

Knörr 格子とテンサー積について

名古屋市立大学 河田成人

Shigeto Kawata
Nagoya City University

G は有限群とし, $(K, \mathcal{O}, k)$ を p -モジュラー系 (p は素数) とする. すなわち, K は乗法付値 ν を備えた標数 0 の完備離散付値体であり, $\mathcal{O}$ は極大イデアル $\pi\mathcal{O}$ をもつ ν の付値環で, $k = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ は標数 p の $\mathcal{O}$ の剰余体とする. ここでは, k は代数的閉体と仮定し, R で $\mathcal{O}$ または k を表すものとする. RG -格子 (RG -表現加群) といえば, R -加群として自由な有限生成右 RG -加群を意味する. 有限群の表現論にまつわる基本的な用語等については [NT] を参照する.

ここでは, Knörr 格子のテンサー積について, almost split sequence との関わりを通して考察したい.

1 準備

群環 RG 上の表現加群の短完全列

$$\mathcal{A} : 0 \longrightarrow N \longrightarrow M \xrightarrow{f} L \longrightarrow 0$$

が *almost split sequence* であるとは, 次の 3 条件を満たすときをいう:

- (1) L と N は直既約である.
- (2) $\mathcal{A}$ は分裂列ではない.
- (3) 任意の分裂全射でない準同型写像 $g : X \rightarrow L$ に対し
ある準同型写像 $h : X \rightarrow M$ が存在して $g = f \circ h$ が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ h \swarrow \circlearrowleft & \downarrow g & \\ M & \xrightarrow{f} & L \end{array}$$

射影的でない直既約 RG -表現加群 L で終わる almost split sequence は一意に存在する ([AR], [RS]) が, それを

$$\mathcal{A}(L) : 0 \longrightarrow \tau L \longrightarrow m(L) \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

と書く. Auslander-Reiten translation τ について, $R = \mathcal{O}$ のときは $\tau = \Omega$ (Heller operator) であり, $R = k$ のときは $\tau = \Omega^2$ であることが知られている.

自明な RG -加群 R_G の almost split sequence $\mathcal{A}(R_G)$:

$$0 \longrightarrow \tau R_G \longrightarrow m(R_G) \longrightarrow R_G \longrightarrow 0$$

と直既約 RG -表現加群 L のテンサー積 $L \otimes \mathcal{A}(R_G)$:

$$0 \longrightarrow L \otimes \tau R_G \longrightarrow L \otimes m(R_G) \longrightarrow L \otimes R_G = L \longrightarrow 0$$

について, Auslander-Carlson と Benson-Carlson は次の定理を示した.

定理 1.1 ([AC, Theorem 3.6], [BC, Proposition 2.15]). $L \otimes \mathcal{A}(R_G)$ について次が成り立つ.

- (1) L の階数が p で割り切れれば, $L \otimes \mathcal{A}(R_G)$ は分裂する.
- (2) L の階数が p で割り切れないとする. $L \otimes \tau R_G \cong \tau L \oplus I$ (I はある入射加群) のとき, $L \otimes \mathcal{A}(R_G)$ は次のように $\mathcal{A}(L)$ と分裂列の直和の形となる:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}(L) : 0 & \longrightarrow & \tau L & \longrightarrow & m(L) & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \\ & & \oplus & & \oplus & & \\ \text{分裂列 :} & & I & \xlongequal{\quad} & I & & \end{array}$$

さらに, 次の定理も示されている.

定理 1.2 ([AC, Corollary 4.7], [BC, Theorem 2.1]). 直既約な RG -表現加群 L , X について

$$R_G \mid L \otimes X^* \iff p \nmid \text{rank}_R L \text{ かつ } X \cong L.$$

この場合, $L \otimes L^*$ の直既約分解において R_G は重複度 1 で現れる.

この報告では, Scott RG -表現加群の almost split sequence と RG -表現加群のテンサー積について考察し, その結果を応用して Knörr 格子のテンサー積と Scott 表現加群との関係について言及したい. 特に, 上述した定理に関連して, L が Knörr 格子の場合を考えていく.

