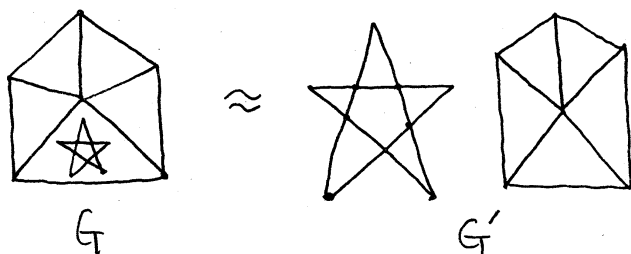


グラフと絡み輪に関する多項式

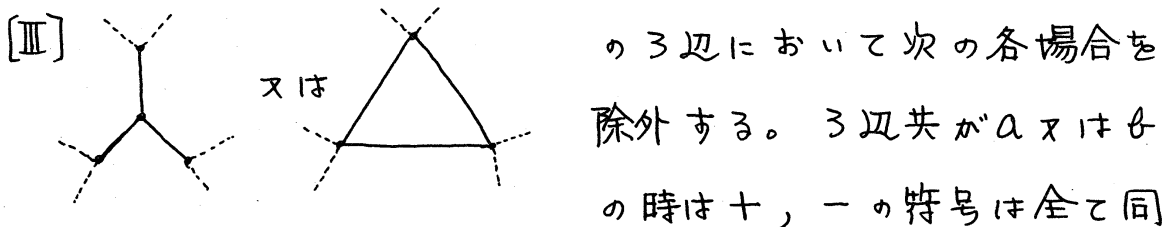
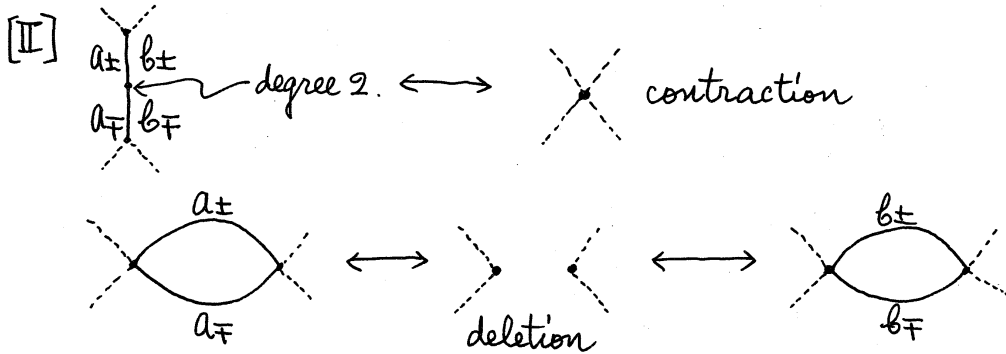
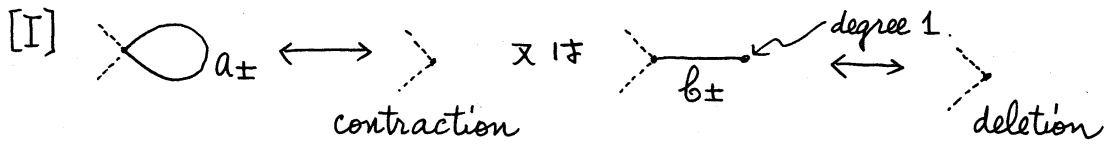
東大文理 小林一章 (Kazuaki Kobayashi)

各辺が a_+ , a_- , b_+ , b_- のいずれかの記号をもつグラフを記号つきグラフといいます (coded graph). このときグラフはループ及び多重辺をもっても良いとします。 G を 2 次元球面 S^2 上の coded graph とし, G の集合 $\{G\}$ に次のような同値関係 $\sim$ を入れる。(後で述べる絡み輪の図 (diagram) との対応のために同値関係の型を 4 つのタイプ [0] ~ [III] に分けておきます。)

[0] 非連結なグラフ G の連結成分の S^2 上における位置を任意に変えて出来るグラフ G' に対し $G \sim G'$

例  ただし G と G' の対応する辺の記号は同じとする。

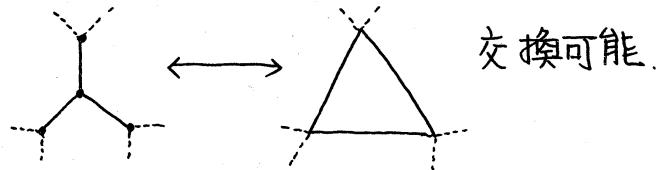
以下の [I] ~ [III] の図において実線の辺 (又は頂点) 以外で G と G' は同じとする。このとき $G \sim G'$ とする。



一, 3辺の中に a も b も含まれているときは2つある方の符号が一致して残りの1つがそれと反対。

例. $(a_{\pm}, a_{\pm}, a_{\pm}), (b_{\pm}, b_{\pm}, b_{\pm}), (a_{\pm}, a_{\pm}, b_{\mp}), (a_{\mp}, b_{\pm}, b_{\pm})$

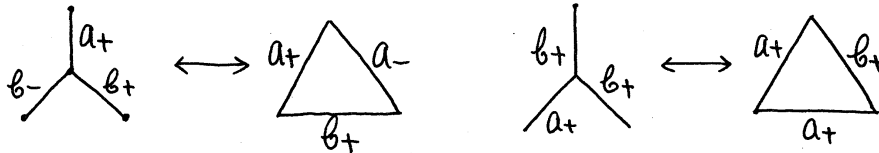
これ以外のとき



各辺の記号は“対辺”に移り a と b は入れかわり, $\pm$ は変ら

ない。

例



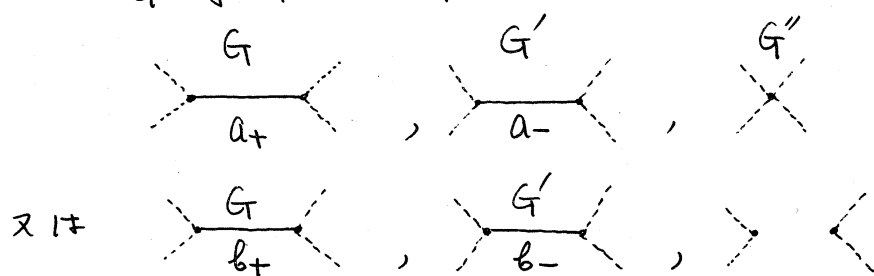
このように S^2 上の coded graph の集合 $\{G\}$ に同値関係を定義し, その同値類 $[G]$ に次のように Laurent polynomial (L-

多項式) を定義する. (以下 L -多項式 $Q_{[G]}(x, y, z)$ を Q_G と略記する事が多い.)

