

数列 $(n\alpha + f(n))$ の discrepancy について

鹿児島国際大学 大久保 幸夫 (Yukio Ohkubo)

The International University of Kagoshima

1 導入

実数 x に対して, $[x]$ は x より小さい最大の整数を, $\lceil x \rceil$ は x 以上の最小の整数を, また $\{x\} = x - [x]$ は x の小数部分を表すとする。更に, 表記 $\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\})$ と $e(x) = \exp(2\pi i x)$ を使う。関係 $f \ll g$ または $f = O(g)$ は, ある絶対定数 C が存在して $|f| \leq Cg$ が成り立つことを示す。まず, いくつかの discrepancy の定義, いくつかの性質, それとディオファントス近似に関するある定義を述べる。

定義 1 ([2]). 実数列 $(x_n)_{n \geq 1}$ の L^2 -discrepancy $D_N^{(2)}(x_n)$ を次で定義する。

$$D_N^{(2)}(x_n) = \left(\int_0^1 R_N^2(x) dx \right)^{1/2},$$

ここで, $R_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{[0,x)}(x_n)$, $\chi_{[0,x)}(x_n) = 1$ if $\{x_n\} \in [0, x)$, $\chi_{[0,x)}(x_n) = 0$ otherwise, 即ち, $R_N(x) = (\text{区間 } [0, x) \text{ に含まれる } \{x_n\}, n = 1, \dots, N \text{ の個数})/N$.

通常の discrepancy は次で定義される。

定義 2 ([2]). 実数列 $(x_n)_{n \geq 1}$ の discrepancy D_N は

$$D_N(x_n) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |R_N(x)|.$$

L^2 -discrepancy と通常の discrepancy の間の関係として次が知られている (H. Niederreiter, [4]) :

$$\frac{1}{\sqrt{12}} D_N^{3/2}(x_n) \leq D_N^{(2)}(x_n) \leq D_N(x_n).$$

Parseval の等式より, 次の等式が得られる (Niederreiter, [4]) :

$$\left(D_N^{(2)}(x_n) \right)^2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\{x_n\} - \frac{1}{2} \right) \right)^2 + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e(hx_n) \right|^2. \quad (1)$$

定義 3 ([3]). α を無理数とする。ある $K > 0$ が存在して, すべての正の整数 q に対して $\|\alpha q\| \geq K/q$ が成り立つとき, α は constant type であるという。一方, ある $c = c(\tau, \alpha) > 0$ が存在し, すべての正整数 q に対して, $\|\alpha q\| \geq c/q^\tau$ となる実数 τ の下限が η となると, α は type η であるという (上のような τ が存在しない時は infinite type であるという)。

注意：(1) 無理数 α が constant type $\Leftrightarrow$ 無理数 α が有界な部分商を持つ連分数である，すなわち，連分数展開 $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ に対して $a_i \leq C$ ($i \geq 1$)。 (2) Dirichlet の定理によると，無理数の type η は $\eta \geq 1$ を満たす。 (3) Roth の定理によると，あらゆる実代数的無理数は type $\eta = 1$ である。

1999 年，[5] において我々は次のことを示した。無理数 α が type η で β が非零実数ならば，あらゆる $\varepsilon > 0$ に対して，ある正定数 $C(\alpha, \beta)$ が存在し

$$D_N(\alpha n + \beta \log n) \leq C(\alpha, \beta) N^{-2/(2\eta+1)+\varepsilon}$$

がいえ。また， α が constant type ならば，ある正定数 $C'(\alpha, \beta)$ が存在し

$$D_N(\alpha n + \beta \log n) \leq C'(\alpha, \beta) N^{-2/3} \log N \quad (2)$$

がいえ。

一般に，つぎのことが知られている。任意の無限数列 (x_n) に対して，ある $c > 0$ が存在し無限に多くの N について

$$D_N^{(2)}(x_n) \geq c N^{-1} (\log N)^{1/2}$$

が成り立つ (Roth, [7])。

無理数 α の連分数展開は有界な部分商を持つとする。そのとき，

$$D_N^{(2)}(\alpha n) = O(N^{-1} \log N) \quad (3)$$

が成り立ち，この評価は最良である (Niederreiter, [4])。

1985 年 Proinov [6] は， α が有界部分商を持つ連分数に展開できれば，symmetrized (αn) -列 $(y_n) = (\alpha, -\alpha, 2\alpha, -2\alpha, \dots)$ に対して

$$D_N^{(2)}(y_n) = O(N^{-1} (\log N)^{1/2})$$

がいえことを示した。すなわち，対称化によって discrepancy の評価が (3) と比較して $(\log N)^{1/2}$ だけよくなっていることがわかる。

