffith 異常性のような効果が系の動的性質に表れたものと考えられる。 $\pm J$ 模型でも同様の議論が可能であるとすると、 $q(t)$ のこのような振舞いは $T < T_c$ で現れることになる。

Takano, Nakanishi, Miyashita はランダムでないフェロイジング系 ($p=1$) の $T < T_c$ において $\langle S_i(t) S_i(0) \rangle_c \equiv \langle S_i(t) S_i(0) \rangle - \langle S_i \rangle^2$ が“引き伸ばされた指数関数”的緩和を示すことを次のように議論した。³⁾ $\langle S_i(t) S_i(0) \rangle_c$ は波数 k の指数関数的に緩和するモードの和として書き表すことができる。 $T > T_c$ から $T < T_c$ へ急冷した後の秩序形成過程において $k^2 t$ スケーリング⁴⁾ が成り立つことより、波数 k のモードの寿命（緩和時間）は k^{-2} に比例していると考えられる。また、波数 k のモードが、一方向にそろったスピンにの背景の中に生じた大きさ k^{-1} 位のスピンの反転した領域（液滴、ドロプレット）に対応していると考えれば、平衡状態で大きさ k^{-1} の液滴が励起される確率が d 次元系では $\exp[-\sigma k^{-(d-1)}]$ に比例していることより、波数 k のモードの振幅も $\exp[-\sigma k^{-(d-1)}]$ に比例していると考えられる。結局、

$$\begin{aligned} \langle S_i(t) S_i(0) \rangle_c &\equiv \langle S_i(t) S_i(0) \rangle - \langle S_i \rangle^2 \\ &\sim \int d^d k \exp[-\sigma k^{-(d-1)} - A k^2 t] \end{aligned} \quad (9)$$

を鞍点評価して

$$\langle S_i(t) S_i(0) \rangle_c \sim \exp[-D t^{(d-1)/(d+1)}] \quad (10)$$

を得る。無限系では $\langle S_i \rangle$ は磁化 m に等しいことより

$$q(t) \sim m^2 + B \exp[-D t^{(d-1)/(d+1)}] \quad (11)$$

となる。

2. Randeria, Sethna, Palmerの議論の拡張

有限系（一辺の長さ L の d 次元系）においては Takano, Nakanishi, Miyashita の議論は次のようになる。(11)式で無限系の m^2 に対応するのは、有限系では $\langle m(t)m(0) \rangle$ の長時間（ $t \rightarrow \infty$ ）での緩和

$$\langle m(t)m(0) \rangle \sim m(L)^2 \exp[-t/\tau(L)] \quad (12)$$

である。ここで $\tau(L)$ は系全体の磁化が反転するのに要する時間であり(6)式のように振舞う。⁵⁾ 一方、 $m(L)$ は $L \rightarrow \infty$ で無限系の自発磁化 m に近づく。⁶⁾ これより、 $L \rightarrow \infty$ の後に $t \rightarrow \infty$ とすることにより $\langle m(t)m(0) \rangle \rightarrow m^2$ を得る。 $T < T_c$ では L が十分大きければ $m(L) \sim m$ と考えてよい。 $\langle m(t)m(0) \rangle$ の緩和率 $\tau(L)^{-1}$ が有限系では0でないことにより、(9)式中の波数 k のモードの緩和率 Ak^2 は有限系では $\tau(L)^{-1} + Ak^2$ に変わる。 L が十分大きければ波数 k のモードの振幅には強い L 依存性がないすると、(11)式は有限系では

$$\begin{aligned} q(t) &\sim m^2 \exp[-t/\tau(L)] + \int d^d k \exp[-\sigma k^{-(d-1)} - (\tau(L)^{-1} + Ak^2)t] \\ &\sim \exp[-t/\tau(L)] \times \{m^2 + B \exp[-Dt^{(d-1)/(d+1)}]\} \end{aligned} \quad (13)$$