2 Scott 加群の Almost split sequence とテンサー積

Q を G の p -部分群とする. $k_Q \uparrow^G := k_Q \otimes_{kQ} kG$ (置換加群) の直規約分解における直既約因子 $\overline{S}(Q)$ で, 「 k_G が $\overline{S}(Q)$ の $\text{Soc}(\overline{S}(Q))$ の直既約因子として現れる」ものが一意的に存在する. この $\overline{S}(Q)$ を Q をヴァーテックスに持つ Scott kG -加群と呼ぶ.

k 上の置換加群の直和因子は, $\mathcal{O}$ 上の置換加群の直和因子に一意的に持ち上げ可能である. 特に $\mathcal{O}_Q \uparrow^G$ の直既約因子で $\overline{S}(Q)$ の持ち上げとなっているものを $S(Q)$ と書き Q をヴァーテックスに持つ Scott $\mathcal{O}G$ -加群と呼ぶ:

$$S(Q)/\pi S(Q) \cong \overline{S}(Q)$$

P が Sylow p -部分群のときには, $\overline{S}(P) = k_G$, $S(P) = \mathcal{O}_G$ (自明な加群) である.

$\text{Sc}(Q)$ で, Q をヴァーテックスに持つ Scott RG -表現加群を表すことにする.

$$\text{Sc}(Q) = \begin{cases} S(Q) & (R = \mathcal{O}) \\ \overline{S}(Q) & (R = k) \end{cases}$$

注意 2.1. 直既約 RG -表現加群 V が Q -射影的であるとき, V は $\text{Sc}(Q) \otimes V$ の直既約因子として現れる.

証明 まず, Q が G の正規部分群の場合を考える. $\text{Sc}(Q)$ に Q は自明に作用するので, 短完全列 $0 \rightarrow \Omega R_G \rightarrow \text{Sc}(Q) \rightarrow R_G \rightarrow 0$ を Q に制限すれば分裂する. 特に, $0 \rightarrow \Omega R_G \otimes V \rightarrow \text{Sc}(Q) \otimes V \rightarrow R_G \otimes V = V \rightarrow 0$ は Q に制限すれば分裂する. 一般の場合は, Green 対応を考えれば良い. $\square$

Benson-Carlson は Scott 加群とテンサー積に関して次の命題を示した.

命題 2.2([BC, Proposition 2.4]). 直既約な RG -表現加群 L のヴァーテックスが Q であり, L の Q -source の階数が p で割り切れないとする. このとき, $\text{Sc}(Q)$ が $L \otimes L^*$ の直既約因子として現れる.

$\text{Sc}(Q)$ の almost split sequence $\mathcal{A}(\text{Sc}(Q))$ と RG -表現加群 V のテンサー積 $V \otimes \mathcal{A}(\text{Sc}(Q))$:

$$0 \longrightarrow V \otimes \tau \text{Sc}(Q) \longrightarrow V \otimes m(\text{Sc}(Q)) \longrightarrow V \otimes \text{Sc}(Q) \longrightarrow 0$$

について考える. 注意 2.1 から最終項 $V \otimes \text{Sc}(Q)$ の直既約分解において V が直既約因子として現れるが, 次が成り立つ.

命題 2.3. Q は G の正規 p -部分群であるとする. RG -表現加群 V が Q -射影的であれば

$$V \otimes \mathcal{A}(\text{Sc}(Q)) = \mathcal{E}(V) \oplus \text{分裂列}.$$

ここで, $\mathcal{E}(V)$ は次のような形の (τV から始まり V で終わる) 短完全列である:

$$0 \longrightarrow \tau V \longrightarrow \exists V' \longrightarrow V \longrightarrow 0 \quad (V' \text{ はある } RG\text{-表現加群}).$$

この節の残りで, 命題 2.3 の証明をする. まずモジュラー表現 ($R = k$) の場合を考える. Q が正規部分群なので, Q をヴァーテックスに持つ Scott kG -加群 $\overline{S}(Q)$ は $k(G/Q)$ -加群として k_G の射影被覆である. そのため, $\overline{S}(Q)$ の head と $\Omega \overline{S}(Q)$ の socle は共に k_G である. $\overline{s}: \overline{S}(Q) \rightarrow \overline{S}(Q)/\text{Rad}(\overline{S}(Q)) = k_G$ を自然な全射とし, $\overline{j}: k_G = \text{Soc}(\Omega \overline{S}(Q)) \rightarrow \Omega \overline{S}(Q)$ を埋込とする. $\phi = \overline{j} \circ \overline{s} \in \text{Hom}_{kG}(\overline{S}(Q), \Omega \overline{S}(Q))$ とおくと次が成り立つ.