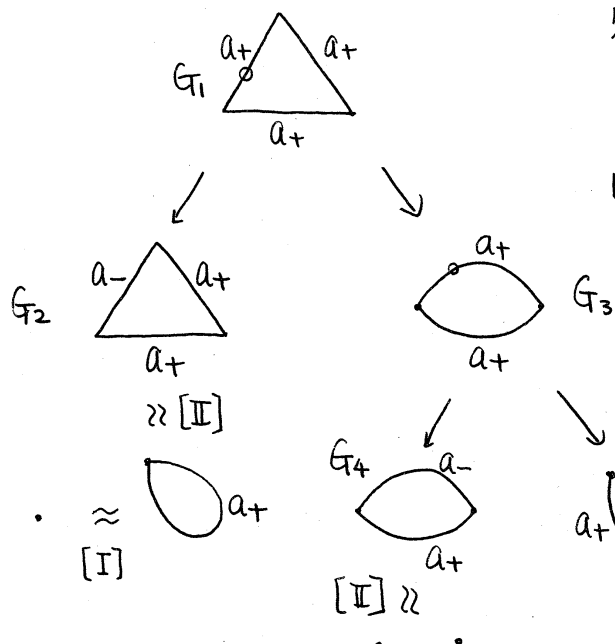
$$G \approx \underbrace{\cdot \cdot \cdot \dots \cdot}_{\text{点列}} \Rightarrow Q_G = \left(\frac{x-y}{z} \right)^{k-1}$$

G, G', G'' が S^2 上の 3 つの coded graphs で G (又は G') の一つの辺の所で下記の関係にあり他の部分では一致するとき

$$xQ_G - yQ_{G'} = zQ_{G''} \quad \text{という関係式が成り立つ.}$$



例.



$$\text{定義より } Q_{G_2} = Q_{G_5} = 1$$

$$Q_{G_4} = \frac{x-y}{z}$$

関係式を使って

$$\begin{aligned} Q_{G_3} &= \frac{y}{x} Q_{G_4} + \frac{z}{x} Q_{G_5} \\ &= \frac{y}{x} \cdot \frac{x-y}{z} + \frac{z}{x} \\ &= \frac{xy - y^2 + z^2}{xz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{G_1} &= \frac{y}{x} Q_{G_2} + \frac{z}{x} Q_{G_3} \\ &= \frac{y}{x} + \frac{xy - y^2 + z^2}{x^2} \\ &= \frac{2xy - y^2 + z^2}{x^2} \end{aligned}$$

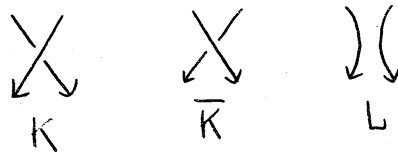
3次元球面 S^3 内の link K に次の性質をもつ L -多項式 $\tilde{Q}_K$
 $= \tilde{Q}_K(x, y, z)$ を定義する。(K は向きづけられているとする。)

(1) K が n 個の成分をもつ自明な絡み輪(link) $\Rightarrow \tilde{Q}_K = \left(\frac{x-y}{z}\right)^{n-1}$

(2) $K, \bar{K}, L$ がある交差式の近くで次の関係にあり, 他の所では一致しているような3つの links なら

$$x\tilde{Q}_K - y\tilde{Q}_{\bar{K}} = z\tilde{Q}_L$$

という関係式が成立する。



命題(J. Hoste). $\tilde{Q}_K$ は K の ambient isotopy invariant である。

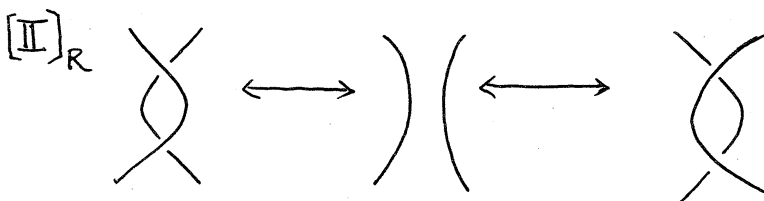
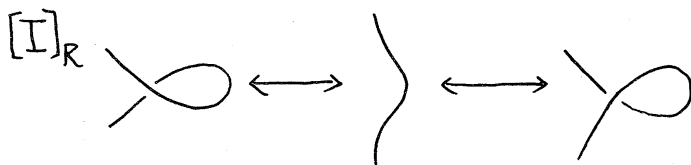
即ち K と K' が ambient isotopic $\Rightarrow \tilde{Q}_K = \tilde{Q}_{K'}$

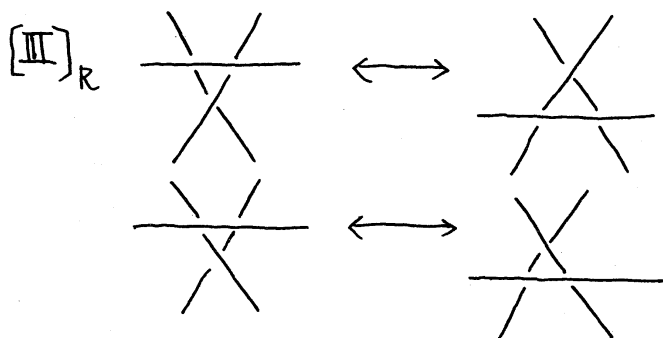
ここで K と K' が ambient isotopic ($K \approx K'$) とは