一般に，symmetrized (x_n) -列 (y_n) とは $y_{2n-1} = x_n$, $y_{2n} = -x_n$ ($n = 1, 2, \dots$) となる数列のことである。 $\{-x_n\} = 1 - \{x_n\}$ であるから， N が偶数ならば，(1) の右辺における第 1 項が 0 となり，

$$\left(D_N^{(2)}(x_n) \right)^2 = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e(hx_n) \right|^2 \quad (4)$$

が成り立つ。

2 諸結果

最初に symmetrized $(\alpha n + \beta \log n)$ -列 (y_n) : $y_{2n-1} = \alpha n + \beta \log n$; $y_{2n} = -(\alpha n + \beta \log n)$ ($n = 1, 2, \dots$) の L^2 -discrepancy の上からの評価について考察する。この場合，(4) より，指数和の評価が $D_N^{(2)}$ の評価に直接つながる。

指数和の評価を得るために使ういくつかの補題をあげる。

補題 1 ([9, Lemma 4.4]). $f(x)$ を実数値関数, $f'(x)$ を区間 $[a, b]$ で単調な関数で, ある $0 < \lambda < 1$ が存在し, 区間 $[a, b]$ 上で $|f'(x)| \leq \lambda$ とする。このとき

$$\left| \int_a^b e(f(x)) dx - \sum_{a < n \leq b} e(f(n)) \right| = O\left(\frac{1}{1-\lambda}\right).$$

補題 2 ([8, Lemma 4.7]). $f(x)$ を区間 $[a, b]$ で増加する連続導関数 $f'(x)$ を持つ実関数とする。 $A = f'(a)$, $B = f'(b)$ と置く。このとき

$$\sum_{a < n \leq b} e(f(n)) = \sum_{A-\eta < \nu < B+\eta} \int_a^b e(f(x) - \nu x) dx + O(\log(B-A+2)),$$

ここで, η は 1 より小さい任意の正定数である。

補題 3 (Atkinson's saddle point lemma, [1]). $f(z)$ と $\varphi(z)$ は複素関数, $[a, b]$ は実区間で次の条件が満たされるとする。

- (i) $a \leq x \leq b$ に対して $f(x)$ は実数値をとり, $f''(x) > 0$,
- (ii) ある $a \leq x \leq b$ で定義された正の微分可能関数 $\mu(x)$ が存在し, $a \leq x \leq b$, $|z-x| \leq \mu(x)$ に対して $f(z)$ と $\varphi(z)$ は解析的である,
- (iii) $[a, b]$ で定義された関数 $F(x) > 0$, $\Phi(x) > 0$ が存在し, $a \leq x \leq b$, $|z-x| \leq \mu(x)$ に対して,

$$\varphi(z) \ll \Phi(x), \quad f'(z) \ll F(x)\mu^{-1}(x),$$

$$(f''(z))^{-1} \ll \mu^2(x)F^{-1}(x)$$

が成り立つ。

任意の実数 k に対して, $f'(x) + k$ が $[a, b]$ に零点 x_0 を持つとする。 a, x_0, b における $f(x)$ と $\varphi(x)$ の値を添字 $a, 0, b$ によってそれぞれあらわすとする。このとき

$$\begin{aligned} & \int_a^b \varphi(x) e(f(x) + kx) dx \\ &= \varphi_0 (f_0'')^{-1/2} e(f_0 + kx_0 + 1/8) \\ &+ O\left(\int_a^b \Phi(x) \exp[-C|k|\mu(x) - CF(x)] dx + |d\mu(x)|\right) + O\left(\Phi_0 \mu_0 F_0^{-3/2}\right) \\ &+ O\left(\Phi_a (|f_a' + k| + (f_a'')^{1/2})^{-1}\right) + O\left(\Phi_b (|f_b' + k| + (f_b'')^{1/2})^{-1}\right). \end{aligned}$$

関数 $f'(x) + k$ が $a \leq x \leq b$ で零点を持たなければ, 上の式の x_0 を含む項は削除される。

これらの補題を応用すると, 次の指数和の評価を得ることができる。

定理 1. α を無理数, $\beta < 0$ とする。 N と $h > 0$ を整数, $c_h = -\beta h / \{\alpha h\}$ とする。もし $1 \leq c_h \leq N$ ならば

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N e(h(\alpha n + \beta \log n)) &= \frac{(-\beta h)^{1/2}}{\{\alpha h\}} e(\beta h(\log c_h - 1) + 1/8) \\ &+ O\left((- \beta h)^{1/2} \log(-\beta h + 2)\right) + O(\{\alpha h\}^{-1}) + O((1 - \{\alpha h\})^{-1}). \end{aligned}$$