となる。

Randeria, Sethna, Palmerの議論においては、長時間領域でフラストレートしていない（“フェロ的”）クラスターが、それぞれ独立に反転する運動が重要であるとして(7)式が導かれた。他のモードからの寄与として、それぞれのクラスター内でのゆらぎが長時間領域において重要であると考え、彼らの議論は次のように拡張される。ひとつのクラスターの内部は、フラストレーションが無く、 $T < T_c$ に相当するランダムでない系と同様にみなせるので、大きさ L のクラスター内のスピンに対しては(13)式が成り立つと考えられる。これより、クラスター全体の反転のみを考えた(7)式に対応して

$$\begin{aligned} q(t) &\geq \int dL P(L) \exp[-t/\tau(L)] \times \{m^2 + B \exp[-Dt^{(d-1)/(d+1)}]\} \\ &\sim \int dL \exp[-\alpha L^d - t \exp(-\sigma L^{d-1})] \times \{m^2 + B \exp[-Dt^{(d-1)/(d+1)}]\} \\ &\sim A \exp[-C(\ln t/\sigma)^{d/(d-1)}] \times \{1 + B' \exp[-Dt^{(d-1)/(d+1)}]\} \end{aligned} \quad (14)$$

を得る。これは、Randeria, Sethna, Palmerの漸近形(7)への近付き方が“引き伸ばされた指数関数”的緩和の形をしていることを表している。

3. モンテカルロ・シミュレーションの結果

2次元の $\pm J$ イジング模型の $T < T_c$ において、 $q(t)$ が3次元でみられたような“引き伸ばされた指数関数”的緩和を示すか、(14)式のような緩和を示すかを調べるためにモンテカルロ・シミュレーションを行った。周期的境界条件を課した $L \times L$ の正方格子上の $\pm J$ イジング模型を考え、 $p=0.5 \sim 0.9$ 、 $K=0.3, 0.6, 0.7$ の場合に計算を行った（ T_c は $K_c \approx 0.44$ に対応する）。4つの $\{K_{ij}\}$ のサンプルを用い、それぞれのサンプルの初期の10,000モンテカルロ・ステップを捨てた後の100,000モンテカルロ・ステップを使って、 $q(t) \equiv \overline{S_i(t)S_i(0)}$ を計算した。

図1、2に計算結果を示す。縦軸 $\ln q(t)$ 横軸 $(\ln t)^2$ のプロットにおいて、 $K > K_c$ （ $T < T_c$ ）に対しては、 t が大きくなるにつれ下に凸な曲線である直線に近付き、中間の時間領域で直線にのっていて、やがて上に凸な曲線でその直線から離れていくという振舞いが見られる。直線的な振舞いは、(7)式のような振舞いを意味している。長時間での直線からのはずれは、扱ったサンプルが有限であるためサンプル中のクラスターの大きさ L に上限 $L_{\max}$ があり、最終的に $\exp[-t/\tau(L_{\max})]$ のように緩和時間 $\tau(L_{\max})$ で指数関数的に緩和しているためと考えることができる。実際、 $\ln q(t)$ 対 t のプロットではこの時間領域で直線にのっており、指数関数的緩和を示している。一方、 $\ln q(t)$ 対 $(\ln t)^2$ のプロットで直線にのっている時間領域までの振舞いをフィット