$\exists$ 1-parameter family $\{h_t\}_{t \in [0,1]}$ of homeomorphisms of S^3

$\nearrow h_0 = \text{id}_{S^3}, h_1(K) = K'$ という事である。

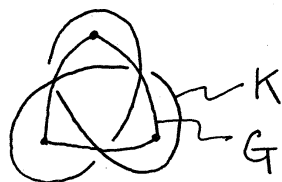
更に $K \approx K'$ なら次の3種類の Reidemeister moves (R-move) の有限列で K と K' が移り合える事が知られている。([R])



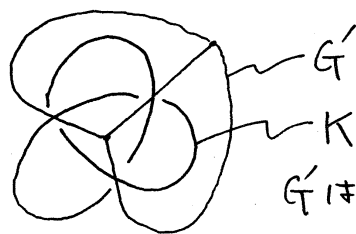


そこで oriented link K (の diagram) にグラフを次のように対応させる。 K を $\mathbb{R}^2$ 上の diagram と考え、 $\mathbb{R}^2 - K$ の unbounded region に接している $\mathbb{R}^2 - K$ の 1 つの領域にグラフの 1 つの頂点を取り、その頂点を含む領域に隣接している K の crossing にグラフの辺を対応させ、crossing を隔てて次の $\mathbb{R}^2 - K$ の領域にグラフの次の頂点を対応させる。このようにして次々と頂点と辺を作ってグラフ G を作る。 $\mathbb{R}^2 - K$ の unbounded region に頂点を取り、そこから crossing に辺を対応させるという作り方で作ると G の双対グラフ G' が作れるが、この G' は K が 1 個の成分をもつ自明な絡み輪のとき成分の個数を識別出来ないから採用しない (cf. [Y-K])

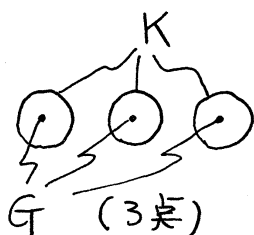
例.



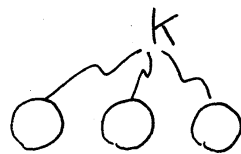
G' を採用しない理由



G' は採用しない.

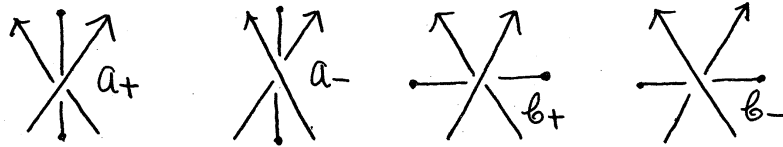


G (3 点)



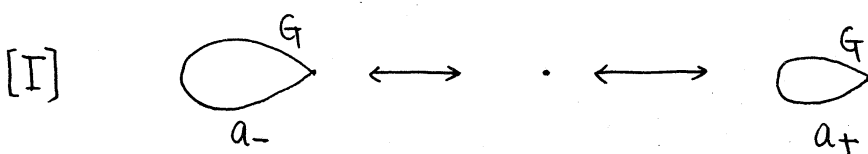
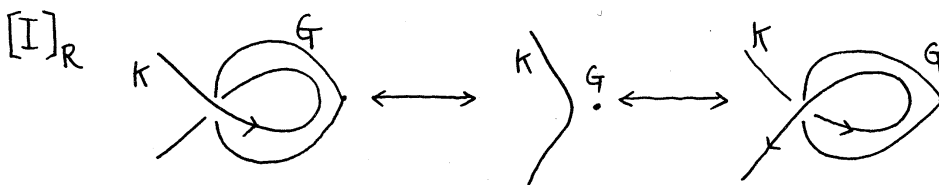
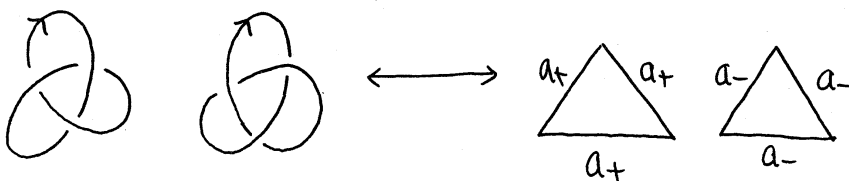
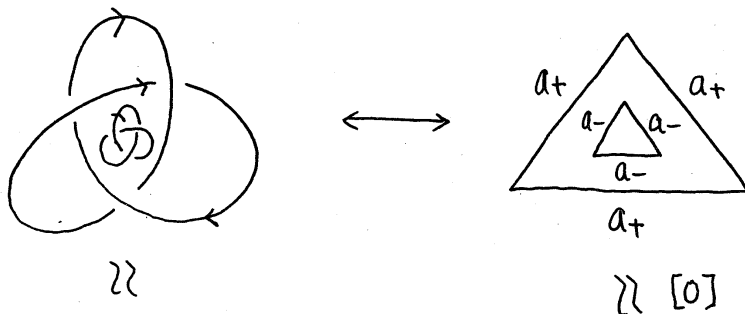
G' (1 点. 成分の数が不明)