系 1. α は無理数, β は非負の実数, N と $h > 0$ は整数とすると,

$$\sum_{n=1}^N e(h(\alpha n + \beta \log n)) \ll \frac{(-\beta h)^{1/2}}{\{\alpha h\}} + (-\beta h)^{1/2} \log(-\beta h + 2) + \frac{1}{1 - \{\alpha h\}}.$$

もし $-\beta h / \{\alpha h\} > N$ ならば

$$\sum_{n=1}^N e(h(\alpha n + \beta \log n)) \ll (-\beta h)^{1/2} \log(-\beta h + 2).$$

これらの結果より, 次の $D_N^{(2)}$ の上からの評価を得る。

定理 2. 無理数 α が *constant type* で, β が非零実数ならば, *symmetrized* $(\alpha n + \beta \log n)$ -列 (y_n) に対して

$$D_N^{(2)}(y_n) \ll (|\beta| + 1)^{1/2} N^{-2/3}$$

が成り立つ。

注意: この評価式と (2) を比較すると, $\log N$ が消え, その分良くなっていることがわかる。

次に, $D_N^{(2)}$ の下からの評価を得るために $(\alpha n + \beta \log n)$ の別種の対称化を考える。

定理 3. $z_n = \alpha \lfloor (n+1)/2 \rfloor + \beta(-1)^n \log \lfloor (n+1)/2 \rfloor$, $n = 1, 2, \dots$, すなわち

$$z_n = \alpha, \alpha, 2\alpha - \beta \log 2, 2\alpha + \beta \log 2, 3\alpha - \beta \log 3, 3\alpha + \beta \log 3, \dots$$

α が *type* η の無理数で, β が非零実数ならば, あらゆる $\varepsilon > 0$ に対して, ある $C'(\eta, \varepsilon, \beta) > 0$ が存在し, 無限に多くの自然数 N について

$$D_N^{(2)}(z_n) \geq C'(\eta, \varepsilon, \beta) N^{-3/(2\eta+2)-\varepsilon}$$

が成り立つ。

α が無理数で, β が非零実数ならば, 無限に多くの N について

$$D_N^{(2)}(z_n) \geq C''(\beta) N^{-3/4}$$

が成り立つ。

3 数値実験

最後に, いくつかの数値実験結果を述べる。そのために, L^2 -discrepancy を explicit に表す次の公式を応用する。

もし, $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_N \leq 1$ ならば,

$$(D_N^{(2)}(x_n))^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(x_n - \frac{2n-1}{2N} \right)^2 + \frac{1}{12N^2}$$

が成り立つ (Niederreiter, [4])。

この等式を使い L^2 -discrepancy を計算した。 $D_N^{(2)}(\sqrt{2}n + \log n)$, $N = 1, 2, \dots, 1000$ と曲線 $y = \frac{1}{2}x^{-2/3}$, $y = \frac{1}{2}x^{-3/4}$ を描いたものが (図 1) である。また, 数列 $(\sqrt{2}n)$ と $(\sqrt{2}n + \log n)$ に対する L^2 -discrepancy $D_N^{(2)}$, $N = 1, 2, \dots, 20000$ をグラフ化したものが (図 2) である。