してみると良く(14)式にのることがわかる(図3)。

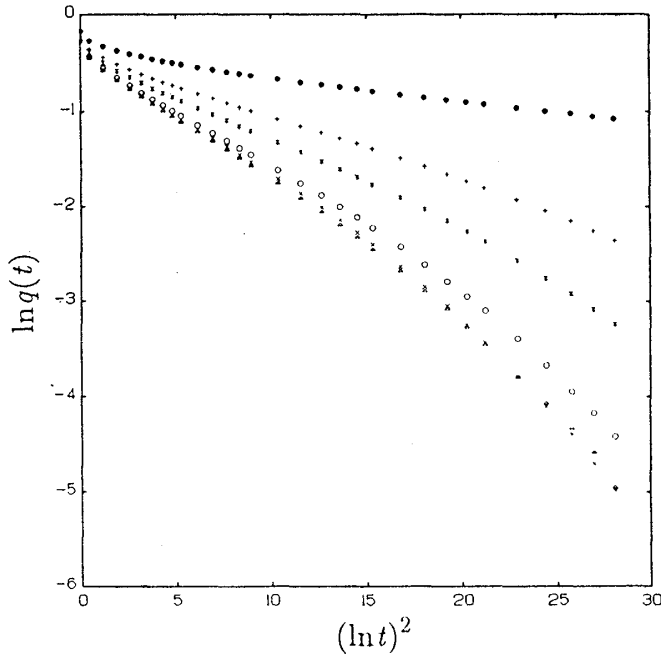


図1. $\ln q(t)$ 対 $(\ln t)^2$ のグラフ。

●は $K=0.6$ 、 $p=0.9$ 、
 +は $K=0.6$ 、 $p=0.85$ 、
 *は $K=0.6$ 、 $p=0.8$ 、
 ○は $K=0.6$ 、 $p=0.7$ 、
 ×は $K=0.6$ 、 $p=0.6$ 、
 △は $K=0.6$ 、 $p=0.5$
 に対応する。

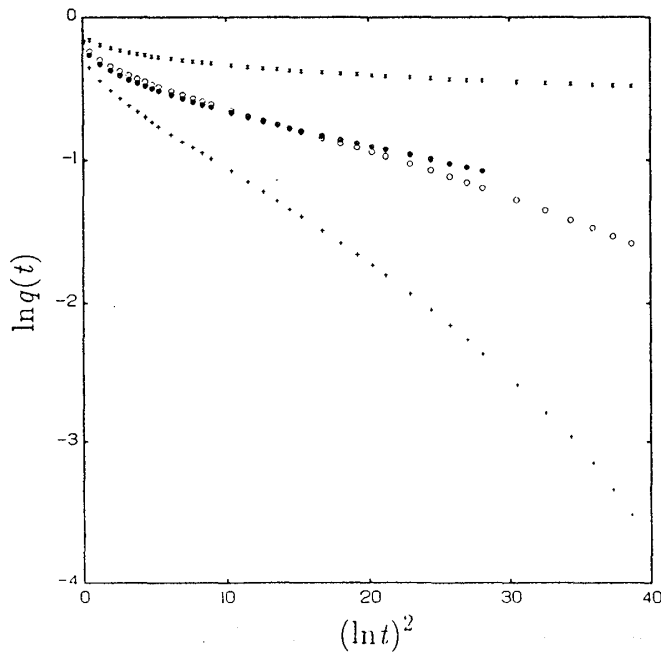


図2. $\ln q(t)$ 対 $(\ln t)^2$ のグラフ。

●は $K=0.6$ 、 $p=0.9$ 、
 +は $K=0.6$ 、 $p=0.85$ 、
 *は $K=0.7$ 、 $p=0.9$ 、
 ○は $K=0.7$ 、 $p=0.85$
 に対応する。

(14)式における係数 C の p 依存性を考える。正方格子ではゲージ変換で p を $1-p$ に変えることができるので、 C も p と $1-p$ に関して対称である。また、 $p \rightarrow 1$ および $p \rightarrow 0$ では系はランダムでなくなるので $C \rightarrow 0$ となると予想される。このことより $p \sim 1$ および $p \sim 0$ で $C \propto p(1-p)$ となると予想される。そこで、 $\ln q(t)$ 対 $p(1-p)(\ln t)^2$ のプロットをしてみると、図4に示すように、 $p=0.9$ を除いて、うまくスケールされることがわかる。この模型では $p_c \simeq 0.89$ が基底状態がフェロ(自発磁化が0でない)かどうかの境目であり、⁷⁾ $p > p_c$ と $p < p_c$ とでフラストレートしていないクラスターの分布の性質が異なるのではないかと考えられる。⁸⁾ このことが $p=0.9$ だけが