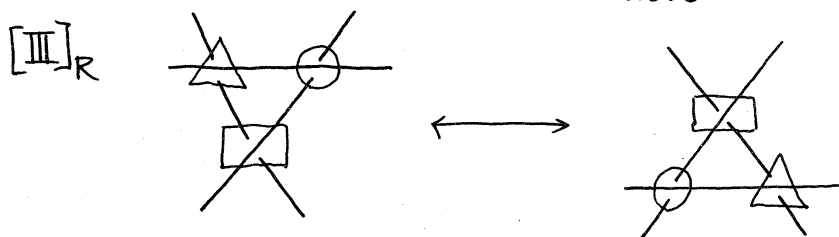
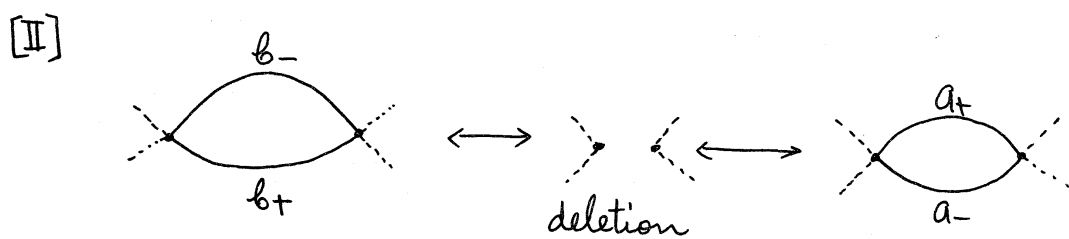
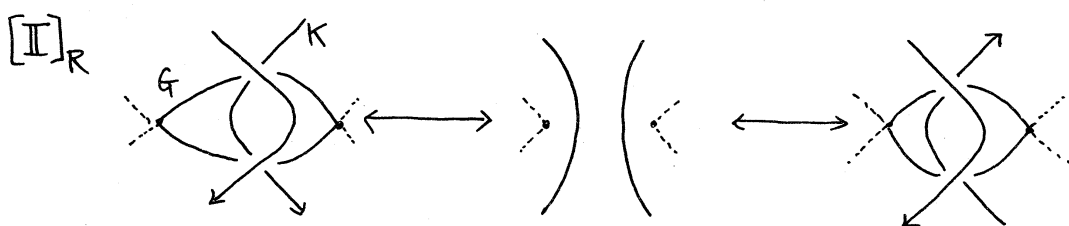
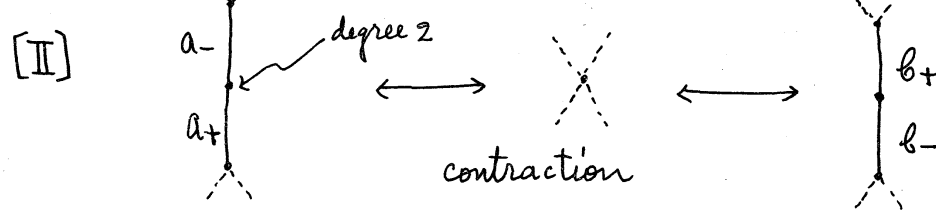
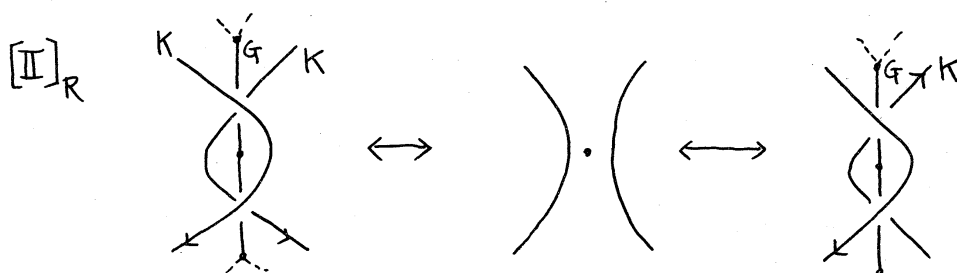
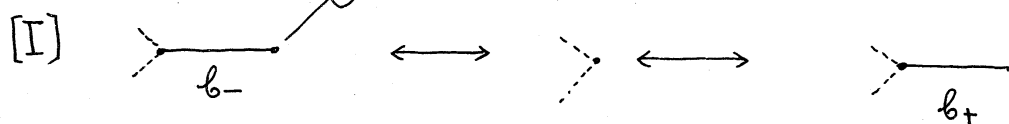
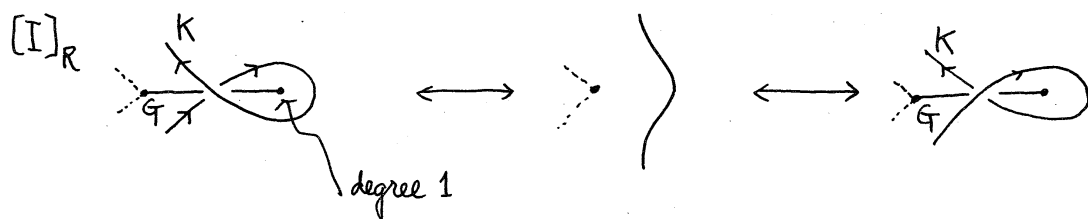
グラフ G に次のように読み輪 K から導入される code を対応させる。(矢印のついてる実線が K の部分)



このようにして作った coded graph G に R -moves $[I]_R, [II]_R, [III]_R$ に対応するグラフの同値関係を考えると前に述べたグラフの同値関係 $[I], [II], [III]$ になる。尚グラフの同値関係 $[O]$ には split link の split している成分毎の ambient isotopy に対応している。