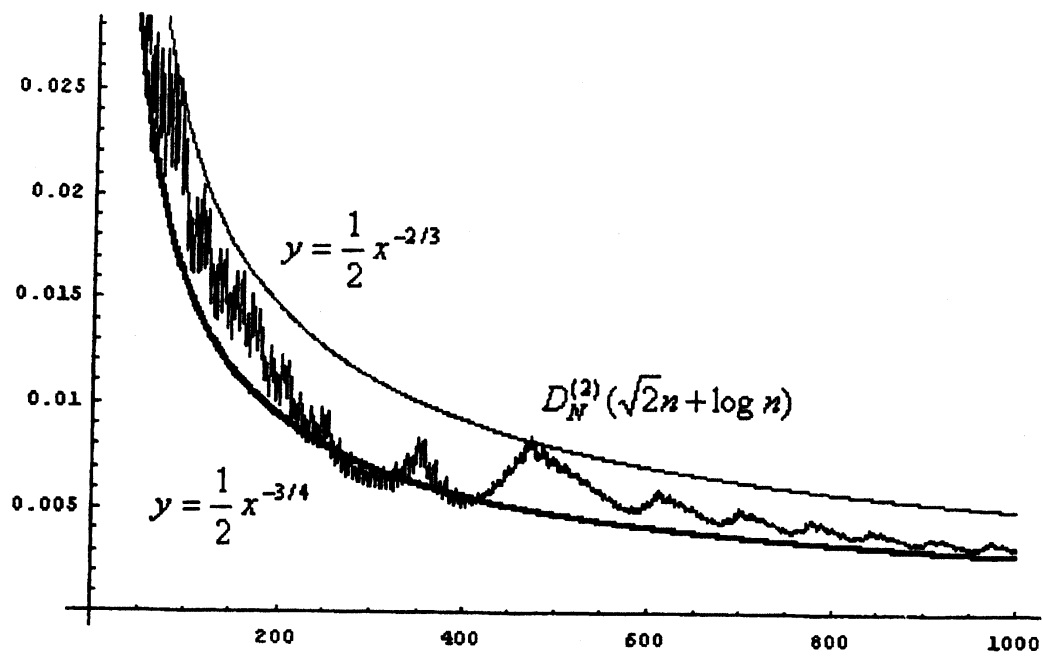


图 1: L^2 -discrepancy for the first 1000 points

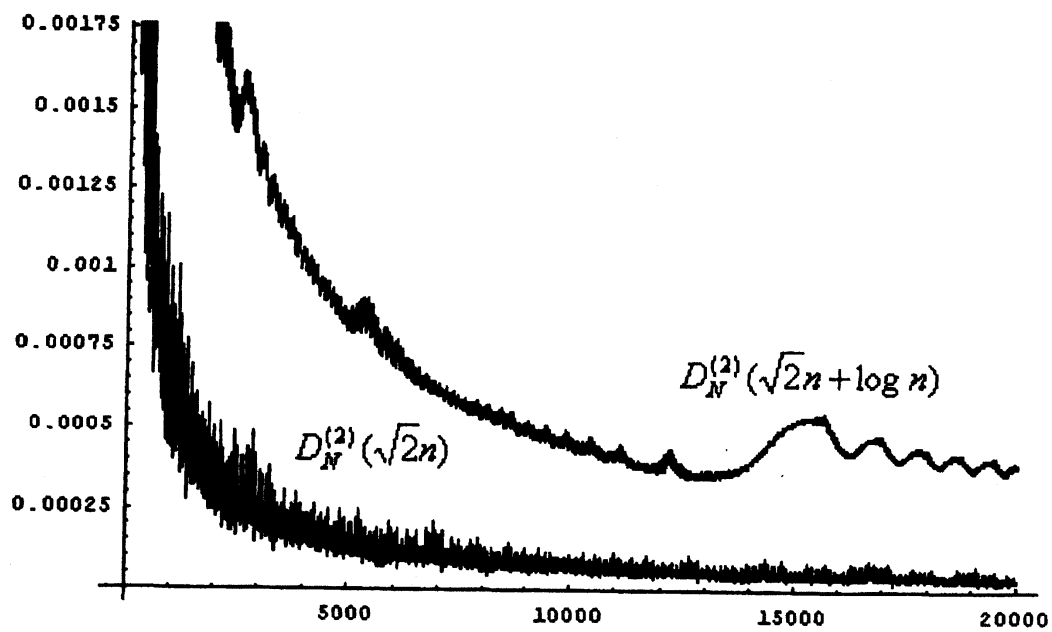


图 2: L^2 -discrepancy for the first 20000 points

参考文献

- [1] F. V. Atkinson, The mean-value of the Riemann zeta function, *Acta Math.*, 81 (1949), 353–376.
- [2] M. Dromata and R. F. Tichy, *Sequences, Discrepancies and applications*, Springer (Berlin, 1997).
- [3] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, John Wiley and Sons, (New York, 1974).
- [4] H. Niederreiter, Application of diophantine approximations to Numerical integration, *Diophantine Approximation and Its Applications*, in C. F. Osgood (Ed.), Academic Press, (New York, 1973), 129–199.
- [5] Y. Ohkubo, Notes on Erdős-Turán inequality, *J. Austral. Math. Soc. (Series A)*, 67 (1999), 51–57.
- [6] P. D. Proinov, On the L^2 discrepancy of some infinite sequences, *Serdica*, 11 (1985), 3–12.
- [7] K. F. Roth, On irregularities of distribution, *Mathematika*, 1 (1954), 73–79.
- [8] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, 2nd ed., revised by D. R. Heath-Brown, Clarendon Press, (Oxford, 1986).
- [9] A. Zygmund, *Trigonometric Series Vol.I*, Cambridge University Press, (Cambridge, 1979).

Yukio Ohkubo: Department of Business Administration, The International University of Kagoshima,
 Kagoshima-shi, 891-0191, JAPAN,
 e-mail:ohkubo@eco.iuk.ac.jp