補題 2.4. ϕ は almost projective であり, $\mathcal{A}(\overline{S}(Q))$ は射影被覆 $P_{\Omega \overline{S}(Q)} \rightarrow \Omega \overline{S}(Q)$ と ϕ の pull-back として構成される:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}(\overline{S}(Q)): 0 & \longrightarrow & \Omega^2 \overline{S}(Q) & \longrightarrow & m(\overline{S}(Q)) & \longrightarrow & \overline{S}(Q) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \text{pull-back} & & \downarrow \phi \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^2 \overline{S}(Q) & \longrightarrow & P_{\Omega \overline{S}(Q)} & \longrightarrow & \Omega \overline{S}(Q) \longrightarrow 0. \end{array}$$

証明 ϕ が射影的でないことを示す: 実際, Q は G の正規 p -部分群なので, $\overline{S}(Q) \downarrow_Q$ (resp. $\Omega \overline{S}(Q) \downarrow_Q$) はいくつかの k_Q (resp. Ωk_Q) の直和である. よって kQ -準同型写像 $\phi|_Q: \overline{S}(Q) \downarrow_Q \rightarrow \Omega \overline{S}(Q) \downarrow_Q$ は射影的ではなく, 従って ϕ は射影的ではない.

μ を $\overline{S}(Q)$ の任意の kG -自己準同型写像で同型ではないとしよう. $\text{Im } \mu \subseteq \text{Rad}(\overline{S}(Q)) = \text{Ker } \phi$ なので $\phi \circ \mu$ は 0-写像となる. このことは ϕ が almost projective であることを意味する. $\square$

注意 2.5. M を Q -射影的 kG -加群とする. Q は G の正規 p -部分群なので $\overline{S}(Q) \downarrow_Q$ はいくつかの k_Q の直和であり, kQ -準同型写像 $\overline{s}|_Q: \overline{S}(Q) \downarrow_Q \rightarrow k_Q$ は分裂する. したがって kG -準同型写像 $\text{id}_M \otimes \overline{s}: M \otimes \overline{S}(Q) \rightarrow M \otimes k_G$ は分裂して, 次を得る:

$$\text{id}_M \otimes \phi: M \otimes \overline{S}(Q) \xrightarrow{\text{id}_M \otimes \overline{s}} M \otimes k_G = M \xrightarrow{\text{id}_M \otimes \overline{j}} M \otimes \Omega \overline{S}(Q).$$

短完全列 $M \otimes \mathcal{A}(\overline{S}(Q))$ は $M \otimes P_{\Omega \overline{S}(Q)} \rightarrow M \otimes \Omega \overline{S}(Q)$ と $\text{id}_M \otimes \phi$ による pull-back として構成されるので, $M \otimes \mathcal{A}(\overline{S}(Q))$ は「 M で終わるような短完全列 $0 \rightarrow M'' \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow 0$ (ここで M', M'' はある kG -加群)」と「ある分裂列」との直和であると分かる.

また, Q が正規部分群なので, $\overline{S}(Q)$ の socle と $\Omega^{-1}\overline{S}(Q)$ の head は共に k_G である. $\bar{\iota} : \Omega^{-1}\overline{S}(Q) \rightarrow \Omega^{-1}\overline{S}(Q)/\text{Rad}(\Omega^{-1}\overline{S}(Q)) = k_G$ を自然な全射とし, $\bar{\iota} : k_G = \text{Soc}(\overline{S}(Q)) \rightarrow \overline{S}(Q)$ を埋込とする. $\varphi = \bar{\iota} \circ \bar{\iota} \in \text{Hom}_{k_G}(\Omega^{-1}\overline{S}(Q), \overline{S}(Q))$ とおくと次が成り立つ.

補題 2.6. φ は almost projective であり, $\mathcal{A}(\Omega^{-1}\overline{S}(Q))$ は $\overline{S}(Q)$ の射影被覆 $P_{\overline{S}(Q)}$ と φ の pull-back として構成される.