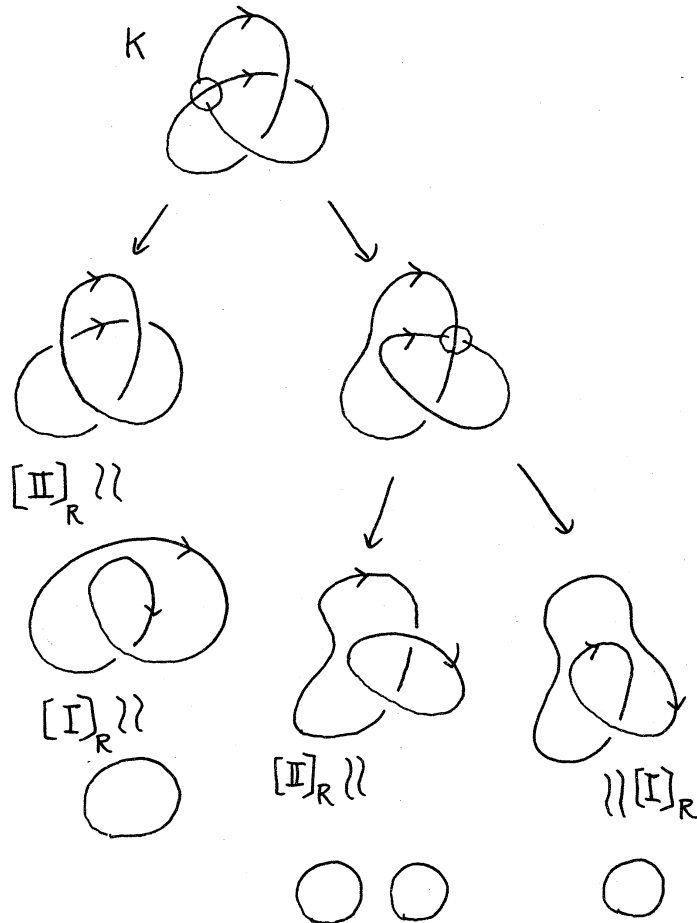
例.



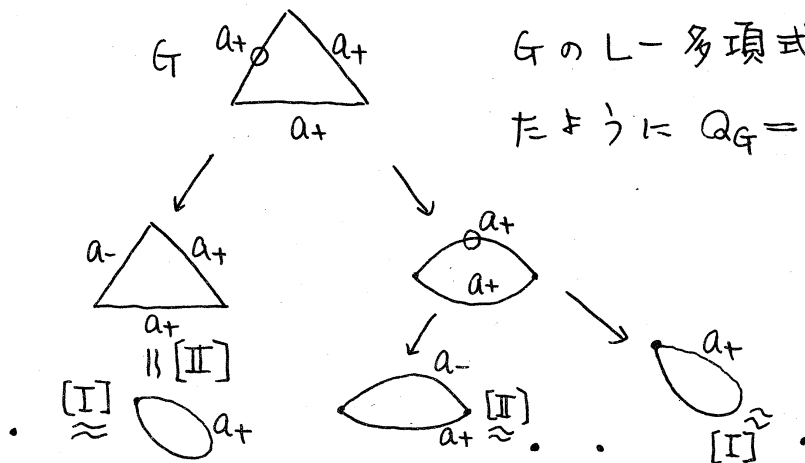


命題. 絡み輪 K の L -多項式 $\widehat{Q}_K$ は K に対応する coded グラフ G (の同値類) の L -多項式 Q_G に等しい.

例.



K の変形に対応するグラフ G で行なうと下図. このグラフ



G の L -多項式は前に計算したように $Q_G = \frac{2xy - y^2 + z^2}{x^2}$

従って絡み輪 K の Hoste 多項式 $\tilde{Q}_K$ はグラフの変形を使って計算出来る。この Hoste 多項式は非常に強力な link invariant で

$$\tilde{Q}_K(1, 1, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}) = \Delta_K(t) \pmod{\pm t^n} : \text{reduced Alexander poly.}$$

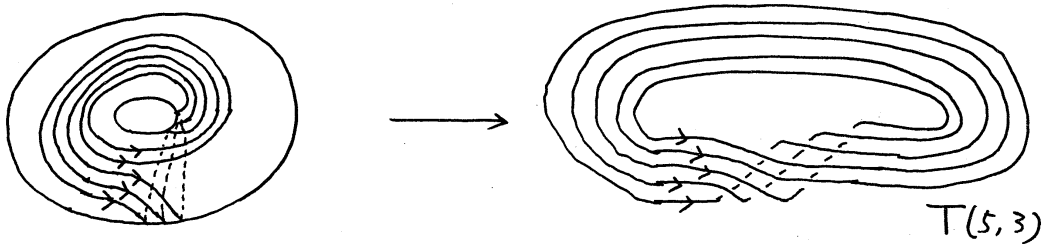
$$\tilde{Q}_K(1, 1, z) = V_K(z) : \text{Conway polynomial}$$

$$\tilde{Q}_K(t, t^{-1}, t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) = V_K(t) : \text{Jones polynomial}$$

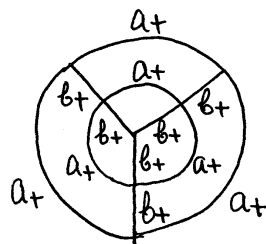
等が知られており、更にいくつかの基本的な性質が成立している。([H]). ([K]).