特別であることと関係しているのではないかと予想される。

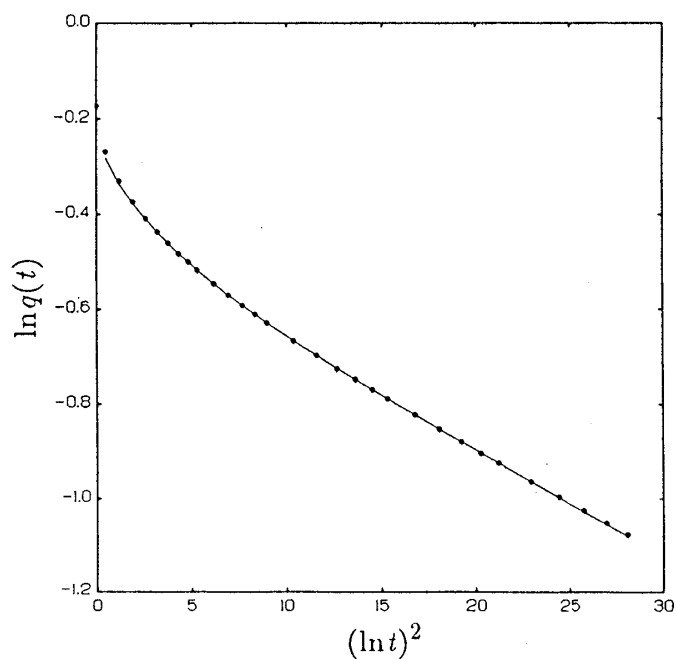


図3. $\ln q(t)$ 対 $(\ln t)^2$ のグラフ。
 $K=0.6$ 、 $p=0.9$ の場合。
 実線はデータを(14)式でフィッ
 トした結果。

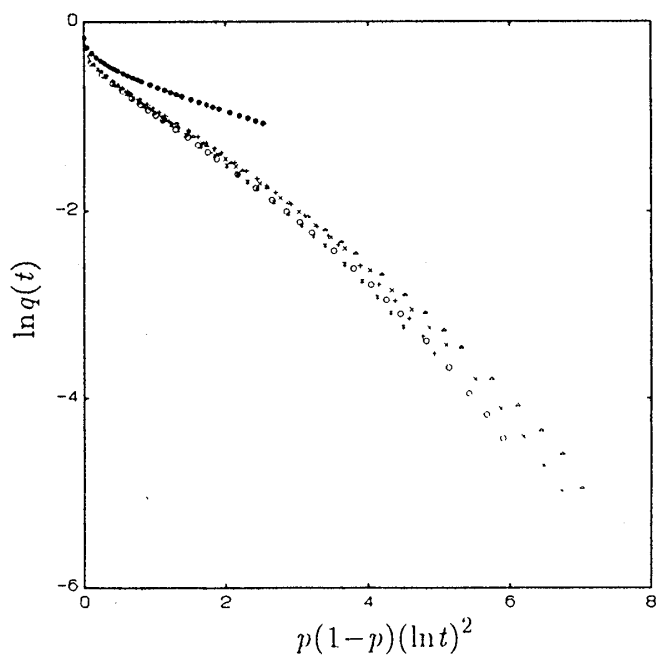


図4. $\ln q(t)$ 対 $p(1-p)\ln t$ のグラフ。
 記号は図1と同じ。

4. まとめ

前節でみたように、(14)式は2次元 $\pm J$ イジング模型に対するモンテカルロ・シミュレーションの結果と矛盾はしない。3節での議論が正しいかどうかをみるには、 $q(t)$ を(14)式にフィッ
 トしたときのパラメータの p 、 K 依存性、サンプル数を増やしたときや系の大きさを大きくし
 たときの $q(t)$ の振舞いの変化、個々のスピンの緩和の空間相関等をさらに調べる必要がある。