注意 2.7. W を Q -射影的な kG -とする, $\bar{\iota}|_Q : k_Q \rightarrow \overline{S}(Q) \downarrow_Q$ が分裂するので, kG -準同型写像 $\text{id}_W \otimes \bar{\iota} : W \otimes k_G \rightarrow W \otimes \overline{S}(Q)$ は分裂する. よって $\text{id}_W \otimes \varphi : W \otimes \Omega^{-1}\overline{S}(Q) \rightarrow W \otimes \overline{S}(Q)$ の像は $W \otimes \overline{S}(Q)$ の直和因子 $W \otimes k_G$ に一致する. 今, $W \otimes \mathcal{A}(\Omega^{-1}\overline{S}(Q))$ は $W \otimes P_{\overline{S}(Q)} \rightarrow W \otimes \overline{S}(Q)$ と $\text{id}_W \otimes \varphi$ の pull-back として構成されるので, $W \otimes \mathcal{A}(\Omega^{-1}\overline{S}(Q))$ は「 ΩW で始まるような短完全列 $0 \rightarrow \Omega W \rightarrow W' \rightarrow W'' \rightarrow 0$ (ここで W', W'' はある kG -加群)」と「ある分裂列」の直和と分かる.

注意 2.8. (1) 短完全列 $\mathcal{E} : 0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow C \rightarrow 0$ と直和分解 $A = A_1 \oplus A_2$ について, 次の条件 (i) と (ii) は同値である.

(i) A_2 は $\mathcal{E}$ から “split” する : すなわち, $B = B_1 \oplus B_2$ ($A_2 \cong B_2$) と直和分解されて

$$\mathcal{E} := (0 \rightarrow A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow C \rightarrow 0) \oplus (0 \rightarrow A_2 \rightarrow B_2 \rightarrow 0 \rightarrow 0).$$

(ii) ある $\varphi : B \rightarrow A_2$ が存在して $\varphi \circ f|_{A_2} = \text{id}_{A_2}$ かつ $f(A_1) \subset \text{Ker } \varphi$.

(2) 短完全列 $\mathcal{E} : 0 \rightarrow A \rightarrow B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ と直和分解 $C = C_1 \oplus C_2$ について, 次の条件 (iii) と (iv) は同値である.

(iii) C_2 は $\mathcal{E}$ から “split” する : すなわち, $B = B_1 \oplus B_2$ ($B_2 \cong C_2$) と直和分解されて

$$\mathcal{E} := (0 \rightarrow A \rightarrow B_1 \rightarrow C_1 \rightarrow 0) \oplus (0 \rightarrow 0 \rightarrow B_2 \rightarrow C_2 \rightarrow 0).$$

(iv) ある $\psi : C_2 \rightarrow B$ が存在して $g \circ \psi = \text{id}_{C_2}$.

(3) $\mathcal{E} : 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ と直和分解 $A = A_1 \oplus A_2$, $C = C_1 \oplus C_2$ について, A_2 が $\mathcal{E}$ から split し, 一方で C_2 が $\mathcal{E}$ から split するとする. このとき, A_2 と C_2 は $\mathcal{E}$ から同時に split する.

証明 (1) (ii) $\implies$ (i) $B_1 = \text{Ker } \varphi$, $B_2 = f(A_2)$ とおけば良い.

(2) (iv) $\implies$ (iii) $B_1 = g^{-1}(C_1)$, $B_2 = \text{Im } \psi$ とおけば良い.

(3) まず A_2 を split out してから, $\psi : C_2 \rightarrow B \rightarrow B/A_2$ を考えれば良い. □

注意 2.5, 2.7 および 2.8 から次が言える :

補題 2.9. Q は G の正規 p -部分群であるとする. もし kG -加群 M が Q -射影的であれば, $M \otimes \mathcal{A}(\overline{S}(Q))$ は分裂列と次のような ($\Omega^2 M$ から始まり M で終わるような) 短完全列 $0 \rightarrow \Omega^2 M \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow 0$ (ここで M' はある kG -加群) との直和である.

次に, 整数表現 ($R = \mathcal{O}$) の場合を考える. Q が G の正規部分群であるという仮定を続ける. Q は $S(Q)$ に自明に作用していることに注意する. $S(Q)$ は $\mathcal{O}(G/Q)$ -表現加群とみなしたときには $\mathcal{O}_G$ の射影被覆 $s: S(Q) \rightarrow \mathcal{O}_G$ であり $\mathcal{O}$ -入射包絡 $i: \mathcal{O}_G \rightarrow S(Q)$ でもある. $\rho = i \circ \pi^{-1}|_Q \text{id}_{\mathcal{O}_G} \circ s \in \text{End}_{\mathcal{O}_G}(S(Q))$ とおくと, 次が成り立つ.