coded graph を利用すると複雑なグラフが簡明に表現出来る。

例. $(5, 3)$ -torus knot $T(5, 3)$

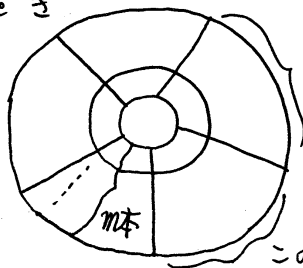


$T(5, 3)$ に対応する coded graph $G(5, 3)$

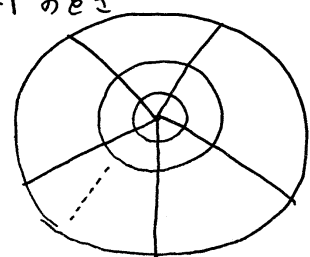


一般に $T(p, q)$ に対応する coded graph $G(p, q)$ は

$p = 2m$ のとき



$p = 2m+1$ のとき

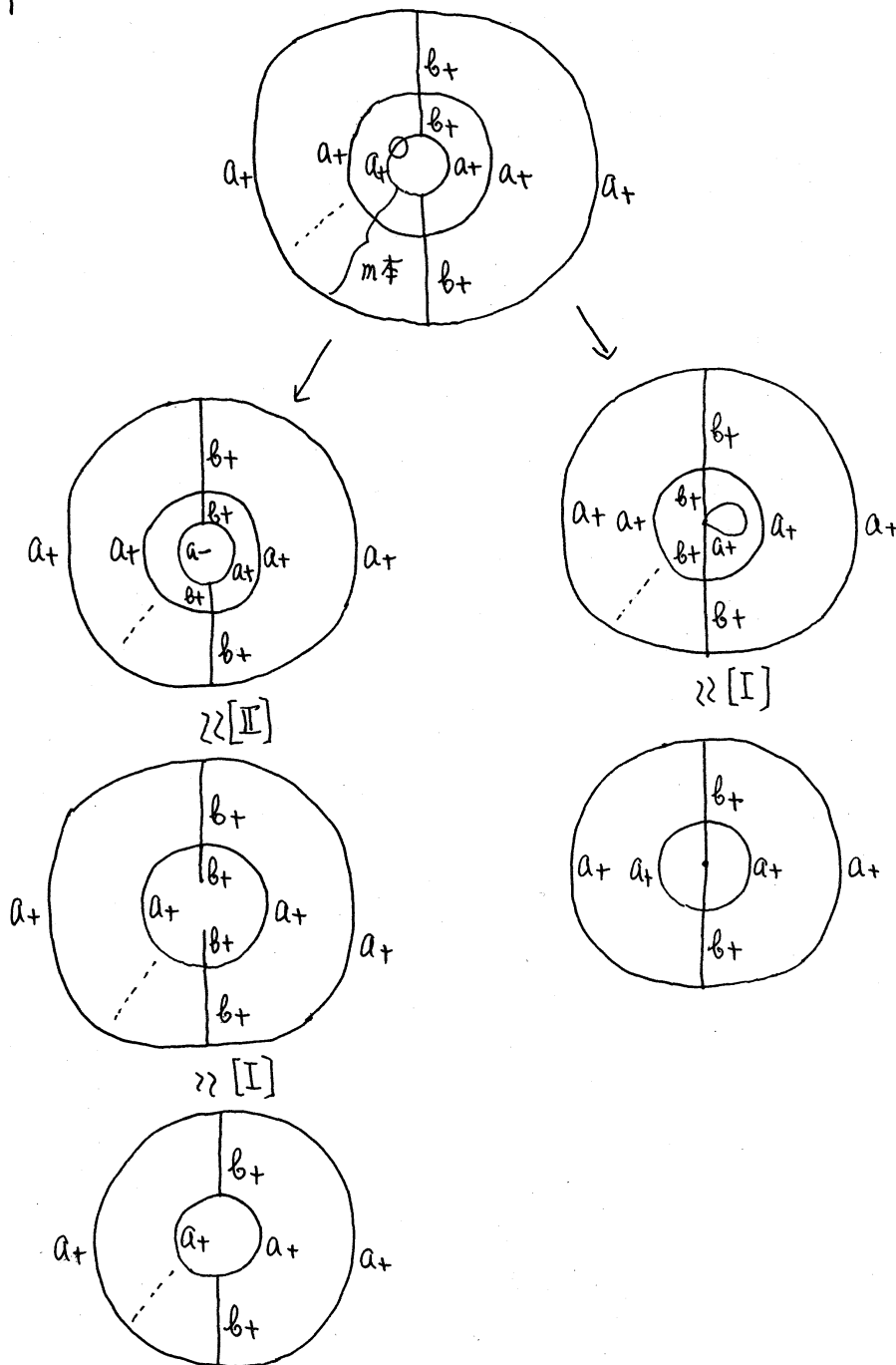


この領域が m 個.

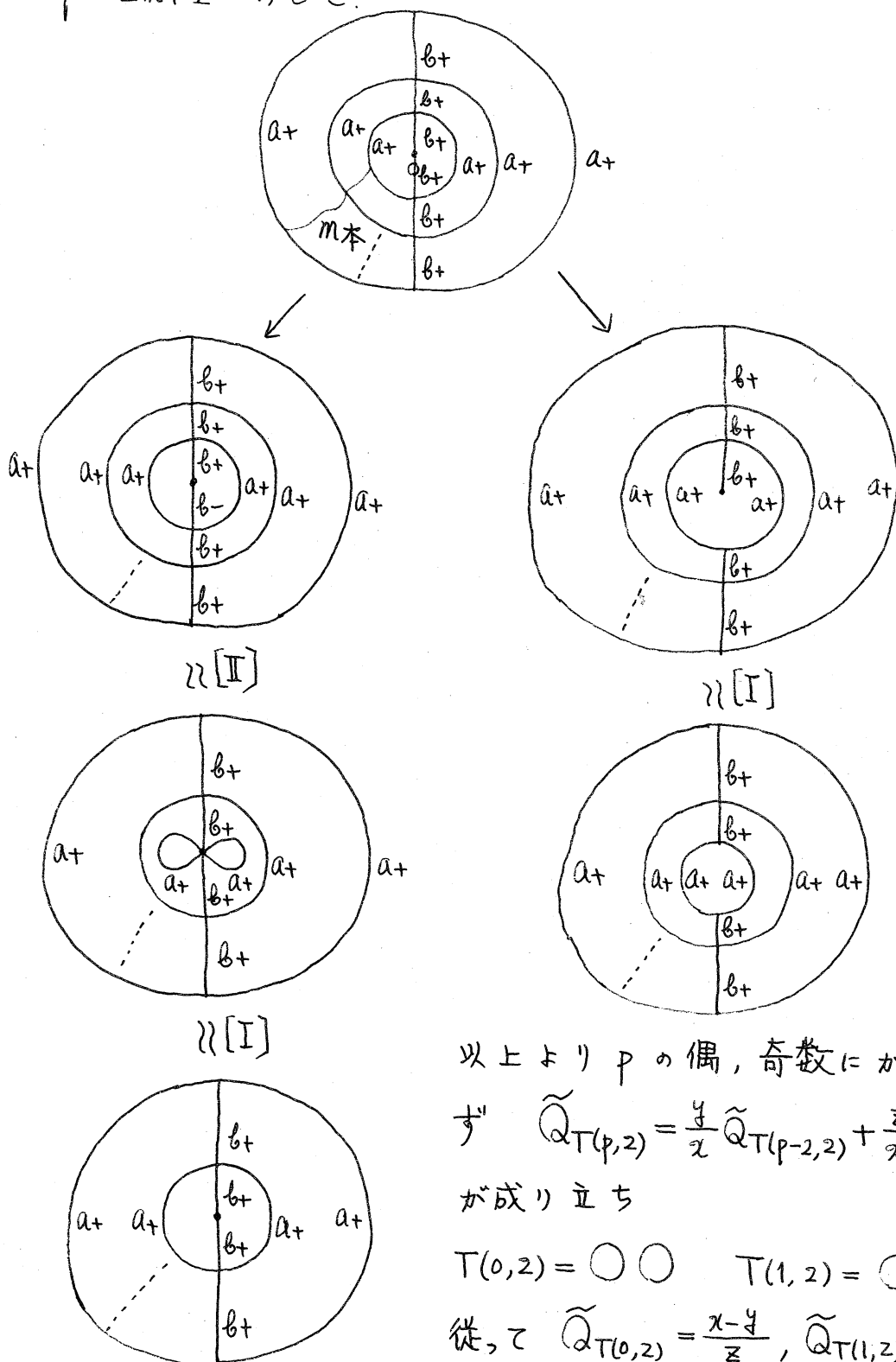
そして同心円周上の辺の code は全て a_+ , 円の中心に向かう
 辺の code は全て b_+ とする。