前節の結果を、 $\ln[-t/\ln q(t)]$ 対 $\ln t$ のプロットを行ってみると、図5のように直線的になり、3次元系の $T_g < T < T_c$ の場合のOgielskiの結果に似ている。このことは、3次元系でのOgielskiの結果も(14)式で解釈できる可能性があることを示唆している。

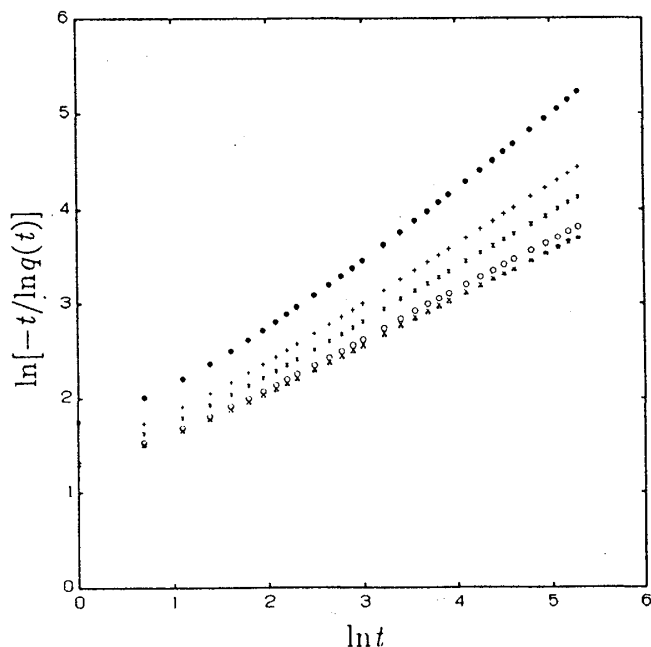


図5. $\ln[-t/\ln q(t)]$ 対 $\ln t$ のグラフ。
記号は図1と同じ。

3節の議論はそのままボンドダイリューションの場合にもあてはまる。実際、正方格子上でのボンドダイリューションの場合にモンテカルロ・シミュレーションを行ったところ、 $\pm J$ 模型と同様の結果が得られている。ボンドダイリューションの場合、クラスターの定義がはっきりしているの、クラスター分布と $q(t)$ の緩和との関係等を詳しく調べることができ、3節の議論の検証にはより適していると考えられる。

参考文献

- 1) A.T. Ogielski, Phys. Rev. B32 (1985)7384.
- 2) M. Randeria, J.P. Sethna and R.G. Palmer, Phys. Rev. Lett. 54 (1985)1321.
- 3) H. Takano, H. Nakanishi and S. Miyashita, to be published in Phys. Rev. B (1988).
- 4) T. Ohta, D. Jasnow and K. Kawasaki, Phys. Rev. Lett. 49 (1982)1223.
P.S. Sahni, G. Dee, J.D. Gunton, M. Phani, J.L. Lebowitz and M. Kalos, Phys. Rev. B24 (1981)410.
J.D. Gunton, M. San Miguel and P.S. Sahni, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, vol. 8, ed. C. Domb and J.L. Lebowitz (Academic Press, London, 1983).
- 5) S. Miyashita and H. Takano, Prog. Theor. Phys. 73 (1985)1122.
- 6) H. Takano and Y. Saito, Prog. Theor. Phys. 73 (1985)1369.
- 7) Y. Ozeki and H. Nishimori, J. Phys. Soc. Jpn. 56 (1987)1568.
Y. Ozeki and H. Nishimori, to be published in J. Phys. Soc. Jpn.
- 8) H. Nishimori, J. Phys. Soc. Jpn. 55 (1986)3305.