補題 2.10([K1, Lemma 2.3]). ρ は almost projective である. 特に, almost split sequence $\mathcal{A}(S(Q))$ は射影被覆 $P_{S(Q)} \rightarrow S(Q)$ と ρ の pull-back として構成される:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{A}(S(Q)): 0 & \longrightarrow & \Omega S(Q) & \longrightarrow & m(S(Q)) & \longrightarrow & S(Q) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \text{pull-back} & & \downarrow \rho & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega S(Q) & \longrightarrow & P_{S(Q)} & \longrightarrow & S(Q) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

L を Q -射影的な $\mathcal{O}G$ -表現加群とする. 制限 $S(Q) \downarrow_Q$ は $\mathcal{O}_Q$ のいくつかの直和であり (Q が自明に作用しており) 制限された $\mathcal{O}Q$ -準同型写像 $s|_Q: S(Q) \downarrow_Q \rightarrow \mathcal{O}_Q$ は $\mathcal{O}Q$ -分裂全射なので, $\text{id}_L \otimes s: L \otimes S(Q) \rightarrow L \otimes \mathcal{O}_G = L$ は $\mathcal{O}G$ -分裂全射であると分かる. また, 制限された $\mathcal{O}Q$ -準同型写像 $i|_Q: \mathcal{O}_Q \rightarrow S(Q) \downarrow_Q$ は $\mathcal{O}Q$ -分裂単射であるので, $\text{id}_L \otimes i: L \otimes \mathcal{O}_G \rightarrow L \otimes S(Q)$ は $\mathcal{O}G$ -分裂単射である. 従って, $\text{id}_L \otimes \rho$ は次のように分解される:

$$\text{id}_L \otimes \rho: L \otimes S(Q) \xrightarrow{\text{id}_L \otimes s} L \otimes \mathcal{O}_G = L \xrightarrow{\pi^{-1}|_Q \text{id}_L} L = L \otimes \mathcal{O}_G \xrightarrow{\text{id}_L \otimes i} L \otimes S(Q).$$

$L \otimes \mathcal{A}(S(Q))$ は $L \otimes P_{S(Q)} \rightarrow L \otimes S(Q)$ と $\text{id}_L \otimes \rho$ の a pull-back として構成されるので, 次の主張が成り立つ.

補題 2.11. Q は G の正規 p -部分群であるとし, $\mathcal{O}G$ -表現加群 L は Q -射影的であるとする. このとき, $L \otimes \mathcal{A}(S(Q))$ は分裂列と短完全列 $\mathcal{E}$ との直和となる: ここで $\mathcal{E}$ は, 射影

被覆 $P_L \rightarrow L$ と $\pi^{-1}|Q|\mathrm{id}_L$ の pull-back L' として構成された短完全列である:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{E} : 0 & \longrightarrow & \Omega L & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \text{pull-back} & & \downarrow \pi^{-1}|Q|\mathrm{id}_L & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega L & \longrightarrow & P_L & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

命題 2.3 の証明 補題 2.9 と 2.11 から主張が従う. □

3 Almost split sequences とテンサー積

この節では, 命題 2.3 の結果を踏まえて, 少し一般的に次のような設定を考えてみたい.

直既約 RG -表現加群 U, V, W と $\mathcal{A}(U) : 0 \rightarrow \tau U \rightarrow m(U) \xrightarrow{\sigma} U \rightarrow 0$ が次の条件 (★) を満たすとする:

$$(\star) \quad V \otimes \mathcal{A}(U) = \mathcal{E}(W) \oplus \text{分裂列}.$$

ただし $\mathcal{E}(W)$ は次のような形の (τW から始まり W で終わる) 短完全列である:

$$0 \rightarrow \tau W \rightarrow \exists W' \rightarrow W \rightarrow 0 \quad (W' \text{ はある } RG\text{-表現加群}).$$

上記の設定のもとで, 次の可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{RG}(W, V \otimes m(U)) & \xrightarrow{(\mathrm{id}_V \otimes \sigma)^*} & \mathrm{Hom}_{RG}(W, V \otimes U) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathrm{Hom}_{RG}(W \otimes V^*, m(U)) & \xrightarrow{\sigma^*} & \mathrm{Hom}_{RG}(W \otimes V^*, U) \end{array}$$

にまつわる Auslander-Carlson の議論 [AC, Sections 3 and 4] を活用すれば, 次の命題が成り立つことが分かる.

命題 3.1 ([K2, Proposition 2.4]). U, V, W は直既約 RG -表現加群で, 上の条件 (★) を満たすとする. このとき次は同値となる.