例. $(p, 2)$ -torus link $T(p, 2)$ の Hoste 多項式.

$p = 2m$ のとき



$p = 2m+1$ のとき.



以上より p の偶, 奇数にかゝわら

$$\tilde{Q}_{T(p,2)} = \frac{y}{x} \tilde{Q}_{T(p-2,2)} + \frac{z}{x} \tilde{Q}_{T(p-1,2)}$$

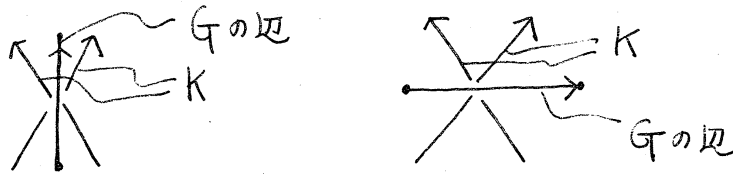
が成り立ち

$$T(0,2) = \bigcirc \bigcirc \quad T(1,2) = \bigcirc$$

$$\text{従って } \tilde{Q}_{T(0,2)} = \frac{x-y}{z}, \quad \tilde{Q}_{T(1,2)} = 1$$

それ故上の漸化式を使って全ての $\tilde{Q}_{T(p,2)}$ が計算出来る。

次に S^2 上のどのようなグラフ G が link diagram から作られるグラフに成り得るかを考える。それには G 上の code だけでは情報が不足なので G に orientation を入れ、その orientation と link diagram K とは次のように対応しているとする。(以

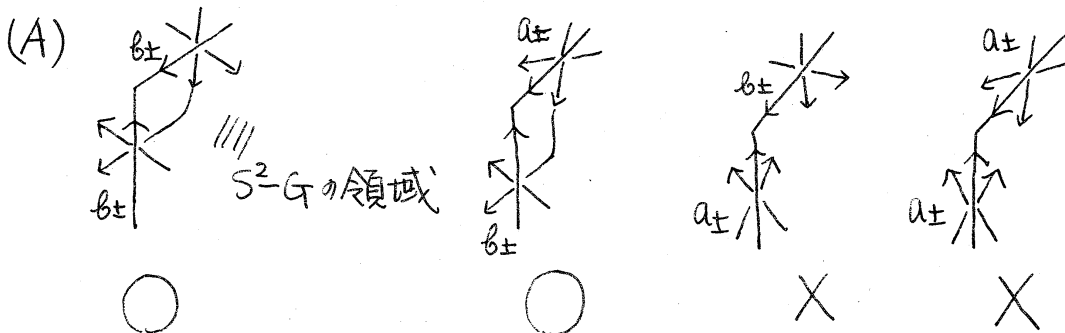


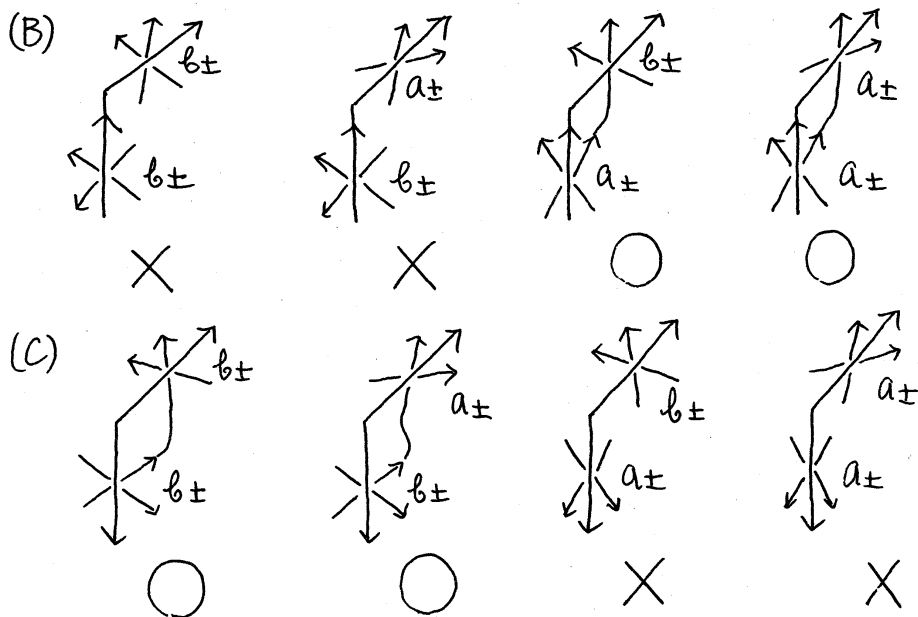
下で述べるように G 及びその双対グラフを同時に考えれば G 上の向きは不要になる。)

まず有向グラフ $G \subset S^2$ が絡み輪 L から作られるグラフになるための必要条件を上げる。

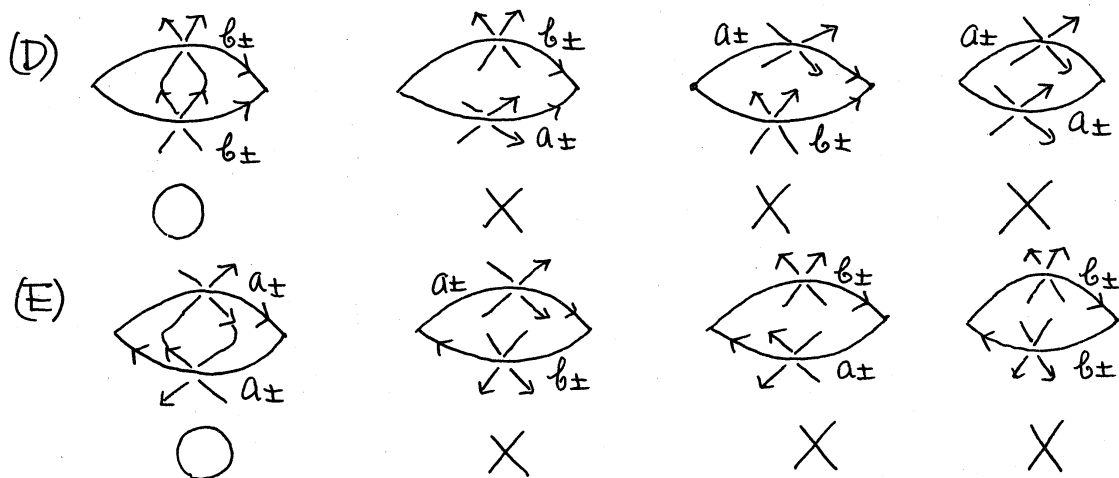
必要条件 I. G の 2 つ以上の頂点が絡み輪 L の diagram の 1 つの領域に入っているといけないので G の各頂点を分けるような L の部分が必要ではない。この条件を満足しているかどうかを個別に調べると以下のようなになる (○印のあるものが実際につなげるもの。

$S^2 - G$ の領域が 3 角形以上のとき

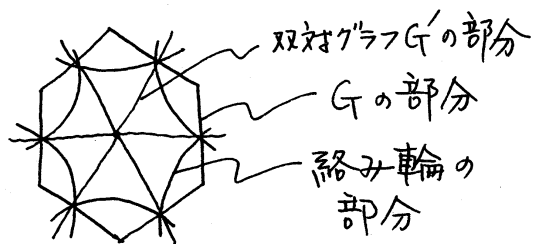




$S^2 - G$ の領域が2角形するとき



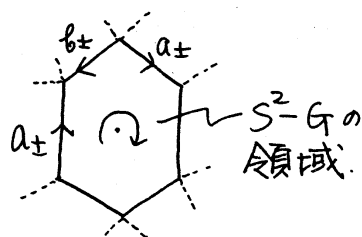
必要条件Ⅱ. $S^2 - G$ の各領域内に双対グラフの頂点は唯一つ存在しなければならない。所が下図のように必要条件Ⅰを満足していればこの条件Ⅱは自動的に満足している事がわかる。



る。またこれらの条件で
実際路み輪が書けるから
十分条件にもなっている。

以上の結果を見玉(北大.理)は次のようにまとめた。

S^2-G の各領域に時計廻りの向きをつけ, 領域の向きに従って境界上の code を読んでいく。



$$w = ab^{-1}a \dots$$

べき指数は領域の向きと辺の向きが一致したとき +1, 反対向きになったとき -1 とする。

定理1. oriented coded graph G が link から作られるグラフとなるための必要十分条件は, S^2-G の各領域で上のようして作った word w が $w = \dots a^{\varepsilon} *^{\varepsilon} \dots b^{\varepsilon'} *^{-\varepsilon'}$ となっている事である。ここで $\varepsilon, \varepsilon' = +1$ 又は -1 . $* = a$ 又は b 」

系. $\varepsilon_b(w) = 0$ ($\varepsilon_b(w)$ は word w の中に出て来る指数の和)。

定理2. coded graph G が link から作られるグラフとなるための必要十分条件は, 次の(1), (2) を満足する事である。

- (1) S^2-G の各領域の境界上に含まれる b の個数は偶数個。
- (2) S^2-G の各頂点のまわりの a の個数は偶数個。」

定理2 の条件の十分性に[矢]する証明は(1), (2) の条件から定理1 の条件を満足する oriented coded graph $\tilde{G}$ を作ってやればよい。

References

- [H] Jim Hoste : An invariant of links, (to appear in Bull. Amer. Math. Soc.)
- [K] K. Kobayashi : Link の Hoste 多項式について,
数理解析研講究録「コンピュータを利用した低次元トポロジーの研究」.
- [R] K. Reidemeister : Knoten Theorie , Chelsea (1948)
- [Y-K] T. Yajima and S. Kinoshita : On the graph of Knots,
Osaka Math. J. 9 (1957) 155-163.