- (i) $\mathcal{E}(W) = \mathcal{A}(W)$.
- (ii) $W \otimes V^*$ の直既約分解において, U が重複度 1 で現れる.

$Q (\neq \{1_G\})$ を G の p -subgroup とし, $N = N_G(Q)$ とおく. f を (G, Q, N) に関する Green 対応とする.

補題 3.2. 直既約 RG -表現加群 U, V, W は Q をヴァーテクスにもつとする. また, これらの Green 対応子 fU, fV, fW が上の条件 $(\star)$ を満たすとする. すなわち $fV \otimes \mathcal{A}(fU)$ は分裂列列と次の形の短完全列との直和となっているとする:

$$\mathcal{E} : 0 \rightarrow \tau fW \rightarrow B \rightarrow fW \rightarrow 0 \quad (B \text{ はある } RN\text{-表現加群}).$$

このとき, 次の (i), (ii) は同値である.

- (i) $\mathcal{E} = \mathcal{A}(fW)$.
- (ii) $V \otimes \mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(W) \oplus (\text{a split sequence})$.

証明 Green 対応から次の直和分解

$$V \downarrow_N = fV \oplus \left(\bigoplus_i Y_i \right) \quad (\text{各 } Y_i \text{ は } (Q^{y_i} \cap N)\text{-射影的 } (y_i \in G \setminus N))$$

を得るが, $\mathcal{A}(fU) \downarrow_{Q^{y_i} \cap N}$ は分裂するので $Y_i \otimes \mathcal{A}(fU)$ は分裂列であることに注意する.

(i) $\implies$ (ii): 各 $Y_i \otimes \mathcal{A}(fU)$ は分裂するので, $(V \downarrow_N \otimes \mathcal{A}(fU)) \uparrow^G$ は $\mathcal{A}(W)$ と分裂列の直和となる. $\mathcal{A}(fU) \uparrow^G$ は $\mathcal{A}(U)$ と分裂列の直和であるので, $(V \downarrow_N \otimes \mathcal{A}(fU)) \uparrow^G \cong V \otimes \mathcal{A}(fU) \uparrow^G$ に注意すれば (ii) が成り立つことが分かる.

(ii) $\implies$ (i): $(V \otimes \mathcal{A}(U)) \downarrow_N$ は $\mathcal{A}(fW)$ とある Q -split 短完全列 $\mathcal{S}$ との直和となる一方で, $\mathcal{A}(U) \downarrow_N$ は $\mathcal{A}(fU)$ とある Q -split sequence の直和となることが知られているので, $V \downarrow_N \otimes \mathcal{A}(U) \downarrow_N$ は $\mathcal{E}$ とある Q -split 短完全列 $\mathcal{T}$ との直和として書ける. $V \otimes \mathcal{A}(U)$ の N への制限を 2 通りの方法で考えることで, $\mathcal{A}(fW) \oplus \mathcal{S} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{T}$ を得る. ここでまず $\mathcal{E}$ は分裂しないことを主張しておく: 実際, 仮に $\mathcal{E}$ が分裂すると仮定してみると $(\mathcal{E} \oplus \mathcal{T}) \downarrow_Q$ は分裂することになるが, しかし $\mathcal{A}(fW) \downarrow_Q$ は分裂しないので矛盾である. さて, $V \downarrow_N \otimes U \downarrow_N$ は $(V \otimes \mathcal{A}(U)) \downarrow_N (= \mathcal{E} \oplus \mathcal{T})$ の最終項であるので

$$V \downarrow_N \otimes U \downarrow_N = Y \oplus T$$

と直和分解できる. ただし, $\mathcal{E}$ は $Y (\cong fW)$ で終わり, $\mathcal{T}$ は T で終わるとする. 一方で

$$V \downarrow_N \otimes U \downarrow_N = Z \oplus S$$

と直和分解することもできる. ここで, $\mathcal{A}(fW)$ は $Z (\cong fW)$ で終わり, $\mathcal{S}$ は S で終わるとする. 今, $\psi : fW \rightarrow Y$ を同型ではない任意の RN -自己準同型写像とする. $\varphi : fW \xrightarrow{\psi} Y \hookrightarrow Y \oplus T \cong Z \oplus S$ を考えて, $\varphi_1 : fW \rightarrow Z$ と $\varphi_2 : fW \rightarrow S$ は $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ を満たすものとする. φ_1 は同型ではないので, φ_1 は $\mathcal{A}(fW)$ の中間項を経由する. fW は Q -射影的であり $\mathcal{S}$ は Q -射影的なので, φ_2 は $\mathcal{S}$ の中間項を経由する. ゆえに ψ は $\mathcal{E}$ の中間項 B を経由するので $\mathcal{E} = \mathcal{A}(fW)$ と分かる. $\square$

さらに, Auslander-Carlson の議論 [AC, Proposition 2.4] を利用すれば次の事実を得る.

命題 3.4([K2, Proposition 2.5]). U, V, W は直既約 RG -表現加群で次が成り立つとする:

$$V \otimes \mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(W) \oplus \text{分裂列}.$$

このとき, 直既約 RG -加群 X について

$$U \mid X \otimes V^* \iff X \cong W.$$

命題 3.1 において $U = \text{Sc}(Q)$, $V = W$ とおくと, 次が言える.

命題 3.5. 命題 2.3 において, さらに次が同値となる:

- (i) $\mathcal{E}(V)$ は almost split sequence である.
- (ii) $V \otimes V^*$ の直既約分解において $\text{Sc}(Q)$ が重複度 1 で現れる.

4 Knörr 格子 (Virtually irreducible $\mathcal{O}G$ -表現加群) とテンサー積

$\mathcal{O}G$ -表現加群 L に対して, $\text{tr} : \text{End}_{\mathcal{O}}(L) \rightarrow \mathcal{O}$ をトレース写像とし

$$A = \text{End}_{\mathcal{O}G}(L), \quad A_0 = \{f \in A \mid \text{tr } f = 0\}$$

とおく. Knörr は $\mathcal{O}G$ -表現加群において, “virtually irreducible” という概念を提唱した [Kn].

定義 (Knörr) $\mathcal{O}G$ -表現加群 L が *virtually irreducible* (Knörr 格子) とは

$$A = \mathcal{O} \cdot \text{id}_L \oplus A_0 \quad \text{かつ} \quad J(A) = \pi \mathcal{O} \cdot \text{id}_L \oplus A_0$$

であるときをいう.

例 次の $\mathcal{O}G$ -表現加群は Knörr 格子である.

- ・ irreducible $\mathcal{O}G$ -表現加群
- ・ rank が p で割り切れないような直既約 $\mathcal{O}G$ -表現加群
- ・ 高さ 0 の直既約 $\mathcal{O}G$ -表現加群

また, Carlson-Jones は “exponential property” という概念を導入した [CJ]. $\mathcal{O}G$ -表現加群 L に対し, $\pi^a \cdot \text{id}_L$ が射影的となる最小の整数 a を L の *exponent* と呼ぶ. (ちなみに, 任意の $\mathcal{O}G$ -表現加群 L に対し, $|G| \cdot \text{id}_L$ は射影的である.) また, $\mathcal{O}G$ -表現加群 L が直既

約であれば $\text{Soc}(\text{End}_{\mathcal{O}G}(L)/\{\text{projective}\})$ は simple であることが知られており, その生成元であるような $\mathcal{O}G$ -自己準同型写像 ρ を *almost projective* という. なお, L の almost split sequence $\mathcal{A}(L)$ は, L の projective cover $P_L \rightarrow L$ と almost projective ρ の pull back として構成される:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{A}(L) : 0 & \longrightarrow & \tau L & \longrightarrow & m(L) & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \text{almost proj } \rho & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega L & \longrightarrow & P_L & \xrightarrow{\text{proj cover}} & L & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

定義 (Carlson-Jones) 直既約 $\mathcal{O}G$ -表現加群 L の exponent が a であるとする. $\pi^{a-1} \cdot \text{id}_L$ が almost projective であるとき, L は *exponential property* を持つという.

命題 4.1 ([CJ, Remarks 4.5]). 直既約 $\mathcal{O}G$ -表現加群 L に対し, 次は同値である.

- (i) L は Knörr 格子である.
- (ii) L は exponential property を持つ.

直既約 $\mathcal{O}G$ -表現加群 L が Q をヴァーテクスに持つとき, L は $S(Q) \otimes L$ の直既約因子として現れた (注意 2.1). $\mathcal{A}(S(Q))$ と L のテンサー積 $L \otimes \mathcal{A}(S(Q))$:

$$0 \longrightarrow L \otimes \tau S(Q) \longrightarrow L \otimes m(S(Q)) \longrightarrow L \otimes S(Q) \longrightarrow 0$$

について, 次の定理が成り立つ.

定理 4.2. 直既約 $\mathcal{O}G$ -表現加群 L は $Q (\neq 1)$ をヴァーテクスに持ち, L の Q -source の階数は p で割り切れないとする. このとき, 次は同値である.

- (i) L は Knörr 格子である.
- (ii) $L \otimes \mathcal{A}(S(Q)) = \mathcal{A}(L) \oplus$ 分裂列.

証明 Q が G の正規部分群の場合

$$\rho : S(Q) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_G \xrightarrow{\pi^{-1}|Q| \cdot \text{id}_{\mathcal{O}_G}} \mathcal{O}_G \twoheadrightarrow S(Q)$$

が almost projective であって

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{A}(S(Q)) : 0 & \longrightarrow & \tau S(Q) & \longrightarrow & m(S(Q)) & \longrightarrow & S(Q) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \rho : \text{almost proj} & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega S(Q) & \longrightarrow & P_{S(Q)} & \xrightarrow{\text{proj cover}} & S(Q) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

従って $L \otimes \mathcal{A}(S(Q))$ は分裂列と次の短完全列の直和となる：

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \tau L & \longrightarrow & \text{pull-back} & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \pi^{-1}|Q|\text{id}_L \\
 0 & \longrightarrow & \Omega L & \longrightarrow & P_L & \xrightarrow{\text{proj cover}} & \bar{L} \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

このことから定理の主張が従う．

一般の場合は Green 対応を考えれば良い． □

以上のことをまとめて、Knörr 格子の性質の一面を次のように見ることができる．

系 4.3. G の p -部分群 Q を vertex に持つ直既約 $\mathcal{O}G$ -表現加群 L について、次の 3 条件は同値である．

- (i) L は Knörr 格子で L の Q -source の階数は p で割り切れない．
- (ii) $L \otimes \mathcal{A}(S(Q))$ は $\mathcal{A}(L)$ と分裂列の直和である．
- (iii) $L \otimes L^*$ の直既約分解において $S(Q)$ が重複度 1 で現れる．

さらにこの場合、直既約 $\mathcal{O}G$ -表現加群 X について

$$S(Q) \mid X \otimes L^* \iff X \cong L.$$

注意 4.4. 直既約な RG -表現加群 L のヴァーテクスが Q であり、 L の Q -source の階数が p で割り切れないとする．このとき、Benson-Carlson の結果から $\text{Sc}(Q)$ が $L \otimes L^*$ の直既約因子として現れる．重複度 2 以上で $\text{Sc}(Q)$ が $L \otimes L^*$ の直既約因子として現れる例として、 G が p -群で Q が正規部分群のとき $L = \text{Sc}(Q) = R_Q \uparrow^G$ について、 $\text{Sc}(Q) \otimes \text{Sc}(Q)^*$ は $|G : Q|$ 個の $\text{Sc}(Q)$ の直和となる．

参考文献

- [A] Auslander, M.: *Functors and morphisms determined by objects*, in “Proceedings of conference on Representation Theory, Philadelphia 1976,” pp. 1–244, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 37, Marcel Dekker, New York, 1978.
- [AC] Auslander, M. and Carlson, J.F.: *Almost-split sequences and group rings*, J. Algebra **103**(1986), 122–140.
- [AR] Auslander, M. and Reiten, I.: *Representation theory of artin algebras III: Almost split sequences*, Comm. Algebra **3**(1975), 239–284.
- [BC] Benson, D. J. and Carlson, J.F.: *Nilpotent elements in the Green ring*, J. Algebra **104**(1986), 329–350.

- [CJ] Carlson, J. F. and Jones, A.: *An exponential property of lattices over group rings*, J. London Math. Soc. **39**(1989), 467–479.
- [K1] Kawata, S.: *On relative projectivity of lattices in Auslander-Reiten components for group rings*, Comm. Algebra **48**(2020) 2461–2466.
- [K2] Kawata, S.: *On tensor products and almost split sequences for Scott lattices over group rings*, J. Algebra **599**(2022), 122–132.
- [Kn] Knörr, R.: *Virtually irreducible lattices*, Proc. London Math. Soc. **59**(1989), 99–132.
- [NT] 永尾汎, 津島行男: 有限群の表現, 裳華房, 1987.
- [RS] Roggenkamp, K. W. and Schmidt, J.: *Almost split sequences for integral group rings and orders*, Comm. Algebra **4**(1976), 893–917.